

ZASTOSOWANIE GRAFÓW PRZEPŁYWU DO PEWNYCH ZAGADNIENÍ
MECHANIKI BUDOWLI

JACEK PIETRZAK, KAZIMIERZ WRZEŚNIEWSKI (POZNAŃ)

Artykuł niniejszy zawiera omówienie grafów przepływu, ich koncepcji oraz sposobu rozwiązywania. Rozpatrywany typ grafów, zaproponowany przez MASONA [6], stanowiący pewien system algebry graficznej, ze względu na swój ogólny charakter wykorzystywany może być w dziedzinach różniących się znacznie charakterem fizycznym od dziedzin zasadniczych zastosowań — elektroniki, elektrotechniki, teorii modelowania. Celem artykułu jest zwrócenie uwagi na stosunkowo mało znany w kraju aspekt zastosowań grafów przepływu do zagadnień mechaniki budowli. W dziedzinie tej grafy przepływu wykorzystywane mogą być dla graficznej reprezentacji metod obliczeniowych, co poza korzyściami natury pojęciowej [1, 2, 4] pozwala osiągnąć w pewnych przypadkach również oszczędności w zakresie nakładu pracy obliczeniowej [3].

1. Wprowadzenie

1.1. Rozważmy zbiór A złożony z elementów $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ o przyporządkowanych im znakach punktu, zwanych dalej *wierzchołkami*. Z elementów zbioru A utwórzmy

	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n	a_{n+1}
a_1	R	R		R		R	
a_2	R	R		R		R	
...							
a_i	R	R		R		R	
...							
a_n	R	R		R		R	
a_{n+1}	R	R		R		R	

Rys. 1

iloczyn kartezjański $A \times A$ i określmy w zbiorze A relację połączeń zorientowanych R (rys. 1) zdefiniowaną następująco:

$a_i R a_j \Leftrightarrow a_{ij} = 1$, gdy istnieje połączenie między elementami a_i oraz a_j , w kierunku od i do j . Relacji R przyporządkujemy znak linii łączącej wierzchołek a_i z wierzchołkiem a_j ,

opatrzonej strzałką wskazującą kierunek połączenia, zwanej dalej *krawędzią zorientowaną* b_{ij} .

Zbiór wierzchołków oraz krawędzi zorientowanych będziemy nazywali *grafem skierowanym*.

1.2. Rozważmy układ n niezależnych równań liniowych, zapisanych w formie równania macierzowego:

$$(1.2.1) \quad \mathbf{F}\mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

Wykorzystując pojęcie macierzy jednostkowej \mathbf{E} (o wymiarze $n \times n$) zapiszmy równanie (1.2.1) w równoważnej postaci:

$$(1.2.2) \quad [\mathbf{F} + \mathbf{E} \quad -\mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

O macierzy \mathbf{Y} założmy, że można ją przedstawić jako iloczyn

$$(1.2.3) \quad \mathbf{Y} = y_{n+1} \mathbf{K} = \mathbf{K}y_{n+1}$$

dowolnie obranego parametru y_{n+1} , zwanego również źródłem Z układu oraz wynikającej z tego doboru macierzy \mathbf{K} . W poniższych rozważaniach przyjmijmy jako wartość parametru y_{n+1} jedność.

Wprowadzając zależność (1.2.3) do równania (1.2.2) możemy napisać:

$$[\mathbf{F} + \mathbf{E} \quad -\mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{K}y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Wykorzystajmy własności macierzy jednostkowej:

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}y_{n+1} = -\mathbf{K}\mathbf{E}y_{n+1} = -\mathbf{K}y_{n+1}$$

i zapiszmy powyższe równanie w następującej postaci:

$$(1.2.4) \quad [\mathbf{F} + \mathbf{E} \quad -\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Z pierwszej macierzy występującej w równaniu (1.2.4), poprzez dodanie wiersza o elementach zerowych, utwórzmy macierz kwadratową:

$$(1.2.5) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{E} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

i poddajmy ją transpozycji. Otrzymamy wówczas macierz \mathbf{C} :

$$(1.2.6) \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{F} + \mathbf{E})^T & \mathbf{O} \\ -\mathbf{K}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T + \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{K}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

