MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 10 (1972)

TEORIA NIELINIOWEJ LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI I JEJ ZASTOSOWANIA

ZBIGNIEW BYCHAWSKI (KRAKÓW)

Nieliniowa mechanika ciała stałego, a w jej ramach również teoria nieliniowej lepkosprężystości, rozwinęły się wszechstronnie w ostatnich latach i posunęły naprzód w opisie mechanicznych i innych własności ciał rzeczywistych. W szczególności ugruntowane zostały podstawy teoretyczne tych nauk w oparciu o osiągnięcia współczesnej matematyki i fizyki, co wiąże się z wprowadzeniem nowego formalizmu do mechaniki. Jest to niewątpliwą zasługą TRUESDELLA i innych reprezentantów wytyczonego przez niego kierunku w badaniach teoretycznych.

Jednakże przyczynami tak szybkiego rozwoju mechaniki nieliniowej były nie tylko potrzeby i możliwości teoretycznych uogólnień, ale również — i to przede wszystkim — obiektywne warunki jakie stworzyła współczesna technika i zapotrzebowanie rozwijającego się szybko przemysłu. Jest to związane z koniecznością lepszej znajomości i bardziej ścisłego opisu własności nowych, a także tradycyjnych materiałów konstrukcyjnych. Te ostatnie poddane zostały bowiem zaostrzonym warunkom eksploatacyjnym lub też nie stosowanym dotychczas działaniom.

Jest rzeczą oczywistą, że rozwój nieliniowej teorii materiałów znacznie wyprzedził eksperyment i możliwości zastosowań praktycznych. Niemniej jednak teoria, nie ograniczając się jedynie do podsumowania dotychczasowych osiągnięć mechaniki ciał stałych, zawarła w sobie potencjalne źródło możliwości na przyszłość. Chodzi tu nie tylko o ulepszanie własności materiałów znanych, ale również o komponowanie materiałów o pożądanych własnościach.

Nieliniowe własności lepkosprężyste, a ogólniej sprężysto-lepkoplastyczne, były przedmiotem zainteresowania teoretyków i eksperymentatorów od dziesięcioleci. W pierwszym okresie próby ich opisania sprowadzały się głównie do określania praw empirycznych opartych na danych doświadczalnych dla specyficznych materiałów. Takie podejście, zresztą stosowane z konieczności do dziś, ma głównie znaczenie praktyczne i może spełnić — chociaż w ograniczonym zakresie — pożyteczną rolę. Inne podejście, szeroko stosowane w pewnym okresie rozwoju reologii, opiera się na analogiach i modelach mechanicznych lub nawet modelach innego typu, których elementy składowe o charakterystykach nieliniowych mają poglądowo uzmysławiać złożone reakcje modelowanego materiału na odpowiednie działania. Zwykle w takich przypadkach równania konstytutywne formułowane z wykorzystaniem ogólnych zasad mechaniki przyjmują postać nieliniowych równań różniczkowych, niekiedy bardzo skomplikowanych.

Najbardziej ogólne podejście teoretyczne w nieliniowej teorii lepkosprężystości oparte jest na koncepcji wyrażania równań konstytutywnych w postaci funkcjonalnej. Kierunek ten jest reprezentowany w podstawowych pracach z zakresu nieliniowej mechaniki ciał odkształcalnych TRUESDELLA [1], GREENA i RIVLINA [2], [3], [4], NOLLA [5], COLEMANA i NOLLA [6] oraz innych autorów.

Rozważymy niektóre aspekty tego kierunku mające szczególne znaczenie w nieliniowej lepkosprężystości. I tak na przykład GREEN i RIVLIN stosują do opisu własności ciał lepkosprężystych rozwinięcie Volterry dla nieliniowych funkcjonałów, które — mając postać analogiczną do szeregu potęgowego — pozwala na uwzględnienie wpływu nieliniowości z żądaną dokładnością. Warto zauważyć, że pierwsze dwa wyrazy tego szeregu funkcjonalnego będącego uogólnieniem regularnego funkcjonału dowolnego stopnia odpowiadają prawu liniowej lepkosprężystości. W związku z tym należy podkreślić, że przybliżenie opisu własności nieliniowych materiałów lepkosprężystych szeregiem funkcjonalnym opiera się na odchyleniu od liniowości. W ogólnym jednak przypadku takie podejście ma charakter ograniczony, ponieważ istnieją materiały, których nieliniowe zachowanie się nie wykazuje w pewnych zakresach liniowego poziomu odniesienia. Jako przykład można tutaj podać ciało pełzające typu Odqvista. Próby zastosowania linearyzacji jego równania konstytutywnego w skończonym przedziale czasowym muszą prowadzić do błędnych rezultatów. Linearyzycja w tym przypadku może mieć jedynie znaczenie lokalne zewzględu na czas i nie usuwa nieliniowości równań problemów brzegowych przy wykorzystaniu tego prawa.

Ostatnie zagadnienie wiąże się bezpośrednio z zakresem słabej nieliniowości materiałów lepkosprężystych. Wiadomo z badań doświadczalnych na materiałach niemetalowych oraz na niektórych metalach lekkich, że wykazują one liniowość tylko do pewnej krytycznej wielkości naprężenia. Dla naprężeń większych odchylenie od liniowości wzrasta, a w efekcie proces ten prowadzi do stanu zniszczenia materiału. Jeżeli natomiast, chodzi o deformację czysto sprężystą, to liniowość jest zachowana prawie aż do stanu zniszczenia. Można zatem uważać, że dla stanu naprężenia, który różni się dostatecznie mało od stanu krytycznego[1)], dewiacja od liniowości będzie mała, a zatem nieliniowość słaba. Można więc przyjąć z kolei istnienie parametru fizycznego, zależnego od rodzaju materiału i odpowiedzialnego za wielkość dewiacji, przez który wyraża się zmianę stanu naprężenia ponad stan krytyczny. Koncepcja słabej nieliniowości rozwinięta w pracy BYCHAWSKIEGO i FOXA [7] ma jednak inny aspekt, aniżeli podobne podejście perturbacyjne do nieliniowej lepkosprężystości ARUTIUNIANA [8], który uogólnienie swojej nieliniowej teorii pełzania betonu oparł na równaniach teorii małych deformacji sprężysto-plastycznych. Zastrzeżenie budzi tutaj fakt przyjęcia relacji wiążącej intensywności odkształcenia i naprężenia w postaci analogicznej do równania konstytutywnego dla przypadku jednowymiarowego. Postać ta, jak można łatwo wykazać, jest bardziej złożona. Jest to oczywiście tylko postulat teorii, który nie ma jednak uzasadnienia fizycznego.

