

## PEWNE PROBLEMY OPTYMALNEGO KSZTAŁTOWANIA PRĘTA ŚCISKANEGO SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Niniejsza praca zawiera rozwiązania dwóch zagadnień: 1) optymalnego parametrycznego kształtowania prętów sprężystych (o określonym sposobie zmiany przekroju poprzecznego) ściskanych siłą skierowaną do bieguna, 2) optymalnego wariacyjnego kształtowania prętów ściskanych siłą skierowaną do bieguna, w przypadku gdy znajdują się one w sprężysto-plastycznym zakresie pracy.

Stosowanie optymalizacji parametrycznej może być podyktowane względami technologicznymi (łatwością wykonania). Poszukujemy tu takiej wartości pewnego parametru (na przykład kąta wierzchołkowego stożka), wyróżniającego kształt pręta spośród pewnej klasy prętów tak, aby otrzymać największy zysk na ciężarze (objętości), wynikający z zastąpienia pręta przyrównanego — optymalnym, przenoszącym tę samą siłę krytyczną. Kształt optymalnego pręta stożkowego, ściskanego osiowo, został podany przez ŻYCKOWSKIEGO [10] dla zakresu sprężystego i sprężysto-plastycznego, a niekonserwatywne zagadnienie optymalizacji prętów stożkowych ściskanych siłą podśledzącą jest rozwiązane w pracy GAJEWSKIEGO [2]. Sama metoda kształtowania parametrycznego, w zastosowaniu do różnych problemów, omówiona jest szerzej w pracach KRZYSIA i ŻYCKOWSKIEGO [5, 6], a absolutnie optymalne (w sensie rachunku wariacyjnego) kształty prętów sprężystych, jednorodnych i niejednorodnych, ściskanych siłą skierowaną do bieguna, podano w pracy GAJEWSKIEGO i ŻYCKOWSKIEGO [3]. W pracy tej omówiono szerzej literaturę odnoszącą się do problemów optymalizacji prętów ściskanych.

Drugi problem należy do zagadnień optymalizacji absolutnej, przeprowadzanej metodami rachunku wariacyjnego, a polegającej na poszukiwaniu pręta o najmniejszej objętości, przenoszącego daną siłę krytyczną. Poszukujemy tu zatem minimum funkcjonu — objętości pręta, przy dodatkowym warunku w postaci równania różniczkowego ugiętej osi pręta ściskanego. Taki sposób postępowania zastosowano w pracach CZENCOWA [1], GAJEWSKIEGO i ŻYCKOWSKIEGO [3] i innych — do optymalizacji kształtu prętów sprężystych, a także w pracy KRZYSIA [6] do optymalizacji utwierdzonego pręta cienkościennego o profilu zamkniętym, w sprężysto-plastycznym zakresie pracy.

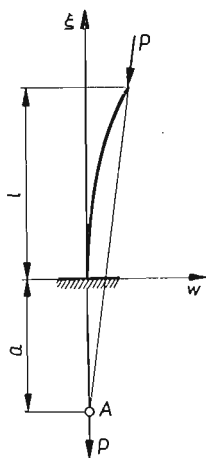
Do rozwiązania powyższych zagadnień wystarczające jest stosowanie statycznego kryterium stateczności.

## 2. Optymalne kształtowanie parametryczne

**2.1. Sformułowanie zagadnienia.** Wspornikowy pręt przedstawiony na rys. 1 jest obciążony siłą  $P$ , o kierunku zmieniającym się podczas wybożenia, lecz skierowaną do stałego punktu  $A$  — bieguna. Punkt ten jest położony na osi nieodkształconego pręta w odległości  $a$  od punktu utwierdzenia, przy czym odległość ta jest liczona jako dodatnia, gdy  $A$  znajduje się poniżej utwierdzenia. W tej części pracy zakładamy, że pręt jest sprężysty i jednorodny, o module Younga  $E_0$ , a moment bezwładności jego przekroju poprzecznego zmienia się według wzoru

$$(2.1) \quad J(x) = J_0(1 - \varepsilon x)^n = J_0 g(x), \quad g(x) = (1 - \varepsilon x)^n.$$

$J_0$  jest momentem bezwładności przekroju utwierdzonego (dla  $x = 0$ ),  $\varepsilon$  jest parametrem charakteryzującym zbieżność pręta,  $x = \xi/l$  jest zmienną bezwymiarową. Dowolny parametr  $\varepsilon$  może się zmieniać w przedziale  $(-\infty, +1)$ . Zadaniem naszym jest znalezienie



Rys. 1

takiej wartości parametru  $\varepsilon$ , dla której objętość pręta jest najmniejsza przy danej sile krytycznej powodującej utratę stateczności. Następuje tu utrata stateczności przez wybożenie i statyczne kryterium stateczności jest wystarczające do rozwiązania zagadnienia.

Skorzystamy zatem ze znanego równania linii ugięcia badanego pręta

$$(2.2) \quad [(1 - \varepsilon x)^n y''']' + \beta y'' = 0,$$

w którym przyjęto oznaczenia:  $y = w/l$ ,  $\beta = Pl^2/EJ_0$ , gdzie  $w$  jest ugięciem pręta w odległości  $\xi$  od początku układu współrzędnych. Równania (2.2) należy uzupełnić warunkami brzegowymi [3]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} y(0) &= 0, & g(1)y''(1) &= 0, \\ y'(0) &= 0, & \left[ (gy'')' + \beta \left( y' - \frac{y}{1 + \alpha} \right) \right]_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzony tu bezwymiarowy parametr

$$(2.4) \quad \alpha = \frac{a}{l}$$

określa położenie bieguna, do którego zwrócona jest siła. Całkując dwukrotnie równanie różniczkowe (2.2) otrzymujemy

