MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 8 (1970)

O PEWNEJ MOŻLIWOŚCI DOWODU TWIERDZEŃ O STABILNOŚCI I NIESTABILNOŚCI RUCHU OKRESOWEGO

WŁODZIMIERZ GAWROŃSKI (GDAŃSK)

Ważniejsze oznaczenia

Ω funkcja następstwa,

$[t_a, t_b]$ przedział domknięty,

$$\operatorname{colon}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ macierz kolumnowa,

E_n n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa,

$\in$ symbol przynależności elementu do zbioru,

$\varrho(x)$ norma wektora x,

$\varrho(x', x'') = \varrho(x'-x'')$ wzajemna odległość punktów x' i x'',

$K[x_0, r]$ kula domknięta o środku x_0 i promieniu r

L hiperpowierzchnia bez styku w przestrzeni E_n (podprzestrzeń E_n).

W pracy podano nową metodę dowodu twierdzeń dotyczących stabilności i niestabilności ruchu okresowego. Dowód przeprowadzono wykorzystując twierdzenie o odwzorowaniu zwężającym Banacha.

Celem pracy jest wskazanie nowych możliwości wynikających z zastosowania metod analizy funkcjonalnej w teorii układów dynamicznych. Niektóre możliwości wykorzystania twierdzenia o odwzorowaniu zwężającym Banacha w tym dziale mechaniki wskazał HOLTZMAN [1].

Do badania układów nieliniowych, w szczególności o charakterystykach odcinkowo liniowych, stosowana jest metoda odwzorowań punktowych Poincaré–Andronowa [2].

Przeanalizujmy układ, którego stan dynamiczny opisany jest współrzędnymi x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Współrzędne te określają wektor x, nazywany wektorem fazowym układu.

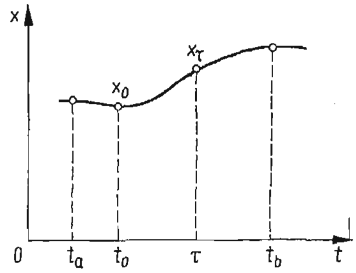
Przyjmujemy następujące określenie ([3], s. 19): wektorem fazowym układu nazywamy każdy wektor $x = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ o następujących własnościach:

1) składowe $x_i(t)$ charakteryzują stan dynamiczny układu w chwili t,

2) dla danego wymuszenia $u(t)$ każdy stan początkowy $x(t_0) = x_0$ w sposób jednoznaczny wyznacza wartości $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ dla wszystkich t, przy czym spełnione są rów-

ności: $x(t, \tau, x_\tau) = x(t, t_0, x_0)$ jeżeli $x_\tau = x(\tau, t_0, x_0)$ dla wszystkich t, τ i t_0 z przedziału $[t_a, t_b]$ (rys. 1).

Równania różniczkowe określone w tym przedziale spełniają warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań. Współrzędne x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nazywamy współrzędnymi fa-

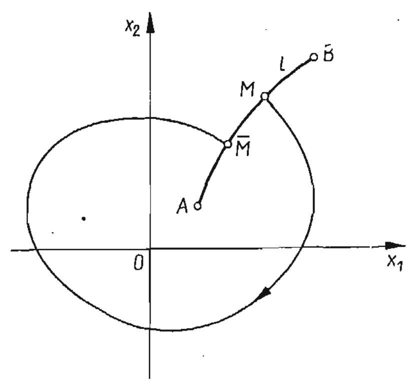


Rys. 1

zowymi układu. W przypadku $n = 2$ współrzędne x_1 i x_2 wyznaczają płaszczyznę fazową (rys. 2).

Niech dany będzie na płaszczyźnie fazowej łuk bez styku [4]. Pod pojęciem *łuk bez styku* rozumiemy gładką krzywą l, gdy:

1. Na krzywej l nie ma ani jednego punktu osobliwego.
2. Ani w jednym punkcie krzywa nie ma styku.



Rys. 2

Sformułowanie *łuk nie ma styku w punkcie M* oznacza, że trajektoria przechodząca przez punkt M nie jest styczna do łuku l.