Alternatywne podejście do ujęcia nieliniowości zaproponował LEADERMAN [9], [10], który wprost uogólnił zasadę Boltzmanna nadając jej formę nieliniowego równania całkowego. Uzasadnienie takiego ujęcia wynika z doświadczeń, które wskazują, że krzywe odkształceń zależnych od czasu uzyskane przy różnych stałych naprężeniach mogą być

[1)] Przez stan krytyczny będziemy rozumieli taki stan materiału, który prowadzi w określonej chwili do istotnych zmian jakościowych w jego zachowaniu się.

sprowadzone do siebie za pomocą czynnika niezależnego od czasu, a będącego jedynie funkcją naprężenia. Uogólnienie tych faktów na przypadek naprężeń zmiennych w czasie prowadzi bezpośrednio do równania proponowanego przez Leadermana. Równanie to jest szczególnym przypadkiem teorii, którą zajmiemy się w dalszym ciągu w niniejszej pracy. Ze względu na swoją stosunkową prostotę nadaje się ono niewątpliwie do zastosowań praktycznych. Odnosi się to szczególnie do zakresu słabej nieliniowości.

Podobna idea rozwinięta została w pracy RABOTNOWA [11], który podał teorię pełzania metali w postaci nieliniowego równania całkowego. Należy więc ona do teorii typu dziedziczenia.

Nie ulega wątpliwości, że w chwili obecnej najbardziej rozpowszechnioną w zastosowaniach teoretycznych i praktycznych jest teoria pełzania ODQVISTA [12], która powstała jako uogólnienie empirycznego prawa Nortona. Obejmuje ona cały zakres pełzania uwzględniając równocześnie efekty natychmiastowe w postaci nieodwracalnej. Jej zaletami są przede wszystkim stosunkowo prosta postać oraz dobra zgodność z doświadczeniem.

Jednym z naszych celów było znalezienie związku pomiędzy teoriami dziedziczenia, które zwykle wiąże się z własnościami reologicznymi materiałów niemetalowych, a teoriami pełzania metali. Związek taki został wykazany w pracy BYCHAWSKIEGO i FOXA [13], z której wynika, że teoria Odqvista jest szczególnym przypadkiem podanej tam teorii dla całkowicie nieliniowego ośrodka lepkosprężystego.

Celem naszym nie jest podanie pełnego przeglądu prac w dziedzinie nieliniowej teorii lepkosprężystości, a jedynie naświetlenie niektórych zagadnień, które wiążą się bezpośrednio z pewnymi aspektami prac własnych. Dlatego też we wstępie, który zupełnie nie pretenduje do rysu historycznego zagadnienia, ograniczamy się do cytowania prac, które wywarły bezpośredni wpływ na nasze prace oraz do sygnalizowania zagadnień jakie zamierzamy poruszyć.

Zanim przejdziemy do właściwej części pracy, omówimy pokrótce własne osiągnięcia w zakresie teorii nieliniowej lepkosprężystości i jej zastosowań.

Dotychczasowe nasze prace wiązały się w początkowym okresie z ujęciem teoretycznym wpływu nieliniowości reologicznej na stan odkształcenia i stan naprężenia w zagadnieniach jednowymiarowych (BYCHAWSKI [14], [15], [16], [17]), z zastosowaniem teorii nieliniowej do analizy reologicznej konstrukcji sprężonych (OLSZAK, KAUFMAN, EIMER, BYCHAWSKI [18]) oraz koncepcjami o charakterze podstawowym (BYCHAWSKI, FOX [19]), które następnie posłużyły do postawienia ogólnej teorii (BYCHAWSKI, FOX [20], [21]), jak również rozważenia jej przypadków szczególnych (BOROWSKI, BYCHAWSKI [22]). Dalsze uogólnienie teorii znalazło swój wyraz w analizie zasad formułowania równania konstytutywnego nieliniowego ośrodka termo-lepkosprężystego w oparciu o podaną w pracy [19] uogólnioną zasadę superpozycji (BYCHAWSKI, FOX [23]). Tutaj poruszone zostało podstawowe, naszym zdaniem, zagadnienie postulatów kompleksowości i zwartości czasowej równania konstytutywnego. Podana została również metoda operatorowa odwracania nieliniowego prawa lepkosprężystości oparta na bazie funkcjonalnej (BYCHAWSKI [24]), która znajduje szczególne zastosowanie w problemach słabej nieliniowości.

Dalsze uogólnienie to ujęcie dystrybucyjnych aspektów deformacji plastycznej oraz zastosowanie tej teorii do analizy zjawisk niestabilności ośrodków reologicznych (BYCHAWSKI [25], BOROWSKI, BYCHAWSKI [57]).

Niezależnie od omówionego powyżej kierunku naszych prac, prowadzone były badania nad energetycznymi kryteriami dla stanów krytycznych ośrodków lepkosprężystych, które w efekcie prowadzą do nieliniowości (Bychawski, Olszak [26], [27], [28]). W szczególności kryteria te dotyczą ciał, które charakteryzują się prawie wyłącznie dysypacją energii. W tym przypadku tę ostatnią przyjmuje się jako miarę osiągnięcia stanu krytycznego. Wykazano tutaj intuicyjnie oczywisty fakt, że energia dysypowana nie posiada ekstremum różnego od trywialnego na poziomie zerowym (minimum).