$$(2.5) \quad (1 - \varepsilon x)^n y'' + \beta y = C_1 + C_2 x,$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są dowolnymi stałymi całkowania. Wprowadzamy następnie nową zmienną zależną

$$(2.6) \quad v(x) = y(x) - \frac{C_1}{\beta} - \frac{C_2}{\beta} x.$$

Z równania (2.5) i z warunków brzegowych (2.3) otrzymujemy

$$(2.7) \quad (1 - \varepsilon x)^n v'' + \beta v = 0,$$

$$(2.8) \quad v(1) = 0, \quad v(0) - \alpha v'(0) = 0.$$

Całka ogólna równania (2.7) jest znana dla dowolnych wartości wykładnika  $n$  i wyraża się przez funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, rzędu  $\nu$ ,  $J_\nu$  i  $Y_\nu$ ,

$$(2.9) \quad v(x) = (1 - \varepsilon x)^{1/2} Z_\nu \left[ \frac{2}{2-n} \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon} (1 - \varepsilon x)^{\frac{2-n}{n}} \right],$$

$$Z_\nu(x) = A_1 J_\nu + A_2 Y_\nu, \quad \nu = \frac{1}{2-n}, \quad n \neq 2.$$

Dla  $n = 2$  i  $n = 4$  rozwiązania równania (2.7) wyrażają się przez funkcje elementarne i są podane dalej. Stałe całkowania  $A_1$  i  $A_2$  należy wyznaczyć korzystając z warunków brzegowych (2.8). Podstawiając (2.9) do (2.8) otrzymujemy układ dwóch jednorodnych równań liniowych na stałe  $A_1$  i  $A_2$ , który ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy wyznacznik tego układu jest równy zeru. Warunek ten pozwala obliczyć siłę krytyczną  $\beta$  w zależności od parametrów  $\varepsilon$  i  $\alpha$  z następującego równania uwikłanego

$$(2.10) \quad F(\beta, \varepsilon, \alpha) = \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha \varepsilon \right) [J_\nu(0)Y_\nu(1) - J_\nu(1)Y_\nu(0)] -$$

$$-\alpha [J'_\nu(0)Y_\nu(1) - J_\nu(1)Y'_\nu(0)] = 0.$$

W równaniu tym

$$Z'_\nu(1) = \frac{dZ_\nu}{dx} \Big|_{x=1}, \quad Z_\nu(1) = Z_\nu \left[ \frac{2}{2-n} \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon} (1 - \varepsilon)^{\frac{2-n}{n}} \right];$$

podobnie dla  $x = 0$ .

**2.2. Optimalizacja parametryczna.** Obliczenia przebiegają tu analogicznie do przedstawionych w pracy [2]; przyjmujemy, że powierzchnia przekroju poprzecznego jest związana z momentem bezwładności wzorem

$$(2.11) \quad A(x) = A_0 g^*(x),$$

w którym  $A_0$  oznacza pole powierzchni przekroju utwierdzonego, a wykładnik  $\kappa$  charakteryzuje kształt pręta i sposób wyoboczenia. Gdy  $\kappa = 1$ , pręt jest płasko-zbieżny i wyoboczenie następuje z płaszczyzny zbieżności, gdy  $\kappa = 0,5$  — pręt jest wszechstronnie równomiernie zbieżny (ostrosłup lub stożek), wreszcie gdy  $\kappa = 1/3$  — pręt jest płasko-zbieżny, lecz wyoboczenie zachodzi w płaszczyźnie zbieżności. Obliczamy objętość pręta

$$(2.12) \quad V = \frac{1}{\kappa n + 1} A_0 l \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon}$$

oraz znajdujemy stosunek objętości (2.12) i objętości pręta pryzmatycznego  $V^{(0)}$  o długości  $l$  i powierzchni przekroju  $A^{(0)}$

$$(2.13) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{1}{\kappa n + 1} \frac{A_0}{A^{(0)}} \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon}.$$

Żądamy teraz, aby badany pręt (o zbieżności  $\varepsilon$ ) przenosił tę samą siłę krytyczną, co pręt pryzmatyczny. Otrzymujemy stąd

$$(2.14) \quad \beta \frac{EJ_0}{\rho^2} = \beta^{(0)} \frac{EJ^{(0)}}{\rho^2}$$

lub

$$(2.15) \quad \frac{A_0}{A^{(0)}} = \left( \frac{J_0}{J^{(0)}} \right)^\kappa = \left( \frac{\beta^{(0)}}{\beta} \right)^\kappa.$$

Po podstawieniu (2.15) do (2.13) mamy

$$(2.16) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{1}{\kappa n + 1} \left( \frac{\beta^{(0)}}{\beta} \right)^\kappa \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon}.$$

Wynika stąd, że dla ustalonej wartości parametru  $\alpha$ , stosunek objętości zależy tylko od zbieżności pręta  $\varepsilon$  i należy się spodziewać, że dla pewnej wartości  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{opt}}$  będzie on najmniejszy. Zysk na materiale jest największy gdy

$$(2.17) \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V}{V^{(0)}} \right) = 0.$$

Ponieważ występująca we wzorze (2.16) siła krytyczna  $\beta^{(0)}$  jest tylko funkcją  $\alpha$  i nie zależy od  $\varepsilon$ , a siła krytyczna  $\beta$  jest określona równaniem przestępnym (2.10), więc po wykonaniu różniczkowania w (2.17) i wyrażeniu pochodnej  $\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon}$  przez pochodne cząstkowe funkcji  $F(\beta, \varepsilon, \alpha)$  (2.10) otrzymujemy

$$(2.18) \quad \kappa \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{(1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1} + (\kappa n + 1)\varepsilon(1 - \varepsilon)^{\kappa n} - 1}{\varepsilon^2} \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0,$$

$$F(\alpha, \beta, \varepsilon) = 0.$$

Jest to układ dwóch równań przestępnych dla poszukiwanego parametru zbieżności pręta  $\varepsilon_{\text{opt}}$  i siły krytycznej  $\beta$  w zależności od współczynnika  $\alpha$ . Jego rozwiązanie dla dowolnych wartości wykładnika  $n$  jest bez użycia maszyn cyfrowych praktycznie niewykonalne. Jednak przy pewnych wartościach  $n$  funkcje Bessela przechodzą w funkcje elemen-

tarne i ugięcie pręta  $v(x)$  wyraża się prostszym wzorem. W dalszym ciągu zajmujemy się tylko takimi przypadkami; jeden z nich posiada szczególne znaczenie praktyczne, bowiem prowadzi do optymalizacji w klasie prętów stożkowych.