1.3. Weźmy pod uwagę graf skierowany, zdefiniowany w punkcie 1.1. oraz układ równań określony w punkcie 1.2. Wierzchołki grafu a_1, a_2, \dots, a_n oraz a_{n+1} potraktujemy odpowiednio jako reprezentację zmiennych zależnych X_1, X_2, \dots, X_n oraz źródła y_{n+1} układu równań (1.2.1). Krawędziom b_{ij} grafu przyporządkujemy odpowiednio wielkości C_{ij} , zwane dalej *transmitancjami*, będące elementami macierzy \mathbf{C} .

Dla grafu skierowanego, o nadanej w ten sposób interpretacji, zdefiniujemy operacje dodawania i mnożenia przez operator, określając wielkość zmiennej X_j , reprezentowanej przez j -ty węzeł grafu, jako sumę iloczynów utworzonych z transmitancji C_{ij} krawędzi b_{ij} dochodzących do j -tego węzła oraz zmiennych węzłów początkowych tych gałęzi:

$$(1.3.1) \quad X_j = \sum_i C_{ij} X_i + C_{i, n+1} y_{n+1}.$$

	$F X = Y = K y_{n+1}$	$C = \begin{bmatrix} F^T E & 0 \\ -K^T & 0 \end{bmatrix}$
	$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix};$ $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}; y_{n+1} = y_3 = Z_1$	$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} a_{11} + 1 a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} + 1 0 \\ -k_1 & -k_2 & 0 \end{bmatrix}$
	$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix};$ $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}; y_{n+1} = y_4 = Z_1$	$C = \begin{bmatrix} a_{11} + 1 a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} + 1 a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + 1 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix}$
	$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$ $y_{n+1} = y_5 = Z_1$	$C = \begin{bmatrix} a_{11} + 1 & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + 1 \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{31} & a_{41} & 0 \\ a_{32} & a_{42} & 0 \\ a_{33} + 1 & a_{43} & 0 \\ a_{34} & a_{44} + 1 & 0 \\ -k_3 & -k_4 & 0 \end{bmatrix}$

Rys. 2

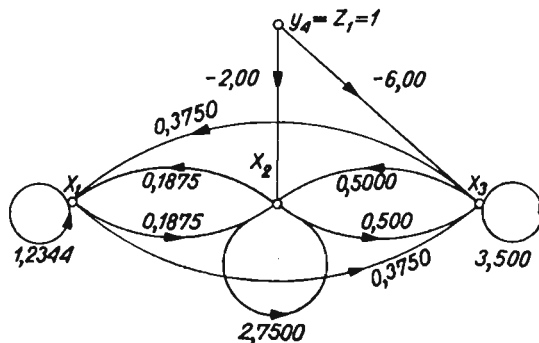
Graf o określonych powyżej właściwościach, reprezentujący w sposób jednoznaczny układ równań liniowych, będziemy nazywali *grafem przepływu*. Na rys. 2 przedstawiono grafy przepływu odnoszące się kolejno do układów dwóch, trzech i czterech równań liniowych. Na podstawie powyższych schematów nietrudno narysować jest strukturę grafu dla układu równań liniowych o dowolnej liczbie niewiadomych.

2. Rozwiązanie grafu

2.1. Przez *rozwiązanie grafu przepływu* rozumiane jest określenie na podstawie grafu wybranych zmiennych zależnych jako funkcji zmiennych niezależnych. Rozwiązanie otrzymane może być za pomocą *metody redukcji*, polegającej na przekształceniu grafu pierwotnego w graf zastępczy, w którym uwidocznione są bezpośrednie relacje między wybraną zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi albo za pomocą *metody bezpośredniej*, wykorzystującej regułę MASONA [6], według której wielkość zmiennej zależnej X_j wynosi*:

$$(2.1.1) \quad X_j = \frac{\sum_k G_k D_k}{D} y_{n+1},$$

gdzie y_{n+1} jest źródłem układu. Pozostałe wielkości występujące we wzorze (2.1.1), ustalone na podstawie inspekcji grafu, oznaczają odpowiednio: transmitancję (G_k) *ścieżki otwartej* $y_{n+1} \div X_j$, czyli transmitancję takiego ciągu zgodnych skierowanych krawędzi,



Rys. 3

biegnących od wierzchołka y_{n+1} do wierzchołka X_j , który nie przechodzi przez żaden wierzchołek więcej niż jeden raz; *wyznacznik* (D_k) części grafu, która nie styka się z k -tą ścieżką otwartą; *wyznacznik* (D) grafu.