Zastosowania teorii nieliniowej lepkosprężystości koncentrowały się głównie na zagadnieniach stateczności reologicznej (wyboczenia przy pełzaniu) płyt i powłok w zakresie geometrycznie nieliniowym (Bychawski [29], [30], [31], Bychawski, Kopecki [32], [33]). Ostatnio rozpoczęte zostały również badania modelowe nad zagadnieniem wyboczenia przy pełzaniu dla powłok kulistych z materiałów metalowych i niemetalowych. Zjawisko było ujęte zarówno lokalnie, jak i integralnie. Pierwsze wyniki doświadczeń wraz z interpretacją teoretyczną zostały już opublikowane (Bychawski, Kopecki [34]).

Dużą uwagę poświęcono geometrycznie nieliniowym membranom płaskim (kołowym) i powierzchniowym (obrotowo-symetrycznym, kulistym). Podano dla nich szereg rozwiązań ścisłych dla złożonych stanów fizycznych tych konstrukcji (Bychawski [35], [36], Bychawski, Kopecki, [37], Kopecki [38]). W szczególności duże znaczenie można przypisać odkrytej analogii między stanem natychmiastowym (sprężystym) a pełzaniem (nieliniowym) dla problemów geometrycznie nieliniowych membran kołowych (Bychawski [39]) i o dowolnym konturze (Bychawski [40]). Jest rzeczą charakterystyczną i wartą podkreślenia, że możliwość istnienia takiej analogii negował Odqvist [41], będąc — jak się wydaje — zasugerowany analogią Hoffa. Ostatnio fakt istnienia naszej analogii został potwierdzony przez jego szkołę w pracy doktorskiej Storåkersa [42].

Uogólnienia dotyczące zagadnień geometrycznie nieliniowych powłok w stanie membranowym przy złożonych stanach deformacji sprężysto-lepkoplastycznej znalazły swój wyraz w rozwiązaniach ścisłych dla powłok obrotowo-symetrycznych (Bychawski [43], Bychawski, Olszak [44]) i szczegółowej analizie powłoki kulistej pod ciśnieniem wewnętrznym (Bychawski, Kopecki [45]). W pracach tych uogólniona została również omówiona powyżej analogia, która w ten sposób objęła szerszą klasę zagadnień nie tylko płaskich, lecz również ustrojów powierzchniowych.

Inne praktycznie ważne zagadnienie pełzania powłoki cylindrycznej o przekroju kołowym pod ciśnieniem wewnętrznym postawione zostało odmiennie, aniżeli to miało miejsce w dotychczasowych pracach. Równanie problemu, uwzględniające współdziałanie sił wewnętrznych, rozwiązane zostało w sposób ścisły (Bychawski [46]). Przeprowadzono również krytyczną konfrontację teoretycznego ujęcia problemu przez innych autorów.

Termo-lepkosprężysta analiza powłoki walcowej pod ciśnieniem wewnętrznym pozwoliła na dyskusję możliwości podejścia do rozwiązania tego trudnego problemu i przedstawienie rozwiązań dla przypadków szczególnych (Bychawski [47]).

Z prac o charakterze ogólnym wymienić należy przegląd podstawowych pojęć i zagadnień reologii nieliniowej oraz teorii nieliniowej lepkosprężystości (Bychawski, Olszak [48]), jak również monograficzny wykład podstaw reologii liniowej i nieliniowej w Duńskim Uniwersytecie Technicznym w Kopenhadze (Bychawski [49]), oparty w dużej części na oryginalnej interpretacji i pracach własnych.

Zagadnienie płaskich stanów lepkosprężystych elementów konstrukcyjnych w ujęciu nieliniowym rozważane było dla tarczy kołowej poddanej zginaniu (BYCHAWSKI, SIENNICKI [50]) i dla geometrycznie nieliniowych płyt prostokątnych (BYCHAWSKI [51]). W tym ostatnim przypadku rozwiązania ścisłe dotyczą silnej nieliniowości pełzania, co pozwala na przejście graniczne do membranowego stanu plastycznego na podstawie ujęcia stanu natychmiastowego (pełzanie przejściowe). Ważnym wnioskiem wynikającym z tej pracy jest stwierdzenie, że, podobnie jak to ma miejsce dla membran, również w przypadku płyt pełzanie jest nieustalone.

Problemy matematyczne nieliniowej teorii lepkosprężystości rozważane były pod kątem wprowadzenia uogólnionych form funkcji pełzania (BYCHAWSKI [52]), metod rozwiązania konstytutywnych równań całkowych nieliniowych (BYCHAWSKI, PISZCZEK [53]) oraz metod odwracania równań konstytutywnych (BYCHAWSKI [54]). W szczególności wykazano możliwości zastosowania tych metod do problemów geometrycznie nieliniowych powłok obrotowo-symetrycznych (BYCHAWSKI [55]). Przeprowadzona tutaj linearyzacja fizycznego aspektu zagadnienia pozwala na prostą i poglądową interpretację wyników w zakresie słabej nieliniowości.

Dalsze aktualnie prowadzone prace wiążą się z zastosowaniami teorii nieliniowej lepkosprężystości do materiałów i konstrukcji wykazujących w procesie odkształcenia duże deformacje. Prace te dotyczą zarówno podstaw teorii dużych deformacji lepkosprężystych, jak i jej zastosowań do konstrukcji membranowych (BYCHAWSKI [56], BYCHAWSKI, OLSZAK [58]). Ideą przewodnią, chociaż trudną do zrealizowania, jest uzyskanie rozwiązań analitycznych. W związku z problemem dużych deformacji poszukiwane są również ujęcia energetyczne nieliniowej lepkosprężystości w postaci funkcjonalnej (BYCHAWSKI [24]), a pierwsze wyniki prac w tym kierunku wskazują na potrzebę oparcia teorii na bazie termodynamiki procesów nieodwracalnych.

