

NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA  
CIAŁ O DUŻEJ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ W WARUNKACH  
KONWEKCYJ SWOBODNEJ W POWIETRZU

WŁADYSŁAW SZYMAŃSKI (RZESZÓW)

Oznaczenia

- $\lambda$  przewodność cieplna ciała,  
 $\lambda_p$  przewodność cieplna powietrza,  
 $\alpha$  współczynnik przejmowania ciepła,  
 $a$  dyfuzyjność cieplna,  
 $t$  czas,  
 $T$  temperatura chwilowa ciała,  
 $T_f$  temperatura powietrza,  
 $\theta$  temperatura bezwymiarowa ciała,  
 $a$  indeks wskazujący wartości dla temperatury  $T_a = 273^\circ\text{K}$ ,  
 $o$  indeks wskazujący wartości dla temperatury początkowej ciała  
 $c$  właściwa pojemność cieplna,  
 $\rho$  gęstość ciała,  
 $\beta_p$  współczynnik rozszerzalności objętościowej powietrza,  
 $\nu_p$  lepkość kinematyczna powietrza,  
 $\mu_p$  lepkość dynamiczna powietrza,  
 $p$  ciśnienie,  
 $R$  indywidualna stała gazowa powietrza,  
 $g$  przyspieszenie ziemskie,  
 $l$  wymiar charakterystyczny ciała,  
 $l_1$  wymiar charakterystyczny w liczbie Nusselta i Grashofa,  
 $A$  powierzchnia ciała,  
 $V$  objętość ciała,  
 $C, C_1, C_2$  stałe,  
 $n$  wykładnik iloczynu liczb Grashofa i Prandtla,
- $(\text{Bi}) = \frac{\alpha l}{\lambda}$  liczba Biota,  
 $(\text{Fo}) = \frac{at}{l^2}$  liczba Fouriera,  
 $(\text{Nu}) = \frac{\alpha l_1}{\lambda_p}$  liczba Nusselta,  
 $(\text{Pr}) = \frac{\nu_p}{a_p}$  liczba Prandtla,  
 $(\text{Gr}) = \frac{g\beta_p l_1^3}{\nu_p^2} (T - T_f)$  liczba Grashofa.

## 1. Wstęp

Rozwiązania nieustalonego przewodzenia ciepła podawane są najczęściej przy założeniu warunków brzegowych III rodzaju, w tym stałego współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha$ . Założenie stałej wartości  $\alpha$  jest jednak spełnione tylko podczas konwekcji wymuszonej. Podczas konwekcji swobodnej natomiast  $\alpha$  jest w istotny sposób zależne od temperatury i stąd przyjęcie w takim przypadku  $\alpha = \text{const}$  powoduje znaczne błędy. Uwzględnienie zmienności  $\alpha$  stwarza natomiast znaczne trudności w rozwiązaniu problemu i stąd brak rozwiązań ogólnych tego rodzaju przypadków. Rozwiązania szczególne np. dla płyty płaskiej są na tyle złożone, że nie nadają się do bezpośredniego stosowania w praktyce. Dla częściowego przynajmniej wypełnienia tej luki w niniejszym opracowaniu rozpatrzono nieustalone przewodzenie ciepła w jednym z przypadków, mianowicie ciał o dużej przewodności w warunkach konwekcji swobodnej powietrza. Ograniczenie rozwiązania tylko do ciał o dużej przewodności cieplnej pozwala na założenie jednakowej temperatury w całym ciele i wymaga, aby  $Bi < 0,1$ . Takie przypadki w czasie ogrzewania lub chłodzenia w powietrzu mają często miejsce, gdy wymiary ciała są niezbyt duże, szczególnie dla metali.

## 2. Zależność współczynnika przejmowania ciepła od temperatury bezwymiarowej ciała

Dla ciała o małym oporze cieplnym, umieszczonego w ośrodku o stałej temperaturze  $T_f$ , podczas jego chłodzenia można napisać:

$$(2.1) \quad -c\rho VdT = \alpha A(T - T_f)dt.$$

Po wprowadzeniu temperatury bezwymiarowej

$$(2.2) \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{\Delta T}{\Delta T_0}$$

równanie (2.1) przybiera postać:

$$(2.3) \quad -c\rho Vd\theta = \alpha A\theta dt.$$

Założenie stałej wartości  $\alpha = \alpha_0$  prowadzi do rozwiązania [1]:

$$(2.4) \quad \ln \theta' = -\frac{l}{L} (Bi)_0 (Fo),$$

gdzie  $L = V/A$ .