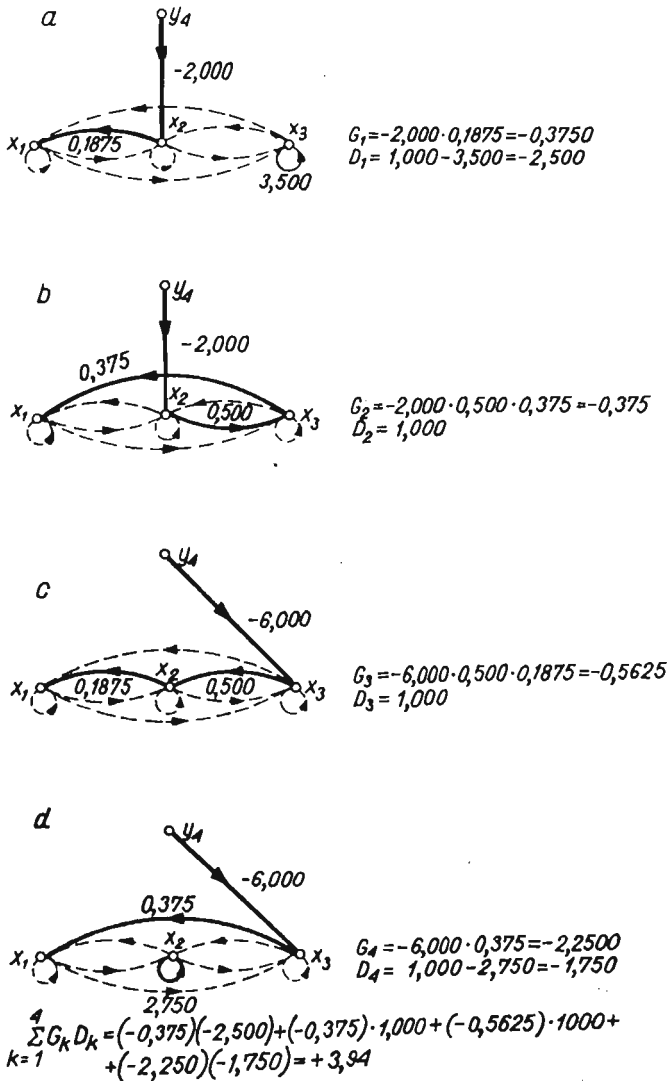
Wyznacznik grafu (lub części grafu) obliczany jest za pomocą wzoru*

$$(2.1.2) \quad D = 1 - \sum P_{m1} + \sum P_{m2} - \sum P_{m3} + \dots,$$

w którym P_{mn} jest iloczynem transmitancji w m -tej kombinacji n — nie stykających się z sobą pętli.

Jeżeli graf posiada kilka źródeł: $Z_1 = y_{n+1}$; $Z_2 = y_{n+2}$; $Z_3 = y_{n+3}, \dots$, co zachodzi, gdy graf reprezentuje kilka powiązanych ze sobą układów równań, wtedy przy obliczaniu

* wyprowadzenie wzorów (2.1.1) i (2.1.2) można znaleźć również w pozycji [7] (s. 27-29).