Problemy jakimi zamierzamy się zająć w dalszym ciągu niniejszej pracy mają charakter podstawowy i stanowią uogólnienie prac omówionych powyżej. Celem naszym jest tutaj przedstawienie nowych koncepcji i nowego ujęcia formalnego, a na tej podstawie bardziej ogólnej interpretacji i bardziej wnikliwej dyskusji zagadnień nieliniowej lepkosprężystości.

1. Postać równania konstytutywnego nieliniowej teorii lepkosprężystości

Równanie konstytutywne materiału rzeczywistego, a w istocie jego wyidealizowanego modelu możliwie ściśle opisującego obserwowalne własności tego materiału, powinno być przede wszystkim pozbawione wewnętrznych sprzeczności. Jeśli warunek ten jest spełniony, to od równania konstytutywnego należy oczekiwać możliwości wyciągnięcia wniosków co do zachowania się materiału w odpowiednich sytuacjach działań mechanicznych i innych. Inaczej mówiąc, równanie to dawać powinno możliwość przewidywania skutków przy zadanych przyczynach lub określenia przyczyn na podstawie obserwowanych skutków.

Jest rzeczą oczywistą, że podstawą dla formułowania równania konstytutywnego ciała rzeczywistego musi być eksperyment przeprowadzony z reguły w prostszych warunkach aniżeli te, dla których odpowiedź ma dać to równanie. Jest również oczywiste, że równanie konstytutywne może być także określone na drodze eksperymentu myślowego (dla materiału hipotetycznego), co nie jest wcale pozbawione sensu praktycznego.

Zgodnie z ogólnymi założeniami fizyki, równanie konstytutywne powinno odpowiadać trzem podstawowym zasadom: przyczynowości, lokalności działania i obiektywności materialnej.

O ile znaczenie dwóch ostatnich zasad jest równorzędne dla wszystkich typów ośrodków, to zasadzie pierwszej należy przypisać szczególne znaczenie w teorii nieliniowej lepkosprężystości. Wynika to z roli historii ruchu materiału, która określa jego stan w danej chwili i z konieczności pamiętania o tej zasadzie każdorazowo przy wykonywaniu operacji funkcjonalnych na związkach konstytutywnych. Formalnym wyrazem zasady przyczynowości jest uogólniona zasada superpozycji sformułowana i rozwinięta w pracach [7], [19]. Tę ostatnią można napisać dla składowych tensora stanu odkształcenia ośrodka lepkosprężystego w następującej postaci:

$$e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau)d[\theta(\tau-t_0)e_{ij}(\tau)], \tag{1.1}$$

gdzie t_0 jest chwilą początkową, θ zaś oznacza dystrybucję Heaviside'a zdefiniowaną jak następuje

$$\theta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geqslant \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \tag{1.2}$$

Przez wprowadzenie dystrybucji θ określamy ściśle przedział czasowy superpozycji $[t, t_0]$ tak, że uwzględnia ona ewentualne efekty początkowe związane z historią do chwili t_0 lub zachodzące w tejże chwili (efekty natychmiastowe).

Zasada superpozycji w postaci (1.1) jest tylko przepisem formalnym sposobu określania tensora odkształcenia w chwili t. Dlatego też nie będzie miała ona znaczenia fizycznego dopóty, dopóki nie podamy związku pomiędzy skutkami, które superponujemy w określony sposób a przyczynymi, które je wywołują.

Jak widać z postaci równania (1.1) związek taki powinien być zadany w postaci różniczkowej, a ponieważ ma być spełniony warunek całkowalności, to wyrażenie pod znakiem całki musi być różniczką zupełną.

Uwzględniając warunek początkowy jako niezerowy, możemy (1.1) napisać alternatywnie

$$e_{ij}(t) - e_{ij}(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau)\theta(\tau-\tau_0)de_{ij}(\tau), \tag{1.3}$$

co implikuje formę różniczkową

$$\alpha(t, \tau, t_0)de_{ij}(\tau) = \alpha(t, \tau, t_0)\Phi_{ij}(\tau)d\tau, \tag{1.4}$$

ze względu na ciągłość parametru t. Jest ona równoważna formie (1.1) zgodnie z przyjętą klasą całkowalności i wyborem określonej miary. Z ostatniej formy wynika, że różniczkowa postać konstytutywna wyraża się jedyną «zwartą» funkcją tensorową parametru czasu Φ_{ij}, która może reprezentować nawet bardzo złożone zachowanie się materiału lepkosprężystego w procesie odkształcenia. Tutaj przez α oznaczamy czynnik

$$\alpha(t, \tau, t_0) = \theta(t-\tau)\theta(\tau-t_0). \tag{1.5}$$

Łatwo zauważyć, że przy założeniu różniczkowalności tensora odkształcenia otrzymamy z (1.4) wprost

$$\alpha(t, \tau, t_0)e_{ij}(\tau) = \alpha(t, \tau, t_0)\Phi_{ij}(\tau), \tag{1.6}$$

co nadaje funkcji Φ_{ij} bezpośrednią interpretację fizyczną.

Z formą (1.4) lub (1.1) wiążą się dwa, naszym zdaniem, podstawowe postulaty, które powinno spełniać równanie konstytutywne uzyskane w oparciu o zasadę uogólnionej superpozycji: postulat zwartości czasowej i postulat kompleksowości.

Aby wyjaśnić znaczenie wymienionych postulatów określimy w jaki sposób, naszym zdaniem, należy rozumieć zachowanie się ośrodka lepkosprężystego w zakresie nieliniowym. Wszystkie cechy reakcji materiału na działania, które istnieją obiektywnie, a które, zgodnie z obserwowalnymi faktami, możemy mu przypisać niezależnie od skali czasu obserwacji, ujawniają się z chwilą wystąpienia odpowiednich przyczyn w postaci (1.4). *Wynika stąd współzależność rozmaitych efektów fizycznych w czasie, na które zwykle* rozkładamy myślowo zachodzący proces ze względu na dogodność rozważań. W związku z powyższym należy stwierdzić, że postulat zwartości czasowej przeczy w ogólności możliwości addytywnej reprezentacji efektów nieliniowych w czasie. Efekty te są bowiem «wymieszane» w czasie, a kompleksowa reakcja wyraża się równaniem (1.4).