**2.3. Przypadek szczególny  $n = 2$ .** Gdy  $n = 2$ , rozwiązaniem równania (2.7) jest funkcja

$$(2.19) \quad v(x) = (1 - \varepsilon x)^{1/2} \{ A_1 \sin[\gamma \ln(1 - \varepsilon x)] + A_2 \cos[\gamma \ln(1 - \varepsilon x)] \},$$

w której wprowadzono oznaczenie

$$(2.20) \quad \gamma = \left( \frac{\beta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} \right)^{1/2}.$$

Wykorzystanie warunków brzegowych (2.8) oraz obliczenie wyznacznika otrzymanych równań liniowych i jednorodnych na stałe  $A_1$  i  $A_2$  prowadzi do równania

$$(2.21) \quad F_1(\alpha, \beta, \varepsilon) = \operatorname{tg}[\gamma \ln(1 - \varepsilon)] - \frac{2\alpha\gamma\varepsilon}{2 + \alpha\varepsilon} = 0.$$

W szczególnych przypadkach równanie to przechodzi w znane rozwiązania uzyskane wcześniej; na przykład gdy  $\alpha \rightarrow \pm \infty$  (siła eulerowska ściskająca pręt wspornikowy niepryzmatyczny), siłę krytyczną wyznaczmy z równania przestępnego [9]

$$(2.22) \quad \operatorname{tg}[\gamma \ln(1 - \varepsilon)] - 2\gamma = 0,$$

a gdy  $\varepsilon = 0$  (pręt pryzmatyczny) otrzymujemy [9]

$$(2.23) \quad \operatorname{tg} \sqrt{\beta^{(0)}} + \alpha \sqrt{\beta^{(0)}} = 0.$$

Optymalną wartość parametru  $\varepsilon$  dla pręta równomiernie wszechstronnie zbieżnego ( $\kappa = 0,5$ ), a więc pręta o liniowo zmieniającej się powierzchni przekroju, obliczymy na podstawie (2.18) i (2.21) z układu równań

$$(2.24) \quad \begin{aligned} (2 - \varepsilon) \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} - 2\beta \frac{\partial F_1}{\partial \beta} &= 0, \\ F_1(\alpha, \beta, \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu równań nie będziemy się dalej zajmowali, natomiast zbadamy szczegółowo przypadek ważniejszy z praktycznego punktu widzenia, mianowicie optymalizację prętów stożkowych.

**2.4. Optymalizacja prętów stożkowych,  $n = 4$ ,  $\kappa = 0,5$ .** Przyjmując  $\kappa = 0,5$  i  $n = 4$ , a więc pręt równomiernie zbieżny o liniowo zmieniającej się długości boku lub średnicy, otrzymujemy z równania (2.7)

$$(2.25) \quad v(x) = A_1(1 - \varepsilon x) \sin \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon(1 - \varepsilon x)} + A_2(1 - \varepsilon x) \cos \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon(1 - \varepsilon x)}.$$

Podstawiając (2.25) do warunków brzegowych (2.8) oraz przyrównując wyznacznik główny układu równań na  $A_1$  i  $A_2$  do zera, dostajemy

$$(2.26) \quad F_2(\alpha, \beta, \varepsilon) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1 - \varepsilon} + \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\alpha} \sqrt{\beta} = 0.$$

Gdy  $\alpha \rightarrow \pm \infty$ , (2.26) przechodzi w znane równanie [9]

$$(2.27) \quad \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1-\varepsilon} + \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon} = 0.$$

Gdy  $\alpha = 0$  (siła eulerowska ściskająca pręt dwuprzegubowy), siła krytyczna jest równa  $\beta = (1-\varepsilon)^2 \pi^2$ , a gdy  $\varepsilon = 0$  — otrzymujemy (2.23).

Dobór parametru  $\varepsilon_{\text{opt}}$ , przy którym stosunek objętości pręta stożkowego do objętości pręta pryzmatycznego jest ekstremalny, przeprowadzamy na podstawie równań (2.18), w których przyjmujemy  $\kappa = 0,5$ ,  $n = 4$ ,  $F(\alpha, \beta, \varepsilon) = F_2(\alpha, \beta, \varepsilon)$

$$(2.28) \quad (3-3\varepsilon+\varepsilon^2) \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon} + 2(2\varepsilon-3)\beta \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1-\varepsilon} + \frac{\alpha}{1+\varepsilon\alpha} \sqrt{\beta} = 0.$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon}$  i  $\frac{\partial F_2}{\partial \beta}$  układ (2.28) możemy zapisać w postaci

$$(2.29) \quad \beta = \frac{\alpha^2(3-6\varepsilon+2\varepsilon^2) + \alpha(3-8\varepsilon+3\varepsilon^2) - \varepsilon(2-\varepsilon)}{\varepsilon(2-\varepsilon)^2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1-\varepsilon} + \frac{\alpha}{1+\varepsilon\alpha} \sqrt{\beta} = 0.$$

Układ powyższych równań rozwiązywano metodą graficzną; zakładano wartość parametru  $\alpha$  i obliczano z pierwszego równania (2.29) funkcję  $\beta = \beta(\varepsilon)$ . Funkcję tę wstawiano do drugiego równania (2.29), otrzymując w ten sposób jedno równanie przestępne o niewiadomej  $\varepsilon$ .