Dla konwekcji swobodnej  $\alpha$  oblicza się z równania [2]:

$$(2.5) \quad (Nu) = C[(Gr)(Pr)]^n.$$

Stałe  $C$  i  $n$  są zależne od iloczynu liczb Grashofa i Prandtla. Po podstawieniu wyrażeń opisujących liczby podobieństwa otrzymujemy:

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{\lambda_p}{l_1} C \left( \frac{g\beta_p l_1^3}{\nu_p^2} \Delta T \right)^n (Pr)^n.$$

W równaniu tym dla konkretnego przypadku można przyjąć jako stałe wielkości  $C$ ,  $n$ ,  $l_1$ ,  $g$ , a dla powietrza w szerokim zakresie temperatur również (Pr). Można więc zapisać:

$$(2.7) \quad \alpha = C_1 \lambda_p \left( \frac{\beta_p}{\nu_p^2} \right)^n \Delta T^n$$

oraz odpowiednio dla początkowej różnicy temperatur  $\Delta T_0$ :

$$(2.8) \quad \alpha_0 = C_1 \lambda_{p0} \left( \frac{\beta_{p0}}{\nu_{p0}^2} \right)^n \Delta T_0^n.$$

Uzależnijmy następnie chwilową wartość  $\alpha$  od jej wartości początkowej  $\alpha_0$ . Otrzymujemy:

$$(2.9) \quad \alpha = \alpha_0 \frac{\lambda_p}{\lambda_{p0}} \left( \frac{\beta_p}{\beta_{p0}} \right)^n \left( \frac{\nu_{p0}}{\nu_p} \right)^{2n} \theta^n.$$

Występujące w tym wzorze własności powietrza bierze się dla jego średniej temperatury

$$(2.10) \quad T_m = \frac{T + T_f}{2}.$$

Przyjęto następujące zależności własności powietrza od temperatury:

$$(2.11) \quad \lambda_p = \lambda_{pa} + b(T_m - T_a),$$

$$(2.12) \quad \beta_p = \frac{1}{T_m},$$

$$(2.13) \quad \nu_p = \frac{\mu_p}{\rho_p},$$

$$(2.14) \quad \mu_p = \mu_{pa} \frac{1 + \frac{C_2}{T_a}}{1 + \frac{C_2}{T_m}} \sqrt{\frac{T_m}{T_a}},$$

$$(2.15) \quad \rho_p = \frac{p}{RT_m}.$$

Wprowadzenie tych zależności oraz temperatury bezwymiarowej do równania (2.9) prowadzi do zależności:

$$(2.16) \quad \alpha = \alpha_0 \frac{2 \left( \frac{\lambda_{pa}}{b} + T_f - T_a \right) + \Delta T_0 \theta}{2 \left( \frac{\lambda_{pa}}{b} + T_f - T_a \right) + \Delta T_0} \left[ \frac{2(T_f + C_2) + \Delta T_0 \theta}{2(T_f + C_2) + \Delta T_0} \right]^{2n} \times \left( \frac{2T + \Delta T_0}{2T_f + \Delta T_0 \theta} \right)^{6n} \theta^n.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$(2.17) \quad z_1 = 2 \left( \frac{\lambda_{pa}}{b} + T_f - T_a \right),$$

$$(2.18) \quad z_2 = 2(T_f + C_2),$$

$$(2.19) \quad z_3 = 2T_f,$$

$$(2.20) \quad z_4 = \Delta T_0.$$

Wówczas

$$(2.21) \quad \alpha = \alpha_0 \frac{z_1 + z_4 \theta}{z_1 + z_4} \left( \frac{z_2 + z_4 \theta}{z_2 + z_4} \right)^{2n} \left( \frac{z_3 + z_4}{z_3 + z_4 \theta} \right)^{6n} \theta^n,$$

lub oznaczając:

$$(2.22) \quad f_1(\theta) = \frac{z_1 + z_4 \theta}{z_1 + z_4} \left( \frac{z_2 + z_4 \theta}{z_2 + z_4} \right)^{2n} \left( \frac{z_3 + z_4}{z_3 + z_4 \theta} \right)^{6n} \theta^n,$$

$$(2.23) \quad \alpha = \alpha_0 f_1(\theta).$$

W ten sposób współczynnik przyjmowania ciepła został uzależniony od temperatury bezwymiarowej ciała, temperatury ośrodka i początkowej różnicy temperatur.

### 3. Uwzględnienie zmienności $\alpha$ w rozwiązaniu nieustalonego przewodzenia ciepła

Wyznaczoną wartość  $\alpha$  według (2.23) można wstawić do (2.3) otrzymując

$$(3.1) \quad -c\rho V d\theta = A \alpha_0 f_1(\theta) \theta dt.$$

Wprowadzając następujące przekształcenia:

$$(3.2) \quad \frac{\alpha_0}{c\rho} \frac{A}{V} = \frac{\alpha_0 l}{\lambda} \frac{\lambda}{c\rho} \frac{1}{l^2} \frac{l}{V/A} = \frac{l}{L} (\text{Bi})_0 \frac{a}{l^2}$$

i oznaczając:

$$(3.3) \quad f(\theta) = \frac{1}{\theta f_1(\theta)}$$

mamy:

$$(3.4) \quad f(\theta) d\theta = -\frac{l}{L} (\text{Bi})_0 \frac{a}{l^2} dt.$$

Ostatnie równanie daje po scałkowaniu zależność bezwymiarowej temperatury ciała od liczby Fouriera. Otrzymuje więc:

$$(3.5) \quad \int f(\theta) d(\theta) = -\frac{l}{L} (\text{Bi})_0 (\text{Fo}).$$

Całki  $f(\theta) d\theta$  nie można wyznaczyć analitycznie, natomiast w prosty sposób można ją obliczyć na maszynie cyfrowej.