Takie podejście do ujęcia deformacji odbiega od znacznych założeń klasycznych, które za punkt wyjścia przyjmują addytywność formy równania konstytutywnego dla zakresu nieliniowego bez uzasadnienia. Można wykazać, jak na przykład uczyniliśmy to dla ośrodka lepkosprężystego w pracy [23], że jedynie jego liniowy zakres dopuszcza addytywną formę bez dodatkowych warunków. Nie należy jednak sądzić, iż ta ostatnia nie jest w ogóle dopuszczalna dla zakresu nieliniowego. Przeciwnie, taka możliwość istnieje. Należy jednak spełnić dodatkowe warunki w taki sposób, aby forma addytywna przedstawiała różniczkę zupełną, to znaczy aby tensor odkształcenia mógł być przedstawiony w postaci (1.1). Warunki dodatkowe, o których mowa, muszą z konieczności wiązać ze sobą funkcje fizyczne charakteryzujące rozmaite własności materiału. Oznacza to, że na przykład tzw. własności natychmiastowe muszą się wyrażać przez własności czasowe i na odwrót, co z klasycznego punktu widzenia wydaje się w pierwszej chwili niemożliwe. Tak jednak jest w istocie, jeżeli weźmiemy pod uwagę fakt, że funkcje o których mowa, są współczynnikami formy różniczkowej przy różniczkach wydzielonych zmiennych niezależnych równania konstytutywnego. Muszą one zatem, w myśl zasady (1.1), spełniać tzw. relacje krzyżowe.

Załóżmy, że konstytutywna forma różniczkowa ma w przypadku ogólnym postać

$$\overline{de}_{ij} = \overline{A}^1_{ij}d\varrho_1 + \overline{A}^2_{ij}d\varrho_2 + \ldots + \overline{A}^n_{ij}d\varrho_n, \tag{1.7}$$

gdzie

$$\overline{A}^k_{ij} = \overline{A}^k_{ij}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, ers), \tag{1.8}$$

a ϱ_k są niezależnymi zmiennymi fizycznymi. Wtedy, o ile forma ma przedstawiać różniczkę zupełną, muszą być spełnione relacje

$$\partial_l \overline{A}^k_{ij} + \overline{A}^l_{ij} \cdot \partial_{ers} \overline{A}^k_{pq} \delta_{pr} \delta_{qs} = \partial_k \overline{A}^l_{ij} + \overline{A}^k_{ij} \cdot \partial_{ers} \overline{A}^l_{pq} \delta_{pr} \delta_{qs} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.9}$$

gdzie symbole różniczkowania mają następujące znaczenie

$$\partial_l = \partial/\partial\varrho_l, \qquad \partial_{ers} = \partial/\partial_{ers}, \tag{1.10}$$

a δ_{ij} oznacza tensor jednostkowy.

Jeżeli jedną ze zmiennych niezależnych jest czas, co oczywiście ma miejsce dla ciała lepkosprężystego, wówczas zgodnie z zasadą przyczynowości piszemy

$$\overline{de}_{ij} = \alpha de_{ij}, \qquad \overline{A}^k_{ij} = \alpha A^k_{ij}, \tag{1.11}$$

gdzie α jest czynnikiem (1.5).

W szczególnym przypadku (1.8) może nie mieć charakteru równania zupełnego, a wtedy relacje (1.9) redukują się do postaci

$$\partial_l \overline{A}^k_{ij} = \partial_k \overline{A}^l_{ij}. \tag{1.12}$$

Jak wynika z naszych rozważań, postulat kompleksowości równania konstytutywnego lepkosprężystości nieliniowej będzie spełniony dla addytywnej formy superpozycyjnej (1.7), jeżeli spełnione będą relacje (1.9) lub (1.12). Jak wykazaliśmy w pracy [23], relacje te są spełnione dla ośrodka liniowego tożsamościowo. W danym przypadku natomiast, dostarczają one dodatkowych związków konstytutywnych pomiędzy funkcjami charakteryzującymi rozmaite własności fizyczne materiału, które zabezpieczają kompleksowość równania konstytutywnego w przypadku stosowania uogólnionej superpozycji.

2. Funkcjonalna interpretacja równania konstytutywnego nieliniowej lepkosprężystości

Równanie (1.1) wyrażające uogólnioną zasadę superpozycji może być interpretowane fizykalnie jako funkcjonał, w naszym przypadku ośrodka nieściśliwego, dewiatora naprężenia s_{ij}. Możemy zatem napisać formalnie

$$e_{ij}(t) = L(s;t)s_{ij}, \tag{2.1}$$

gdzie L jest nieliniowym operatorem funkcjonalnym (całkowym) nałożonym na dewiator naprężenia, zaś s oznacza intensywność naprężenia[2)].

Formę funkcjonału (2.1) otrzymamy rozważając przestrzeń funkcji ciągłych (mierzalnych i ograniczonych) $s_{ij}(\tau)$, w której

$$e_{ij}(t) = \lim \sum s_{ij}(\tau^*)\Delta_\tau K[t, \tau^*, s(\tau^*)] = \int\limits_{t_0-0}^{t+0} s_{ij}(\tau)\, d_\tau K[t, \tau, s(\tau)], \tag{2.2}$$

gdzie K odgrywa rolę kompleksowej funkcji fizycznej charakteryzującej nieliniowe własności lepkosprężyste materiału, τ^* oznacza dowolną chwilę z podprzedziału $\Delta\tau$ przedziału $[t_0-0, t+0]$, zaś $\Delta_\tau K$ jest przyrostem funkcji K.