Gdy  $\alpha = 0$  i  $\alpha \rightarrow -1$ , rozwiązania uzyskano na drodze rozwinięcia wielkości  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  w odpowiednie szeregi potęgowe. Tak więc dla  $\alpha \rightarrow 0$  można parametr  $\varepsilon$  rozwinąć w szereg potęgowy względem  $\alpha$ . Z równań (2.29) i (2.23) otrzymujemy

$$(2.30) \quad \varepsilon = \frac{3}{2}\alpha - \frac{27}{8}\alpha^2 + \dots,$$

$$\beta = \pi^2(1-5\alpha+21\alpha^2 + \dots),$$

$$\sqrt{\beta^{(0)}} = \pi(1-\alpha+\alpha^2 + \dots).$$

Zysk na materiale, obliczony za pomocą wzoru (2.16), jest wobec tego równy

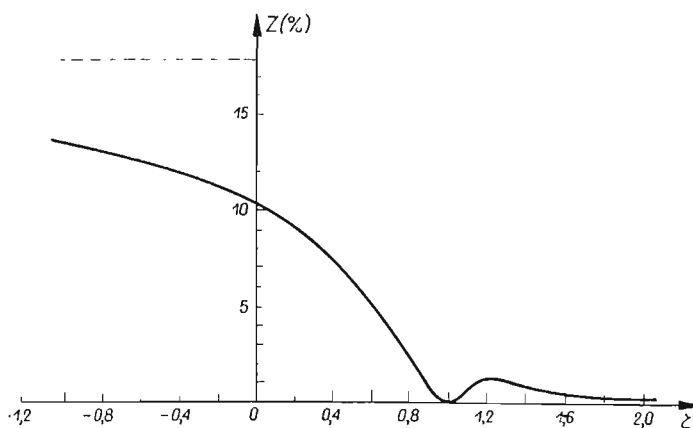
$$(2.31) \quad Z = 1 - \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{3}{4}\alpha^2 + \dots, \quad \text{gdy } \alpha \rightarrow 0.$$

W przypadku, gdy  $\alpha$  dąży do  $-1$  przez wartości mniejsze od  $-1$  okazuje się, że siła krytyczna dąży do zera. Rozwijamy tu parametry  $\alpha$  i  $\varepsilon$  na szeregi potęgowe względem  $\beta$

$$(2.32) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \dots, \quad \alpha = -1 + \alpha_1\beta + \dots,$$

które wstawione do równań (2.29) pozwalają wyznaczyć wartości  $\varepsilon_0 = 0,56574$  oraz

$$\frac{V}{V^{(0)}} = \frac{3 - 3\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2}{3\sqrt{1 - \varepsilon_0}} = 0,82087, \text{ a tym samym zysk na materiale } Z = 17,913\%$$



Rys. 2

Wyniki liczbowe przedstawiono w tablicy 1 i na rys. 2.

Tablica 1

$\zeta$	$\alpha$	$\varepsilon_{opt}$	$\beta_{opt}$	$\beta^{(0)}$	$Z(\%)$
$-\infty$	-1,000	0,56574	0,000	0,000	17,91
-20,000	-1,050	0,557	0,062	0,141	17,50
-10,000	-1,100	0,545	0,120	0,268	17,23
-5,000	-1,200	0,533	0,217	0,483	16,27
-2,000	-1,500	0,506	0,433	0,935	14,86
-1,000	-2,000	0,481	0,645	1,357	13,51
-0,500	-3,000	0,459	0,852	1,753	12,31
0,000	$\mp\infty$	0,4204	1,252	2,467	10,36
0,3333	2,000	0,374	1,809	3,367	8,21
0,4000	1,500	0,361	1,980	3,637	7,45
0,5000	1,000	0,337	2,31	4,120	6,38
0,6667	0,500	0,280	3,18	5,240	4,24
0,8333	0,200	0,185	4,97	7,044	1,61
0,9091	0,100	0,117	6,53	8,197	0,55
1,0000	0,000	0,000	$\pi^2$	$\pi^2$	0,00
1,1111	-0,100	-0,156	16,58	12,08	0,62
1,2500	-0,200	-0,187	21,12	14,36	1,18
1,4285	-0,300	-0,144	21,69	16,16	0,63
2,0000	-0,500	-0,0718	21,12	18,27	0,17
3,3333	-0,700	-0,0317	20,63	19,34	0,07
$+\infty$	-1,000	0,0000	20,1906	20,1906	0,00

Ponieważ funkcje  $\varepsilon_{opt}(\alpha)$ ,  $\beta_{opt}(\alpha)$ ,  $\beta^{(0)}(\alpha)$  i  $Z(\alpha)$  mają punkt nieciągłości dla  $\alpha = -1$ , więc przedstawiono je w zależności od parametru  $\zeta = 1/(1+\alpha)$ . Jak widać z wykresu, największy zysk na materiale otrzymujemy wtedy, gdy siła jest skierowana do bieguna położonego na przedłużeniu osi pręta, w niedużej odległości od jego swobodnego końca (dla  $\alpha < -1$ ). Wynosi on prawie 18% wobec 10% zysku dla siły eulerowskiej ( $\alpha \rightarrow \pm\infty$ ).

### 3. Optymalne kształtowanie prętów ściskanych w zakresie sprężysto-plastycznym

**3.1. Rozwiązanie ogólne.** Obecnie znajdziemy optymalny kształt pręta jednostronnie utwierdzonego, ściskanego siłą skierowaną do bieguna w przypadku, gdy siła krytyczna powoduje w całym pręcie naprężenia większe od granicy proporcjonalności. Dalsze rozważania oprzemy na prostej teorii wybooczenia sprężysto-plastycznego podanej przez SHANLEYA [8]. W odniesieniu do stateczności prętów ściskanych teoria ta sprowadza się do zastąpienia modułu Younga  $E$  w równaniu linii ugięcia dla zakresu sprężystego przez moduł styczny  $\bar{E} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ .

Równanie linii ugięcia pręta obciążonego w sposób przedstawiony na rys. 1 jest więc następujące:

$$(3.1) \quad (\bar{E}Jw'')'' + Pw'' = 0, \quad \left( w' = \frac{dw}{d\xi} \right).$$

Jeśli w dalszym ciągu wprowadzimy oznaczenia:

$$(3.2) \quad y = \frac{w}{l}, \quad x = \frac{\varepsilon}{l}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{EJ_0}, \quad g(x) = \frac{J(x)}{J_0}, \quad \varphi(x) = \frac{A(x)}{A_0} = g^z$$

$$f(x) = \frac{\bar{E}(x)}{E},$$

w których  $A_0, J_0, E$  oznaczają odpowiednio powierzchnię przekroju, moment bezwładności przekroju i moduł Younga w pewnym, na ogół dowolnie wybranym punkcie pręta  $x = x_0$ , to równanie (3.1) możemy zapisać w postaci

$$(3.3) \quad [f(x)g(x)y'']'' + \beta y'' = 0, \quad \left( y' = \frac{dy}{dx} \right).$$

Całkując (3.3) dwukrotnie i wprowadzając nową zmienną zależną  $v(x)$  określoną wzorem (2.6), otrzymujemy

$$(3.4) \quad f(x)g(x)v'' + \beta v = 0,$$

lub

$$(3.5) \quad G(\varphi) + \frac{v}{\varphi''} = 0,$$

gdzie funkcję  $G(\varphi)$  zdefiniowano następująco:

$$(3.6) \quad G(\varphi) = \frac{1}{\beta} f_1(\varphi)g(\varphi) = \frac{1}{\beta} \varphi^{1/z} f_1(\varphi).$$



W funkcji  $G(\varphi)$  zawarta jest zależność od zmiennej  $x$  poprzez zależność od funkcji  $\varphi(x)$  charakteryzującej powierzchnię przekroju poprzecznego pręta. W sposób istotny zależy ona od przyjętego prawa fizycznego  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , a więc mnożnika  $f_1(\varphi)$  w równaniu (3.6). Problem optymalizacji polega w tym przypadku na znalezieniu takiej funkcji  $g(x)$  lub  $\varphi(x)$ , aby objętość pręta

$$(3.7) \quad V = A_0 l \int_0^1 \varphi(x) dx = A_0 l \int_0^1 g^* dx$$

była minimalna.

Mamy tu zatem zagadnienie wariacyjne polegające na poszukiwaniu ekstremum funkcjonału (3.7) z warunkiem pobocznym w postaci równania różniczkowego (3.4) lub (3.5). Z równania (3.5) wyznaczamy funkcję  $\varphi$  w zależności od argumentu  $(-v/v'')$  i wstawiamy do (3.7)

$$(3.8) \quad V = A_0 l \int_0^1 \psi \left( -\frac{v}{v''} \right) dx,$$

gdzie  $\psi$  jest funkcją odwrotną do  $G(\varphi)$ .

Opierając się na metodzie CZENCOWA [1] przedstawionej również w pracy [3] otrzymujemy (po rozpisaniu równania Eulera-Lagrange'a)

$$(3.9) \quad \begin{aligned} vt' - v't &= C, \\ t &= \dot{\psi} \frac{v}{v''^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\left(-\frac{v}{v''}\right)}, \end{aligned}$$

gdzie  $C$  jest pewną stałą.

Równanie (3.9) jest rzędu czwartego i dwa warunki brzegowe (2.8) nie pozwalają na wyznaczenie wszystkich stałych całkowania. Ponieważ jedna ze stałych może być dowolna, więc pozostaje do wyznaczenia tylko jedna stała. Odpowiada to zagadnieniu wariacyjnemu o jednym stopniu swobody na jednym końcu przedziału. Odpowiedni w naszym przypadku warunek optimum (wobec  $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$ ) przybiera postać [7, 11]

$$(3.10) \quad - \left[ \left( \psi_{v''} - \frac{d}{dx} \psi_{v'''} \right)_0 \delta v_0 + (\psi_{v''})_0 \delta v'_0 \right] + \left[ \left( \psi_{v''} - \frac{d}{dx} \psi_{v'''} \right)_1 \delta v_1 + (\psi_{v''})_1 \delta v'_1 \right] = 0.$$

Wskaźniki 0 i 1 we wzorze (3.10) odnoszą się do wartości funkcji lub wariacji dla  $x = 0$  i  $x = 1$ . Obliczając odpowiednie pochodne cząstkowe  $\left( \psi_{v''} = 0, \quad \psi_{v'''} = \dot{\psi} \frac{v}{v''^2} = t \right)$  i korzystając z równania (3.9) dostajemy równanie

$$(3.11) \quad (C + v'_0 t_0) \frac{\delta v_0}{v_0} - (C + v'_1 t_1) \frac{\delta v_1}{v_1} - t_0 \delta v'_0 + t_1 \delta v'_1 = 0,$$

które pozwala obliczyć nieokreśloną dotychczas stałą  $C$ . Z uwagi na dowolność stałego mnożnika w funkcji  $v(x)$  możemy przyjąć  $v(0) = 1$ , czyli  $\delta v_0 = 0$ , a z warunków brzegowych (2.8) wynika ponadto  $\delta v'_0 = 0$  i  $\delta v_1 = 0$ . Iloraz  $\delta v_1/v_1$  musimy zastąpić przez  $\delta v'_1/v'_1$