Trajektoria wychodząca z punktu M łuku bez styku l (rys. 2) przecina łuk l w punkcie $\bar{M}$ (w przypadku gdy nie przecina łuku l, mówimy, że punkt M nie ma następnego na tym łuku). Położenie punktu M na łuku l możemy jednoznacznie określić za pomocą jednej zmiennej niezależnej s (zmienną tą może być np. odległość M od końca łuku A), Trajektoria fazowa wyznacza wzajemną zależność między punktami M i $\overline{M}$ łuku bez styku, gdyż przez każdy punkt nieosobliwy płaszczyzny fazowej przechodzi tylko jedna trajektoria. Zależność tę zapiszemy w postaci

(1)
$$\overline{M} = TM,$$

przy czym T jest odwzorowaniem punktu M w $\overline{M}$.

Jeżeli istnieje punkt M^* na łuku l taki, że

$$M^* = TM^*,$$

to ruch opisywany przez trajektorię przechodzącą przez punkt M^* jest okresowy (punkty M i $\overline{M}$ pokrywają się).

W postaci analitycznej zależność (1) zapisujemy następująco

$$\bar{s} = \Omega(s).$$

Funkcję $\Omega(s)$ nazywamy funkcją następstwa ([4], s. 90, [5], s. 641).

W przypadku ruchu okresowego mamy

$$s^* = \Omega(s^*).$$

Jest to warunek konieczny i dostateczny okresowości ruchu.

Można wykazać [6], że warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności ruchu okresowego jest

$$\left|\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)_{s=s^*}\right| < 1.$$

Odwrotnie, gdy

$$\left|\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)_{s=s^*}\right| > 1,$$

cykl jest niestabilny.

Zakładamy, że stan dynamiczny układu całkowicie i jednoznacznie opisuje n współrzędnych stanu. Współrzędne te wyznaczają przestrzeń fazową n-wymiarową E_n. Analogicznie do pojęcia łuku bez styku na płaszczyźnie fazowej przyjmujemy określenie hiperpowierzchni bez styku L w przestrzeni fazowej E_n. Jest to gładka powierzchnia, $n-1$ wymiarowa, na której nie ma ani jednego punktu osobliwego i w żadnym punkcie powierzchnia ta nie ma styku.

Niech dany będzie na hiperpowierzchni bez styku L, w przestrzeni E_n punkt M_0. Współrzędne tego punktu wyznaczają wektor fazowy $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$. Niech trajektoria fazowa wychodząca z tego punktu «przebija» hiperpowierzchnię bez styku L w punkcie następnym M_1, następnie w punkcie M_2 itd. Otrzymujemy ciąg punktów

(2)
$$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots,$$

przy czym każdy następny punkt ciągu (2) wyznaczony jest poprzez poprzedzający go zależnością

$$\overline{M} = TM.$$

Kreską u góry oznaczono punkt następny po M, T jest symbolem odwzorowania punktu M w punkt $\bar{M}$.

Zależność między współrzędnymi punktów M i $\bar{M}$ określa relacja

$$\bar{s} = \Omega(s), \tag{3}$$

$$\bar{s} = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{n-1}\}, \quad s = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby ruch wyżej zdefiniowanego układu był okresowy, jest istnienie takiego punktu s^*, że

$$s^* = \Omega(s^*), \quad s^* = \{s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{n-1}^*\}. \tag{4}$$

Dla określenia stabilności punktu stałego odwzorowania M^* o współrzędnych $s^* = \{s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{n-1}^*\}$ rozpatrzmy ciągi punktów M w obszarze bliskim punktowi stałego odwzorowania M^*. W ciągu (2) każdy punkt następny wyznaczony jest poprzez poprzedzający za pomocą funkcji następstwa (3).

Definicja 1. Punkt stałego odwzorowania M^* jest stabilny, jeżeli istnieje takie otoczenie tego punktu

$$\varrho(s, s^*) \leqslant \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0, \tag{5}$$

że wszystkie ciągi (2) z wyrazem początkowym M_0 należącym do otoczenia (5) są zbieżne do granicy M^*.

Definicja 2. Punkt stałego odwzorowania M^* jest niestabilny, jeżeli w dowolnie małym otoczeniu tego punktu

$$\varrho(s, s^*) \leqslant \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 > 0 \tag{6}$$

znajdzie się choćby jeden ciąg (2) z wyrazem początkowym należącym do obszaru (6), który nie jest zbieżny do granicy M^*.