Jak widać, funkcjonał typu (2.2) może być przedstawiony w postaci wydzielonych (addytywnych) trzech członów, odpowiadających reprezentacji całki Stieltjesa, przez którą się wyraża. Pierwszy z tych członów jest związany z nieciągłościami funkcji fizycznej K, a zatem reprezentuje efekty typu natychmiastowego. Drugi człon przedstawia bezwzględ-

[2)] Tutaj i w dalszym ciągu zakładamy, że operator L zależy tylko od drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia, tzn. od intensywności naprężenia, przez którą ten ostatni się wyraża.

nie ciągłą część funkcji K, a więc związany jest z ciągłością efektów zależnych od czasu o sumowalnej gęstości dystrybucji. Wreszcie, trzeci człon, który w naszej interpretacji pomijamy, odpowiada efektom rozłożonym w sposób ciągły na zbiorze miary zero.

W ten sposób funkcjonał (2.2) sprowadzamy ostatecznie do postaci

$$e_{ij}(t) = s_{ij}(t)\Psi[s(t)] - \int_{t_0}^{t} s_{ij}(\tau) d_\tau \{\Psi[s(\tau)] + H[t, \tau, s(\tau)]\} d\tau, \tag{2.3}$$

gdzie przyjęliśmy

$$K[t, \tau, s(\tau)] = -\{\Psi[s(\tau)]\theta(t-\tau) + H[t, \tau, s(\tau)]\}. \tag{2.4}$$

Tutaj funkcja Ψ wyraża nieliniowe efekty, które występują w sposób natychmiastowy w chwili obserwacji t, zaś funkcja H odpowiedzialna jest za efekty rozciągnięte na przedziale $[t_0, t]$.

Forma funkcjonalna równania konstytutywnego (2.3) jest uogólnieniem koncepcji całkowicie nieliniowego materiału lepkosprężystego podanej w pracy [21]. Tutaj została ona otrzymana na innej drodze.

Jak wynika z naszych rozważań, superpozycyjna postać funkcjonału (2.2) w zupełności odpowiada idei kompleksowej reprezentacji nieliniowych własności lepkosprężystych. Addytywna forma (2.3) wynika tutaj w sposób naturalny ze skojarzeń o charakterze czysto formalnym, które jednak posiadają w naszym przypadku interpretację fizyczną.

3. *Rozwinięcia funkcjonału konstytutywnego nieliniowej lepkosprężystości*

Omówiona już we wstępie koncepcja GREENA i RIVLINA [2], [3], [4] reprezentacji własności materiałów z pamięcią przy pomocy funkcjonalnych szeregów potęgowych dla funkcjonałów analitycznych ma z natury rzeczy charakter czysto ilościowy. Oznacza to, że nieliniowość jest uwzględniona w kolejnych przybliżeniach w postaci «dodatków» do wyjściowego lub podstawowego stanu liniowego. Wiadomo jednak, że nie wszystkie funkcjonały dają się przedstawiać przy pomocy rozwinięcia Volterry, którego człony mają postać jednorodnych regularnych funkcjonałów.

Ideą naszą jest próba przedstawienia rozwinięcia funkcjonału typu (2.3), które posiadałoby charakter jakościowy, co z kolei pozwoliłoby na określenie charakteru nieliniowości.

Bez umniejszenia ogólności naszych rozważań, możemy przyjąć funkcjonał

$$e_{ij}(t) = -\int_{t_0}^{t} s_{ij}(\tau) d_\tau H[t, \tau, s(\tau)] d\tau, \tag{3.1}$$

a więc ograniczyć się do stanu deformacji zależnej od czasu.

Przyrost zmiennej funkcjonału s_{ij} można przedstawić w następującej postaci

$$\Delta s_{ij}(\tau) = s_{ij}(\tau, \varrho) - s_{ij}(\tau, O) = \varrho(\partial_\varrho s_{ij})_{\varrho=0} + \frac{1}{2}\varrho^2(\partial_\varrho^2 s_{ij})_{\varrho=0} + \ldots, \tag{3.2}$$

gdzie ϱ jest parametrem rozwinięcia w punkcie

$$s_{ij}^0 = s_{ij}(\tau, O). \tag{3.3}$$

Przyrostowi s_{ij} w postaci (3.2) odpowiada przyrost funkcjonału (3.1)

$$(3.4)\quad \Delta\bar{e}_{ij}(t) = L(t;\varrho)s_{ij}(\tau;\varrho) - L(t;O)s_{ij}(\tau;O) = \varrho(\partial_\rho L s_{ij})_{\rho=0} + \frac{1}{2}\varrho^2(\partial_\rho^2 L s_{ij})_{\rho=0} + \ldots,$$

co jest równoważne reprezentacji wariacyjnej

$$(3.5)\quad \Delta\bar{e}_{ij}(t) = \delta\bar{e}_{ij}(t) + \frac{1}{2}\delta^2\bar{e}_{ij}(t) + \ldots.$$

W ten sposób wariacje funkcjonału wyrażone są przez pochodne funkcjonalne (3.1) dla wartości parametru rozwinięcia $\varrho = 0$.

Rozwinięcie funkcjonału (3.1) przedstawione powyżej mają charakter jakościowy w tym sensie, że mogą dotyczyć dowolnego stanu nieliniowego materiału lepkosprężystego w dowolnej chwili z rozważanego przedziału czasu. Stan wyjściowy dla rozwinięcia odpowiada zatem jakościowo tym efektom, które ujmuje teoria nieliniowa i dzięki temu może ono znaleźć szerokie zastosowanie w przybliżonych rozwiązaniach brzegowych zagadnień nieliniowej lepkosprężystości. Rozwiązania podobnego typu dla zakresu słabej nieliniowości, które opierają się na stanie liniowym jako stanie wyjściowym, podane zostały w szeregu naszych prac omówionych we wstępie.