(stosując regułę de l'Hospitala) ponieważ zarówno  $\delta v_1 = 0$ , jak i  $v_1 = 0$ . Jak więc wynika z równania (3.11), stała  $C$  musi być równa zero, gdy siła ściskająca jest skierowana do bieguna. Dowód jest ważny dla dowolnego, dostatecznie regularnego prawa fizycznego  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . Wiedząc, że stała  $C$  jest równa zero możemy scałkować równanie (3.9) i napisać je w postaci

$$(3.12) \quad v'^2 = C_1 \dot{\psi}, \quad C_1 \text{ — dowolna stała}$$

lub też, w ślad za KRZYSIEM [6], wyrazić rozwiązanie w postaci funkcji odwrotnej  $x = x(\varphi)$ , w zależności od parametru określającego przekrój poprzeczny oraz przekształcić równania (3.12) i (3.5) do postaci

$$(3.13) \quad x_\varphi'' + \frac{3GG''^2 - 2GG'G'''}{2(GG'' - 2G'^2)G'} x_\varphi' + \frac{2G'}{GG'' - 2G'^2} x_\varphi'^3 = 0.$$

Oczywiście charakterystyka materiału wpływa na efektywność rozwiązania równania (3.12) lub (3.13); spełniając postulat prostoty przyjmiemy za KRZYSIEM [6] taki model ciała, dla którego funkcja  $G(\varphi)$  jest liniowa (a tym samym funkcja odwrotna  $\psi$  jest również liniowa)

$$(3.14) \quad G(\varphi) = \frac{1}{\beta}(M + N\varphi), \quad \psi\left(-\frac{v}{v''}\right) = -\frac{M}{N} + \frac{\beta}{N}\left(-\frac{v}{v''}\right),$$

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{N} = \text{const.}$$

Tutaj  $M, N$  — pewne stałe.

Porównując (3.6) i (3.14) otrzymujemy następujący charakter zmienności modułu Younga:

$$(3.15) \quad f_1(\varphi) = \frac{M + N\varphi}{\varphi^{1/\kappa}},$$

a rozwiązując równanie (3.12) i korzystając z warunków brzegowych (2.8) znajdujemy funkcję linii ugięcia pręta

$$(3.16) \quad v(x) = C_2 \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}x - x^2 \right), \quad C_2 \text{ — dowolna stała.}$$

Bezwymiarowa powierzchnia przekroju poprzecznego jest tu równa

$$(3.17) \quad \varphi(x) = \frac{\beta}{N} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}x - x^2 \right) - \frac{M}{\beta} \right].$$

Przyjmując, że powierzchnia przekroju utwierdzonego jest równa  $A_0$ , czyli że  $\varphi(0) = 1$ , otrzymujemy z (3.17) równanie określające siłę krytyczną  $\beta$  w zależności od położenia bieguna oraz stałych  $M$  i  $N$  (które również zależą od  $\beta$ )

$$(3.18) \quad \beta \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} - (M + N) = 0.$$

Przejdziemy obecnie do przedstawienia rozwiązań szczegółowych w trzech przypadkach:  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 1/2$  i  $\kappa = 1/3$ .

3.2. Pręt płasko-zbieżny,  $\kappa = 1$ . Sposób zmiany modułu Younga jest tu następujący

$$(3.19) \quad f_1(\varphi) = \frac{M + N\varphi}{\varphi};$$

jest to zależność od powierzchni przekroju  $\varphi$ . Jak łatwo sprawdzić, wzór ten otrzymujemy, gdy zależność  $\bar{E}$  od  $\sigma$  jest liniowa

$$(3.20) \quad \bar{E} = E \frac{Q - \sigma}{Q - S};$$

$S$  oznacza tu granicę proporcjonalności,  $Q$  — granicę plastyczności,  $E$  — moduł Younga.

Wzór (3.20) prowadzi do następującej zależności  $\sigma$  od  $\varepsilon$

$$(3.21) \quad \sigma = Q - (Q - S) \exp \left( - \frac{E}{Q - S} \varepsilon + \frac{S}{Q - S} \right).$$

Podstawiając w (3.20),  $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0 \varphi}$  oraz  $P = \beta \frac{E J_0}{l^2}$ , mamy

$$(3.22) \quad f_1(\varphi) = \frac{\varphi - \beta \delta}{\varphi} \delta_1, \quad \text{gdzie } \delta = \frac{E J_0}{Q A_0 l^2}, \quad \delta_1 = \frac{Q}{Q - S}.$$

Z porównania (3.22) i (3.19) obliczamy stałe  $M$  i  $N$ ,

$$(3.23) \quad M = -\beta \delta \delta_1, \quad N = \delta_1,$$

a ze wzoru (3.18) wyznaczamy siłę krytyczną

$$(3.24) \quad P_k = \frac{2\delta_1}{2\delta\delta_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}} \frac{E J_0}{l^2}.$$

Kształt pręta jest wobec tego opisany równaniem

$$(3.25) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{1}{\alpha + 2(1 + \alpha)\delta\delta_1} x - \frac{1 + \alpha}{\alpha + 2(1 + \alpha)\delta\delta_1} x^2.$$

Przykład 1. Siła eulerowska dla pręta jednostronnie utwierdzonego,  $\alpha \rightarrow \pm\infty$ ;

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{1 + 2\delta\delta_1} x^2, \quad \beta_k = \frac{2\delta_1}{1 + 2\delta\delta_1}, \quad v(x) = C_2(1 - x^2).$$

Przykład 2. Siła eulerowska dla pręta dwuprzegubowego,  $\alpha = 0$ ;

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2\delta\delta_1} x - \frac{1}{2\delta\delta_1} x^2, \quad \beta_k = \frac{1}{\delta}, \quad v(x) = C_2 x(1 - x).$$