Rys. 4

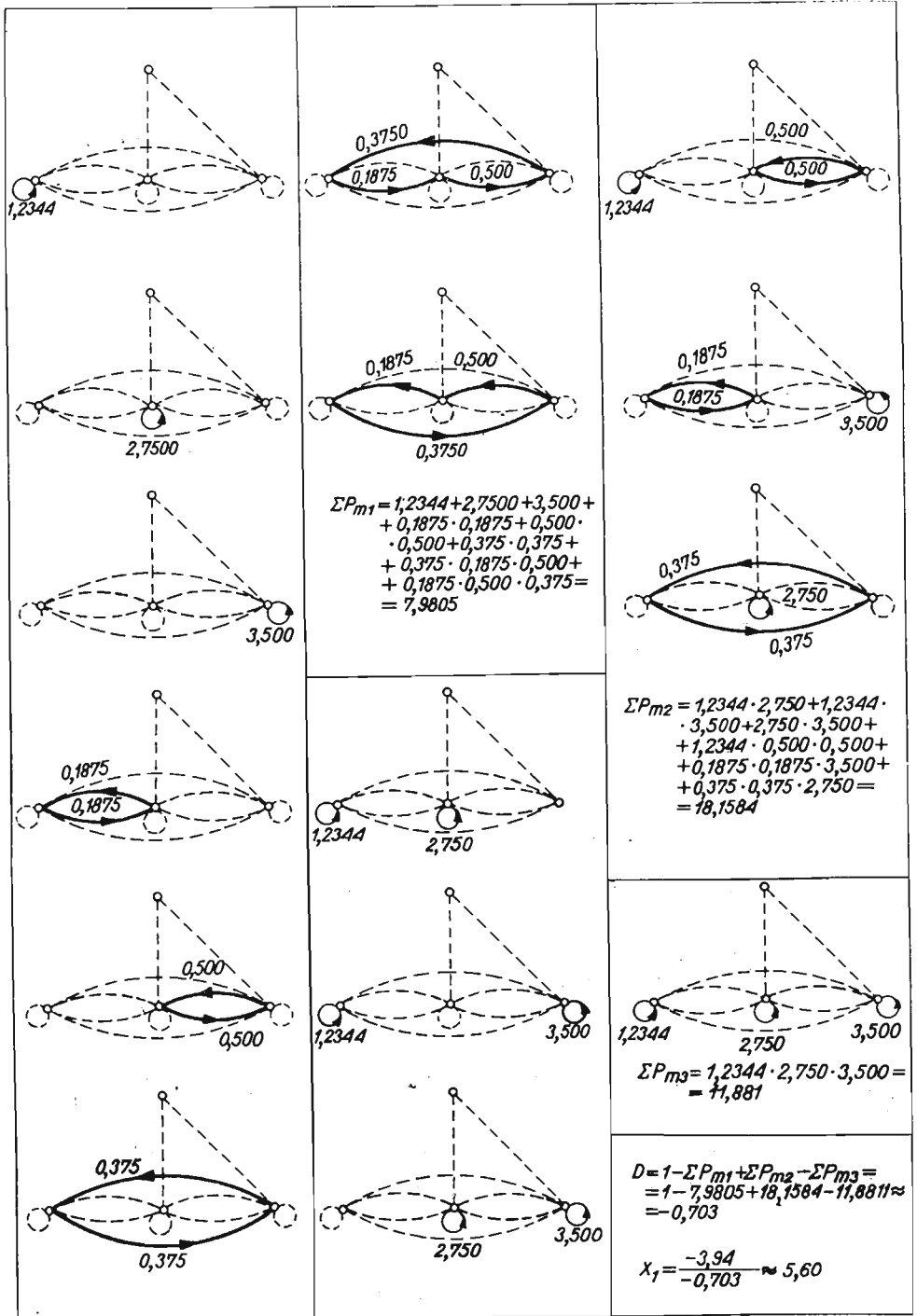
zmiennych zależnych za pomocą wyrażenia (2.1.1) stosujemy superpozycję wpływów poszczególnych źródeł.

2.2. Przykład. Dla zilustrowania metody bezpośredniej rozważmy graf z rys. 3 reprezentujący układ równań:

$$\begin{aligned} 0,2344 X_1 + 0,1875 X_2 + 0,375 X_3 &= 0,0, \\ 0,1875 X_1 + 1,7500 X_2 + 0,5000 X_3 &= 2,0, \\ 0,3750 X_1 + 0,5000 X_2 + 2,5000 X_3 &= 6,0. \end{aligned}$$

Analizę grafu prowadzącą do określenia wielkości X_1 podano na rys. 4 i 5.