4. Uwagi końcowe

Zasadniczym celem niniejszej pracy było podanie krytycznego przeglądu interesujących nas bezpośrednio kierunków w teorii nieliniowej lepkosprężystości, a na tej podstawie omówienie własnych rezultatów, zarówno w zakresie teorii, jak i jej zastosowań do problematyki o charakterze praktycznym.

Niezależnie od powyższego celu, poruszyliśmy również w sposób poglądowy pewne wybrane zagadnienia teorii nieliniowej lepkosprężystości o znaczeniu ogólnym, które są przedmiotem naszych aktualnych prac. Jest rzeczą oczywistą, że niektóre z nich mają w przedstawionym ujęciu charakter dyskusyjny, jak również nie wyczerpują interesującej nas tematyki.

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. Anal., 1, **1** (1952),
2. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Part I, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, **1** (1957),
3. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, J. M. SPENCER, *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Part II, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, **3** (1959),
4. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Part III, Arch, Rat. Mech. Anal., 4, **5** (1960),
5. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, **2** (1958),
6. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *On certain steady flows of general fluids*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, **3** (1959),
7. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Some fundamental concepts of the theory of nonlinear viscoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, **18**, (1966),

7a. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Generalized creep function and the problem of inversion in the theory of nonlinear viscoelasticity*, Bull. Acad. Pol. Sci., 5, 15 (1967),
7b. Z. BYCHAWKI, A. FOX, *Generalized superposition principle for nonlinear range and small nonlinearity in the theory of nonlinear viscoelasticity*, Bull. Acad. Pol. Sci., 5, 15 (1967),
8. H. X. АРУТЮНЯН, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Москва-Ленинград 1952,
9. H. LEADERMAN, *Elastic and creep properties of filamentous and other high polymers*, The Textile Foundation, Washington 1943,
10. H. LEADERMAN, *Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike natural polymers*, 32nd Annual Meeting of the Am. Soc. Rheol., Madison,
11. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Расчёт деталей машин на ползучесть*, Изв. Ак. Наук СССР, От. тех. наук, 6, (1948),
12. F. K. G. ODQVIST, J. HULT, *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*, Berlin-Goettingen-Heidelberg 1962,
14. Z. BYCHAWSKI, *Odkształcenia opóźnione w betonie*, Arch. Inż. Ląd., 1 (1956),
15. Z. BYCHAWSKI, *Straty naprężeń w belce sprężonej w świetle nieliniowej teorii pelzania*, Czasop. Techn., 4, (1957),
16. Z. BYCHAWSKI, *Analiza reologiczna belki sprężonej armaturą sztywną*, Rozpr. dokt., 1957,
17. Z. BYCHAWSKI, *Le problème du fluage non-linéaire du béton dans les constructions précontraintes*, Bull. RILEM, 4 (1959),
17a. Z. BYCHAWSKI, *Le problème du fluage non-linéaire du béton dans constructions précontraintes*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1, 7 (1959),
18. W. OLSZAK, S. KAUFMAN, C. EIMER, Z. BYCHAWSKI, *Teoria Konstrukcji Sprężonych*, Tom I, Warszawa 1961,
19. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Foundations of a theory of nonlinear viscoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 4. 19 (1967),
19a. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Theory of nonlinear behaviour of viscoelastic bodies*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8, 15 (1967),
19b. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Theory of nonlinear behavior of viscoelastic bodies*, Tehnika, XXII, 7 (1968),
20. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *An outline of the theory of complete nonlinear viscoelastic behaviour*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8, 15 (1967),
21. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *The constitutive equation of a complete nonlinear viscoelastic material*, Acta Mechanica, 6, (1968),
22. A. BOROWSKI, Z. BYCHAWSKI, *Podstawowe własności nieliniowych ciał lepkosprężystych*, III Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1966,
23. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Some concepts of nonlinear thermo-viscoelasticity*, 1st Int. Conf. on Structural Mech. in Reactor Technology, Vol. 5, Part L, Berlin 1971,
24. Z. BYCHAWSKI, *Pewne szczególne zagadnienia teorii nieliniowej lepkosprężystości*, Sympozjum polsko-francuskie „Zagadnienia reologii", Warszawa-Jabłonna 1971,
25. Z. BYCHAWSKI, *Distributional aspects of the theory of plastic time phenomena*, Symposium on Foundations of Plasticity, Warszawa 1972,
26. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Energetyczna interpretacja stanów krytycznych w ciałach lepkosprężystych*, Prace IPPT, 2, (1967),
27. W. OLSZAK, Z. BYCHAWSKI, *Creep failure of nonlinear rotational shells*, 8th Congress of AIPC, New York 1968,
28. W. OLSZAK, Z. BYCHAWSKI, *Creep phenomena and failure of nonlinear rotational membranes*, Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, Moskwa 1969,
29. Z. BYCHAWSKI, *Badanie wyboczenia przy pelzaniu płyt kołowych w zakresie małych i dużych ugięć*, Rozpr. Inż., 4, 9 (1961),
29a. Z. BYCHAWSKI, *Creep buckling of geometrically nonlinear circular plates*, PAN Kraków, Mechanika 2, 1966,
30. Z. BYCHAWSKI, *Investigation of creep buckling of a cylindrical sheet panel in the range of small and moderately large deflections*, Proc. World Conf. on Shell Structures IASS, US Nat. Acad. of Sciences, Washington 1964,