Wzory powyższe nie są słuszne dla  $-1 \leq \alpha < 0$ , gdy biegun do którego zwrócona jest siła leży w obrębie pręta. Linia ugięcia musiałaby się tu składać z dwóch odcinków parabol o przeciwnych krzywiznach (podobnie jak w pracy [3]). Poza tym zakres ważności rozwiązań jest ograniczony warunkiem, aby cały pręt znajdował się w stanie sprężysto-plastycznym, a więc aby naprężenia ściskające wszędzie były większe od  $S$ . Proste obli-

czenia prowadzą do wniosku, że przekrój maksymalny w przypadku gdy  $0 \leq \alpha < \infty$  jest równy

$$(3.26) \quad A_{\max} = A_0 \beta \left[ \delta + \frac{1}{\delta_1} \frac{(2\alpha + 1)^2}{8(1 + \alpha)^2} \right].$$

Z warunku  $\frac{P_k}{A_{\max}} \geq S$  otrzymujemy

$$(3.27) \quad \frac{h_0}{l} \geq \frac{1 + 2\alpha}{2(1 + \alpha)} \sqrt{\frac{6S}{E}},$$

gdzie  $h_0$  oznacza wysokość przekroju poprzecznego w miejscu utwierdzenia. Natomiast, gdy siła działa w stronę bieguna, którego położenie jest wyznaczone przez nierówność:  $-\infty < \alpha < -1$ , otrzymujemy

$$(3.28) \quad \frac{h_0}{l} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{6S}{E}}.$$

**3.3. Pręt wszechstronnie-równomiernie zbieżny,  $\kappa = 0,5$ .** W tym niewątpliwie najważniejszym praktycznie przypadku okazuje się, że wzór Johnsona-Ostenfelda linearyzuje funkcję  $G(\varphi)$ . Łatwo się można o tym przekonać przyjmując  $\sigma = P/A$ ,  $P = \beta EJ_0/l^2$

$$(3.29) \quad \bar{E} = E \frac{(Q - \sigma)\sigma}{(Q - S)S} = E \frac{(QA_0\varphi - P)P}{A_0^2\varphi^2(Q - S)S} = E \frac{\varphi - \beta\delta}{\varphi^2} \beta\delta_1,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(3.30) \quad \delta = \frac{EJ_0}{QA_0l^2}, \quad \delta_1 = \frac{EJ_0}{SA_0 \left(1 + \frac{S}{Q}\right) l^2}.$$

Porównując (3.29) i (3.15) znajdujemy stałe  $M$  i  $N$

$$(3.31) \quad M = -\beta^2 \delta \delta_1, \quad N = \beta \delta_1,$$

a z równania (3.18) wyznaczamy siłę krytyczną

$$(3.32) \quad \beta_k = \frac{2(1 + \alpha)\delta_1 - \alpha}{2(1 + \alpha)\delta\delta_1}.$$

Kształt pręta opisany jest tu wzorem

$$(3.33) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{1}{2(1 + \alpha)\delta_1} x - \frac{1}{2\delta_1} x^2.$$

**Przykład 1.** Siła eulerowska dla pręta jednostronnie utwierdzonego,  $\alpha \rightarrow \pm\infty$ ;

$$\varphi = 1 - \frac{1}{2\delta_1} x^2, \quad \beta_k = \frac{2\delta_1 - 1}{2\delta\delta_1}, \quad v(x) = C_2(1 - x^2).$$

**Przykład 2.** Siła eulerowska dla pręta dwuprzegubowego,  $\alpha = 0$ ;

$$\varphi = \frac{1}{\delta_1} \left( \delta_1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^2 \right), \quad \beta_k = \frac{1}{\delta}, \quad v(x) = C_2 x(1 - x).$$

Przykład 3. Siła skierowana do bieguna,  $\alpha = 1/3$ . Przyjmujemy pręt o długości  $l = 100$  cm i powierzchni kwadratowego przekroju utwierdzonego  $A_0 = 25$  cm<sup>2</sup>, wykonany z materiału dla którego  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>,  $S = 1600$  kG/cm<sup>2</sup>,  $Q = 2400$  kG/cm<sup>2</sup>. Dla powyższych danych otrzymujemy

$$\delta = 0,1885, \quad \delta_1 = 0,821, \quad \varphi = 1 + 0,456x - 0,608x^2,$$

$$\beta_k = 4,65, \quad v(x) = C_2 \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - x^2 \right).$$

Kształt pręta jest bardzo zbliżony do pryzmatycznego.

Podobnie jak w p. 3.2, otrzymane wzory nie są ważne dla  $-1 \leq \alpha < 0$ , a ponadto zakres ich ważności jest ograniczony przez warunki

$$(3.34) \quad \frac{A_0}{l^2} \geq \frac{S \left[ \frac{S}{Q} + 4\alpha(1+\alpha) \right]}{8\gamma(1+\alpha)^2 E} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \alpha < \infty,$$

albo

$$\frac{A_0}{l^2} \geq \frac{1}{2(1+\alpha)} \frac{S}{\gamma E} \quad \text{dla} \quad -\infty < \alpha < -1,$$

w których  $\gamma$  charakteryzuje kształt przekroju; dla kwadratu  $\gamma = \frac{1}{12}$ , a dla koła  $\gamma = \frac{1}{4\pi}$  ( $J_0 = \gamma A_0^2$ ).