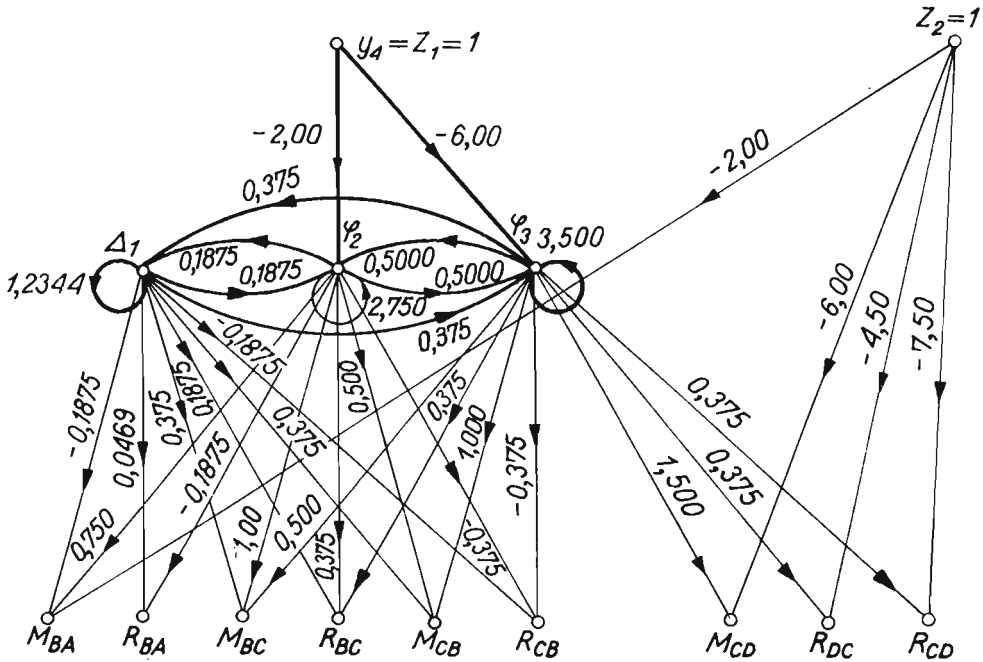
Pozostałe zmienne X_2 i X_3 obliczono w sposób podobny; wynoszą one odpowiednio 0,87 i 3,07.



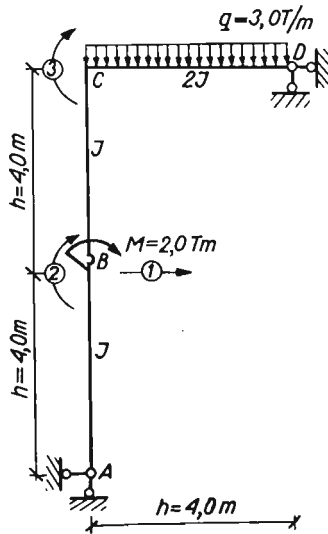
Rys. 5

3. Zastosowania

Charakter grafów przepływu, omówiony powyżej, implikuje możliwości wykorzystania ich w mechanice budowli do obrazowego przedstawienia struktury obliczeń statycznych — zarówno ich fragmentu, jak i całego kompleksu — przy czym narysowanie grafu przepływu reprezentującego dany układ dokonane może być niejednokrotnie wyłącznie



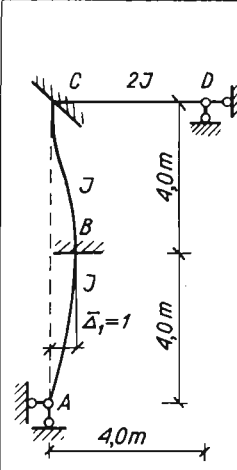
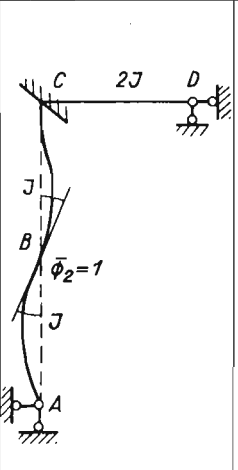
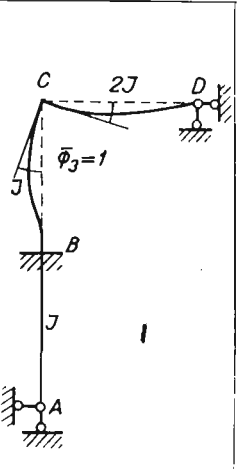
Rys. 6



Rys. 7

na podstawie bezpośredniej analizy układu, tj. bez zapisywania równań charakteryzujących układ.