Przy założeniu, że istnieją pochodne funkcji następstwa w otoczeniu punktu M^*, zbudujmy macierz A

$$A = [a_{ik}], \tag{7}$$

gdzie

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s_k}\right)_{s=s^*}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{8}$$

a więc mamy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_{n-1}} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Omega_{n-2}}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_{n-2}}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_{n-2}}{\partial s_{n-1}} \\ \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \end{bmatrix}_{s=s^*}.$$

T w i e r d z e n i e 1 [2]. Punkt s^* spełniający równość (4) jest stabilny w sensie Def. 1 jeżeli moduły pierwiastków wielomianu charakterystycznego λ_i macierzy A są mniejsze od jedności

(9) $$|\lambda_1| < 1, \ |\lambda_2| < 1, \ldots, |\lambda_{n-1}| < 1.$$

Dowód. Konieczność. Weźmy jako otoczenie punktu s kulę domkniętą K_1

$$K_1 = K[s^*, \varepsilon_1].$$

W myśl podanej definicji punkt s^* jest stabilny, jeżeli odwzorowanie (3) na obszarze K_1 jest odwzorowaniem zwężającym ([7], s. 54), przy czym na mocy twierdzenia Banacha ([7], s. 54) w obszarze tym znajduje się tylko jeden punkt stałego odwzorowania.

Odwzorowanie (3) określone na obszarze metrycznym K_1 nazywamy zaś zwężającym, jeżeli są spełnione warunki

(10) $$\bar{s} = \Omega(s); \quad \bar{s} \in K_1$$

i dla dowolnych s', s'' należących do obszaru K_1 spełniona jest nierówność

(11) $$\varrho(\bar{s}', \bar{s}'') \leqslant \alpha\varrho(s', s''),$$

gdzie

$$0 < \alpha < 1.$$

Przyjmując w związku (11) $s'' = s^*$ oraz oznaczając $s' = s$, otrzymujemy

$$\varrho(\bar{s}, s^*) \leqslant \alpha\varrho(s, s^*),$$

lecz

$$\varrho(\bar{s}, s^*) = \varrho(\bar{s} - s^*) = \varrho(\Delta\bar{s}),$$

$$\varrho(s, s^*) = \varrho(s - s^*) = \varrho(\Delta s),$$

a więc mamy

(12) $$\varrho(\Delta\bar{s}) \leqslant \alpha\varrho(\Delta s),$$

gdzie

$$\Delta\bar{s} = \bar{s} - s^*, \quad \Delta s = s - s^*, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Założyliśmy, że na obszarze K_1 funkcja (3) jest ciągła i różniczkowalna, rozwijamy więc ją w punkcie s^* w szereg Taylora. Otrzymujemy

(13) $$\bar{s} = s^* + A(s - s^*) + r.$$

Zgodnie z wyżej przyjętymi oznaczeniami związek (13) przyjmie postać

$$\Delta\bar{s} = A\Delta s + r,$$

gdzie $\Delta\bar{s} = \text{colon}\,(\Delta\bar{s}_1, \Delta\bar{s}_2, \ldots, \Delta\bar{s}_{n-1})$, $\Delta s = \text{colon}\,(\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_{n-1})$, A — macierz kwadratowa rzędu $n-1$ liniowych współczynników, r — składowe rzędu drugiego i wyższych rzędów rozkładu (3) w szereg Taylora. Jeżeli otoczenie K_1 jest dostatecznie małe, wówczas $r \approx 0$ i wobec tego mamy

(14) $$\Delta\bar{s} \doteq A\Delta s,$$

gdzie macierz A zdefiniowana jest związkami (7) i (8).

Z (12) i (14) otrzymujemy

(15) $$\varrho(A\Delta s) \leqslant \alpha\varrho(\Delta s).$$

Przyjmując za bazę podprzestrzeni L $n-1$ niezależnych wektorów własnych $\Delta s^{(i)}$, wektor Δs przedstawimy w postaci

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Delta s^{(i)},$$

gdzie b_i są składowymi wektora Δs.