3.4. Pręt płasko-zbieżny,  $\kappa = 1/3$ . Funkcja  $G(\varphi)$  jest w tym przypadku liniowa, gdy prawo zmiany modułu Younga jest następujące:

$$(3.35) \quad \bar{E} = E \frac{(Q-\sigma)\sigma^2}{(Q-S)S^2} = E \frac{\varphi - \beta\delta}{\varphi^3} \beta^2 \delta_1^2,$$

gdzie

$$(3.36) \quad \delta = \frac{EJ_0}{QA_0 l^2}, \quad \delta_1 = \frac{EJ_0}{SA_0 l^2 \sqrt{1 - \frac{S}{Q}}}.$$

Podobnie jak poprzednio obliczamy stałe  $M$  i  $N$ ,

$$(3.37) \quad M = -\beta^3 \delta \delta_1^2, \quad N = \beta^2 \delta_1^2,$$

siłę krytyczną

$$(3.38) \quad \beta_k = \frac{1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\delta}{\delta_1^2} \frac{\alpha}{1+\alpha}}}{2\delta}$$

oraz kształt pręta

$$(3.39) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{\delta}{(1+\alpha)\delta_1^2 \left( 1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\delta}{\delta_1^2} \frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)} x - \frac{\delta}{\delta_1^2 \left( 1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\delta}{\delta_1^2} \frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)} x^2.$$

Zakres ważności powyższych wzorów jest określony przez warunki, zapewniające istnienie naprężeń większych od granicy sprężystości  $S$  w całym przecie,

$$(3.40) \quad \frac{h_0}{l} \geq \frac{\left[ \frac{S}{Q} + 4\alpha(1+\alpha) \right]}{1+\alpha} \sqrt{\frac{3S}{2E[1+4\alpha(1+\alpha)]}} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \alpha < \infty,$$

albo

$$\frac{h_0}{l} \geq \sqrt{\frac{6S}{E} \frac{\alpha}{1+\alpha}} \quad \text{dla} \quad -\infty < \alpha < -1.$$

Rozwiązania nie są również ważne w przedziale  $-1 \leq \alpha < 0$ .

Otrzymane w drugiej części pracy rozwiązania mają bardzo prostą postać dzięki odpowiedniemu przyjęciu charakterystyk materiału  $\sigma(\varepsilon)$ ; w p. 3.3 jest to prawo Johnsona-Ostenfelda, w p. 3.2 i 3.4 są to inne prawa, które jednak (jak to wykazał KRZYŚ [6]) w wielu przypadkach mogą dobrze aproksymować wykresy materiałów rzeczywistych. Wadą uzyskanych rozwiązań jest to, iż są one ważne tylko wtedy, gdy cały pręt znajduje się w stanie sprężysto-plastycznym, czyli naprężenia przekraczają granicę proporcjonalności  $S$ . Niestety, otrzymanie rozwiązań opisujących optymalny kształt pręta znajdującego się częściowo w stanie sprężysto-plastycznym, a częściowo w stanie sprężystym, napotyka niemałe trudności, głównie z uwagi na dużą liczbę warunków zszycia na granicy zakresów.

Na zakończenie składam podziękowanie prof. dr inż. MICHAŁOWI ŻYCZKOWSKIEMU za pomoc w wykonaniu tej pracy.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Н. Г. ЧЕНЦОВ, *Стойки наименьшего веса*, Труды ЦАГИ, 265, 1936.
2. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności*. Prace Komisji Mechaniki, Oddz. Krak. PAN (w druku).
3. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. Inż. 2, 17 (1969), 299-329.
4. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Pewna metoda tzw. parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego*, Rozpr. Inż. 4, 11 (1963), 643-666.
5. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Klasyfikacja problemów kształtowania wytrzymałościowego*, Czas. Techn., 2, 68 (1963), 1-3.
6. W. KRZYŚ, *Optymalne kształtowanie z uwagi na stateczność ściskanych słupów cienkościennych o profilu zamkniętym*, Mechanika, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, nr 4, 1967.
7. M. ŁAWRENTIEW, L. LUSTERNIK, *Rachunek wariacyjny*, Warszawa 1954.
8. F. R. SHANLEY, *Inelastic column theory*, J. Aeron. Sci. 12, 13 (1946), 678.
9. S. P. TIMOSZENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
10. M. ŻYCZKOWSKI, *W sprawie doboru optymalnego kształtu prętów osiowo ściskanych*, Rozpr. Inż. 4, 4 (1956), 441-456.
11. M. ŻYCZKOWSKI, A. GAJEWSKI, *Optimal structural design in non-conservative problems of elastic stability*, Proc. IUTAM Symposium on Instability of Continuous Systems, Herrenalb/Karlsruhe 1969 (w druku).

## Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ СТЕРЖНЯ  
СЖИМАЕМОГО ПОЛЯРНО НАПРАВЛЕННОЙ СИЛОЙ

В работе дается решение двух задач: 1) выбора оптимальной формы упругих стержней с определенным образом изменяющимся поперечным сечением сжимаемых силой направленной к неподвижному полюсу, 2) выбора оптимальной формы сжимаемых, направленной к полюсу силой, стержней работающих в упруго-пластической области. В первой части работы основное внимание уделяется оптимизации конических стержней, рассчитан параметр определяющий оптимальный раствор конуса в функции положения полюса, приводится соответствующий ему выитрыш на материале. Во второй части работы найдены абсолютно оптимальные (в смысле вариационного исчисления) формы стержней сжимаемых в упруго-пластической области. Благодаря соответствующим образом выбранной характеристике материала  $\sigma(\epsilon)$ , полученные решения отличаются простотой. В случае всесторонне равномерно сходящихся стержней, формула сводится к формуле Джонсона-Остенфельда.

## Summary

## CERTAIN PROBLEMS OF OPTIMUM DESIGN OF A ROD COMPRESSED BY A POLAR FORCE

Two problems are solved in the paper: 1) — optimum design of elastic rods compressed by a force directed toward a fixed point, the general law of variation of the cross-section of the rod being prescribed; 2) — optimum design of a similar rod working in elastic-plastic range.

In the first part of the paper main attention is paid to the optimization of conical rods; optimum convergence of the cone is expressed as a function of position of the pole, and the corresponding material gain is given. In the second part of the paper absolute optimum (based on the variational calculus) shapes of elastic-plastic rods under compression are found. The solutions have a rather simple form owing to the appropriate assumption of the stress-strain law. In the case of uniformly converging rods the problem reduces to Johnson-Ostenfeld formula.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1969 r.*

---