Na rys. 6 zamieszczono przykład grafu przepływu odnoszącego się do obliczania sił poprzecznych i momentów zginających w ramie przedstawionej na rys. 7. Część grafu wyróżniona grubszą linią reprezentuje układ równań kanonicznych metody odkształceń; część pozostała odnosi się do obliczenia wielkości momentów i sił poprzecznych w oparciu o rzeczywiste wielkości Δ_1 , φ_2 i φ_3 oraz wielkości *momentów i sił wyjściowych*. Obie części grafu połączone ze sobą pozwalają na wyznaczenie na ich podstawie dowolnej ze zmiennych zależnych: M_{BA} , R_{BA} , M_{BC} , ..., R_{DC} bez konieczności liczbowego określenia przemieszczeń Δ_1 , φ_2 i φ_3 . Podstawą ustalenia transmitancji gałęzi grafu z rys. 6 jest analiza przedstawiona na rys. 8.

		
$\bar{\Delta}_1=1$	$\bar{\varphi}_2=1$	$\bar{\varphi}_3=1$
$M_{BA}^{\bar{\Delta}_1=1} = -\frac{3EJ}{4^2} = -0,1875EJ$	$M_{BA}^{\bar{\varphi}_2=1} = \frac{3EJ}{4} = 0,750EJ$	$M_{BA}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0$
$R_{BA}^{\bar{\Delta}_1=1} = +0,0469EJ$	$R_{BA}^{\bar{\varphi}_2=1} = -0,1875EJ$	$R_{BA}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0$
$M_{BC}^{\bar{\Delta}_1=1} = \frac{6EJ}{4^2} = +0,375EJ$	$M_{BC}^{\bar{\varphi}_2=1} = \frac{4EJ}{4} = EJ$	$M_{BC}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,5EJ$
$R_{BC}^{\bar{\Delta}_1=1} = +0,1875EJ$	$R_{BC}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0,375EJ$	$R_{BC}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,375EJ$
$M_{CB}^{\bar{\Delta}_1=1} = +0,375EJ$	$M_{CB}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0,500EJ$	$M_{CB}^{\bar{\varphi}_3=1} = EJ$
$R_{CB}^{\bar{\Delta}_1=1} = -0,1875EJ$	$R_{CB}^{\bar{\varphi}_2=1} = -0,375EJ$	$R_{CB}^{\bar{\varphi}_3=1} = -0,375EJ$
$M_{CD}^{\bar{\Delta}_1=1} = 0$	$M_{CD}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0$	$M_{CD}^{\bar{\varphi}_3=1} = \frac{3E \cdot 2J}{4} = 1,5EJ$
$R_{DC}^{\bar{\Delta}_1=1} = 0$	$R_{DC}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0$	$R_{DC}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,375EJ$
$R_{CD}^{\bar{\Delta}_1=1} = 0$	$R_{CD}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0$	$R_{CD}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,375EJ$

Rys. 8

Zamieszczone na rys. 8 rozwiązanie grafu, z uwagi na przykładowy charakter, dotyczy tylko jednej zmiennej zależnej — wielkości momentu zginającego M_{BA} :

$$M_{BA} = \sum_{k=1}^7 \frac{G_{1k} D_{1k}}{D_1} Z_1 + \frac{G_2 D_2}{D_2} Z_2,$$

gdzie:

$$G_{11}(y_4, \varphi_2, \Delta_1, M_{BA}) = (-2) \cdot 0,1875 (-0,1875) = 0,0703,$$

$$G_{21}(y_4, \varphi_2, \varphi_3, \Delta_1, M_{BA}) = (-2) \cdot 0,500 \cdot 0,375 (-0,1875) = 0,0703,$$