Mamy stąd

$$\varrho(A\Delta s) = \varrho\Big(A\sum_{i=1}^{n-1} b_i\Delta s^{(i)}\Big) = \varrho\Big(\sum_{i=1}^{n-1} Ab_i\Delta s^{(i)}\Big) = \varrho\Big(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\lambda_i\Delta s^{(i)}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \max_i|\lambda_i|\,\varrho\Big(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\Delta s^{(i)}\Big) = \max_i|\lambda_i|\,\varrho(\Delta s),$$

gdzie λ_i — i-ta wartość własna macierzy A, czyli

$$\varrho(A\Delta s) \leqslant \max_i|\lambda_i|\,\varrho(\Delta s). \tag{16}$$

Z porównania (15) i (16) otrzymujemy, że warunek stabilności (16) jest spełniony, jeżeli wartości bezwzględne wszystkich pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy A są mniejsze od jedności.

Dostateczność. Załóżmy wbrew tezie, że jest spełniona zależność (9) i układ jest niestabilny. Ponieważ zachodzi (9), więc nierówność (16) słuszną dla każdego odwzorowania ciągłego zapiszemy w postaci

$$\varrho(A\Delta s) \leqslant \beta\varrho(\Delta s); \quad 0 < \beta < 1. \tag{17}$$

Związek (17) oznacza, że odwzorowanie (3) na obszarze K_1 jest odwzorowaniem zwężającym, a punkt s^* jest stabilnym punktem tego odwzorowania.

Twierdzenie 2 [2]. Punkt s^* spełniający równość (4) jest niestabilny w sensie Def. 2, jeżeli moduł któregoś z pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy A jest większy od jedności

$$|\lambda_1| > 1 \quad \text{lub} \quad |\lambda_2| > 1, \ldots, \quad \text{lub} \quad |\lambda_{n-1}| > 1. \tag{18}$$

Dowód. Konieczność. W myśl Def. 2 punkt s^* jest niestabilny, jeżeli odwzorowanie (3) nie jest odwzorowaniem zwężającym, tj. jeżeli w zależności (15) $\alpha > 1$.

Dla odwzorowania (3) słuszny jest związek (16), dla dostatecznie małego otoczenia punktu s^*. Z porównania (15) i (16) wnioskujemy, że aby odwzorowanie nie było zwężające, to $\max_i|\lambda_i| > 1$.

Dostateczność. Załóżmy wbrew tezie, że zachodzi (18) i układ jest stabilny. Z (18) wynika jednakże, że zależność (16) jest spełniona i dla takich Δs, że

$$\varrho(\Delta s) < \varrho(A\Delta s). \tag{19}$$

Z (15) i (19) otrzymujemy, że

$$\varrho(\Delta s) < \varrho(A\Delta s) \leqslant \alpha\varrho(\Delta s),$$

a więc $\alpha > 1$.

Istnieje więc takie otoczenie punktu s^*

$$K_2 = K[s^*, \varepsilon_2],$$

że odwzorowanie (3) na obszarze K_2 nie jest odwzorowaniem zwężającym [nie spełnione są warunki (10) i (11)], a więc punkt s^* jest niestabilny.

W przypadku występowania pierwiastków równania charakterystycznego, moduł których jest równy jedności. Twierdzenia 1 i 2 nie określają stabilności i niestabilności ruchu okresowego. Jest to przypadek krytyczny.

Literatura cytowana w tekście

1. J. M. Holtzman, *Contraction maps and equivalent linearization*, The Bell System Technical Journal, 46, Nr 10 1967, 2405–2435, (tłum. ros. Механика, Сд. Пер. No 3/115 (1969).
2. Ю. И. Неймарк, *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*, Киев 1963, Труды МСНК, Т. 2, стр. 268–307.
3. Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Москва 1968.
4. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, и др., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Москва 1966.
5. N. Minorski, *Drgania nieliniowe*, Warszawa 1967.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э., Хайкин, *Теория колебаний*, Москва 1959.
7. А. М. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функции и функционального анализа*, Москва 1954.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

В работе дано новое доказательство теорем об устойчивости и неустойчивости периодических движений нелинейных систем. Рассматривается последовательность точек на гиперповерхности без контакта в n-мерном фазовом пространстве. Сходимость и расходимость этой последовательности исследована с помощью принципа сжатых отображений Банаха.

Summary

ON A CERTAIN POSSIBILITY OF PROVING THE PERIODIC MOTION STABILITY AND INSTABILITY THEOREMS

A new proof of stability and instability of the periodic motion of a non-linear system is given in the paper. A sequence of points lying on the hypersurface in the n-dimensional phase space is considered. Convergence and divergence of the sequence is analyzed, the Banach contraction operator theorem being used.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1970 r.