31. Z. BYCHAWSKI, *Some problems of creep bending and creep buckling of viscoelastic sheet panels in the range of large deflections*, Proc. of IASS Symposium Nonclassical Shell Problems, Warszawa 1963,
32. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Creep buckling of viscoelastic nonlinear spherical shell*, Proc. of IASS Symposium Large-Span Shells, Leningrad 1966,
32a. З. БЫХАВСКИ, Х. КОПЕЦКИ, *Потеря устойчивости при ползучести вязкоупругой и геометрически нелинейной сферической оболочки*, Большепролетные оболочки, Труды Межд. Конгресса, Москва 1969.
33. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Wyboczenie przy pełzaniu geometrycznie nieliniowej powłoki kulistej*, Rozpr. Inż., 3, **16** (1968),
34. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Experimental and theoretical analysis of creep buckling of nonlinear spherical shells*, Coll. Int. RILEM Experimental Analysis of Instability Problems on Reduced and Full-Scale Models, Buenos Aires 1971,
35. Z. BYCHAWSKI, *Duże ugięcia sprężyście nieliniowych membran kołowych*, Rozpr. Inż., 1, **14** (1966),
36. Z. BYCHAWSKI, *Large deflections of the elasto-creeping circular membrane*, Arch. Mech. Stos., 3, **17** (1965)
37. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Nieliniowe zagadnienia deformacji sprężysto-plastycznych i pełzania membran kołowych*, Rozpr. Inż., 3, **15** (1967),
38. H. KOPECKI, *Reologiczne problemy nieliniowej deformacji powłok obrotowych w stanie membranowym*, Rozpr. doktorska, Kraków 1967,
39. Z. BYCHAWSKI, *O stosowalności analogii sprężystej w zakresie nieliniowej geometrycznie teorii pełzania membran kołowych*, Rozpr. Inż., 3, **13** (1965),
40. Z. BYCHAWSKI, *Elastic analogue in the general case of a geometrically nonlinear membrane subjected to creep*, Arch. Mech. Stos., 4, **17** (1965),
41. F. K. G. ODQVIST, *Одна нелинейная задача о собственных значениях в теории ползучести*, Изв. АН СССР, Москва 1961.
42. B. STORÅKERS, *Finite creep of a circular membrane under hydrostatic pressure*, Acta Polytechnica Scandinavica, Mech. Eng. Series, No. 44, (1969),
43. Z. BYCHAWSKI, *Combined instantaneous and creep deformation of rotational shells in a nonlinear membrane state*, Southeastern Conf. on Theor. and Appl. Mech., Auburn 1966,
44. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Rheological states of geometrically nonlinear rotational membranes*, IUTAM Symposium Theory of Thin Shells Copenhagen 1967, Berlin-Heidelberg-New York 1969,
45. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Elasto-plastic and creep deformation of geometrically nonlinear shallow spherical shells in membrane state*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8, 15 (1967),
45a. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Sprężysto-plastyczna deformacja i pełzanie powłoki kulistej*, Rozpr. Inż., 2, **15** (1967),
46. Z. BYCHAWSKI, *Exact solution of creep bending of a long circular cylindrical shell under internal pressure*, 10th Yugoslav Congress of Theor. and Appl. Mech., Basko Polje 1970,
47. Z. BYCHAWSKI, *Thermal and creep analysis of cylindrical shells under internal pressure*, Ist Int. Conf. on Structural Mech. in Reactor Technology, Vol. 5, Part L, Berlin 1971,
48. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *O podstawowych pojęciach reologii*, Zagadnienia Maszyn Przepływowych-Problems of Fluid-Flow Machines, Warszawa 1969,
49. Z. BYCHAWSKI, *Introduction into theoretical and applied rheology*, The Technical University of Danmark, Dept. of Appl. Mech., Part I, II, Copenhagen 1968,
50. Z. BYCHAWSKI, H. SIENNICKI, *Zginanie tarczy kołowej w zakresie nieliniowej deformacji natychmiastowej i pełzania*, III Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1966,
51. Z. BYCHAWSKI, *Exact solutions of nonlinear instantaneous and creep bending problems of plates with large deflections*, 2nd IUTAM Symposium on Creep in Structures, Goeteborg 1970,
52. Z. BYCHAWSKI, *Resolving kernel of the Volterra equation in the case of the generalized creep function*, Arch. Mech. Stos., 2, **9** (1957),
52a. Z. BYCHAWSKI, *On the application of creep function in generalised form*, Bull. Acad. Pol. Sci., 2, 4 (1957),
53. Z. BYCHAWSKI, K. PISZCZEK, *On the operational perturbation method of solution of the Volterra nonlinear integral equations*, IBTP Reports, 14, 1968,

54. Z. BYCHAWSKI, *Ueber eine Methode der Umkehrung von der Materialgleichung fuer nichtlineare viskoelastische Stoffe*, VI. Int. Kongress ueber Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Weimar 1972,
55. Z. BYCHAWSKI, *Large deflections of nonlinear viscoelastic rotational membranes*, Symposium IASS Tension Structures and Space Frames, Tokyo-Kyoto 1971.
56. Z. BYCHAWSKI, *Duże odkształcenia pełzających powłok obrotowych*, XVI Konf. Nauk. KIL PAN i KN PZITB, Krynica 1970,
57. A. BOROWSKI, Z. BYCHAWSKI, *Własności reologiczne materiałów niestabilnych*, 1971 (praca przygotowana do druku).
58. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Rheological theory of membranes undergoring large deformations*, 9th Congress AIPC, Amsterdam 1972.

Резюме

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

В работе обсуждаются некоторые направления развития нелинейной теории вязкоупругости. На фоне этих тенденций представлены результаты, полученные автором так в области теоретических исследований, как и в практических приложениях этой теории.

В общей форме наглядно изложены избразнные теоретические вопросы, являющиеся в настоящее время предметом работы автора. В частности, представлянот интерес исследования вида определяющего уравнения нелинейной вязкоупругости, получаемого на основе обобщенного принципа суперпонирования, постулатов комплексности и временной компактности, функциональной трактовки этого уравнения, а также функционального разложения для решения краевых задач.

Summary

THEORY OF NON-LINEAR VISCOELASTICITY AND ITS APPLICATIONS

In the paper are critically reviewed certain trends of development of the theory of viscoelasticity; on this background author's results are presented, in the field of both the theory and its practical applications.

Discussed are certain selected problems of the theory being the subject of author's current interest. In particular, the forms of constitutive equations are examined governing the behaviour of non-linear elastic bodies; they follow from the generalized theorem of superposition. The functional interpretation of that equation is given, as also its functional generalization from the point of view of its applications to boundary value problems.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.