$$G_{31}(y_4, \varphi_3, \varphi_2, \Delta_1, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,500 \cdot 0,1875 (-0,1875) = 0,1054,$$

$$G_{41}(y_4, \varphi_3, \Delta_1, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,375 (-0,1875) = 0,4218,$$

$$G_{51}(y_4, \varphi_2, M_{BA}) = (-2) \cdot 0,750 = -1,500,$$

$$G_{61}(y_4, \varphi_3, \varphi_2, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,500 \cdot 0,750 = -2,250,$$

$$G_{71}(y_4, \varphi_3, \Delta_1, \varphi_2, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,375 \cdot 0,1875 \cdot 0,750 = -0,3164,$$

$$D_1 = -0,703; \quad D_{11} = -2,500; \quad D_{21} = 1,0; \quad D_{31} = 1,0; \quad D_{41} = -1,750 \text{ (por. przykład poprzedni),}$$

$$D_{51} = 1 - (1,2344 + 3,500 + 0,375^2) + 1,2344 \cdot 3,500 = 0,4454,$$

$$D_{61} = 1 - 1,2344 = -0,2344,$$

$$D_{71} = 1,00; \quad Z_1 = 1,$$

$$G_{21} = -2,00; \quad D_{21} = 1,0; \quad D_2 = 1,0; \quad Z_2 = 1,$$

$$\text{stąd} \quad M_{BA} = \frac{-1,196}{-0,703} - 2,0 = -0,300 \text{ Tm.}$$

Wielkości pozostałych sił przekrojowych wyznaczone być mogą w analogiczny sposób przy wykorzystaniu grafu z rys. 6.

Jak wspomniano na wstępie niniejszego artykułu, zastosowanie grafów przepływu przy rozwiązywaniu równań może w niektórych wypadkach dać znaczne zaoszczędzenie na pracy obliczeniowej. Szczegółowe dane, przykładowe, w odniesieniu do równań typu:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{1p} = 0,$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{2p} = 0,$$

.....

$$a_{i(i-1)} X_{i-1} + a_{ii} X_i + a_{i(i+1)} X_{i+1} + a_{ip} = 0,$$

.....

$$a_{n(n-1)} X_{n-1} + a_{nn} X_n + a_{np} = 0,$$

tj. równań często spotykanych również w mechanice, można znaleźć w pracy [3]. Porównanie, jakie przeprowadzili tam autorzy, dotyczące nakładu pracy dla podanego powyżej układu równań przy zastosowaniu różnych metod obliczeniowych, wykazało przewagę metody omawianej w artykule nad metodami dotychczas stosowanymi.

Literatura cytowana w tekście

1. Chuan C. FENG, Richard D. BENTON, *Flow graph of moment distribution*, Journal of the Structural Division, April 1964, Proc. ASCE.
2. Chuan C. FENG, Kenneth A. STEAD, *Slope deflection and moment flow graphs*, J. Str. Div., June 1967, Proc. ASCE.
3. Chuan C. FENG, Larry J. FEESTER, *Flow solutions of band matrix problems*, Journal of the Engineering Mechanics Division, February 1966, Proc. ASCE.
4. Kurt H. GERSTLE, *Flow graphs in structural analysis*, J. Str. Div., October 1960, Proc. ASCE.
5. J. KOLENDOWSKI, *Znaczenie grafów i teorii grafów*, Przegląd Elektrotechniczny, Styczeń 1967.
6. S. J. MASON, *Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. Inst. Radio Engers, USA, 1953, Vol. 41.
7. L. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Grafy przepływu sygnałów*, PWN, Warszawa 1968 (tłum. z j. franc.).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ТЕЧЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ СООРУЖЕНИЙ

В статье обсуждается концепция графов и указывается возможность их использования в статическом анализе стержневых систем. Рассуждения иллюстрируются числовыми примерами, один из которых касается расчета сил поперечных сечений, в простой статически неопределимой раме.

Summary

APPLICATION OF FLOW GRAPHS TO SOME PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS

A general idea of flow graphs is derived in the paper. The paper contains also considerations of possible application of the graphs in the structural analysis. Some numerical examples are enclosed.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1968 r.