### 4. Wyniki obliczeń

Dokonano obliczeń na maszynie cyfrowej dla dwóch charakterystycznych najczęściej spotykanych przypadków:

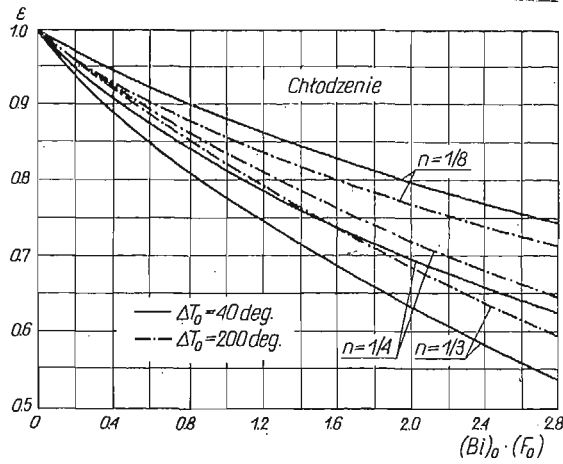
a) chłodzenia ciał o temperaturze początkowej  $T_0 = T_f + \Delta T_0$  w powietrzu o stałej temperaturze  $T_f = 20^\circ\text{C}$ ,

b) ogrzewania ciał o temperaturze początkowej  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  w powietrzu o stałej temperaturze  $T_f = T_0 + \Delta T_0$ .

W obu tych przypadkach wykonano obliczenia dla  $\Delta T_0 = 40, 80, 120, 160, 200$  deg oraz wykładnika  $n = 1/8, 1/4, 1/3$ . Obliczono przy tym nie wartość temperatury bezwymiarowej, lecz stosunek logarytmu naturalnego tej temperatury ( $\ln \theta$ ) otrzymanej z (3.5), do logarytmu naturalnego temperatury bezwymiarowej ( $\ln \theta'$ ) otrzymanej ze wzoru (2.4) (tzn. przy stałej wartości  $\alpha$ ) dla tej samej liczby Fouriera.

Oznaczono:

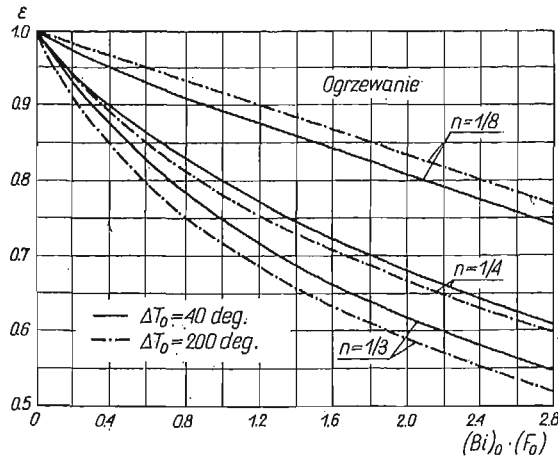
$$(4.1) \quad \varepsilon = \frac{\ln \theta}{\ln \theta'}$$



Rys. 1

Zależność  $\varepsilon = f[(Bi)_0(Fo)]$  dla chłodzenia przedstawiono na rys. 1, natomiast dla ogrzewania na rys. 2. Podane na wykresach krzywe można aproksymować równaniem:

$$(4.2) \quad \varepsilon = X[(Bi)_0(Fo)]^Y$$



Rys. 2

Popęlniony przy tym błąd jest mniejszy od 1% w przypadku chłodzenia i mniejszy od 2% w przypadku ogrzewania. Wielkości  $X$  i  $Y$  są funkcją  $\Delta T_0$  i dla danej wartości  $n$  mogą być wyrażone wzorami:

$$(4.3) \quad X = X_1 + X_2 \Delta T_0,$$

$$(4.4) \quad Y = Y_1 + Y_2 \Delta T_0.$$

Stałe  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  podano w tablicy 1.

Tablica 1

	Jedn.	Chłodzenie			Ogrzewanie		
		$n = \frac{1}{8}$	$n = \frac{1}{4}$	$n = \frac{1}{3}$	$n = \frac{1}{8}$	$n = \frac{1}{4}$	$n = \frac{1}{3}$
$X_1$	—	0,888	0,810	0,767	0,888	0,803	0,757
$X_2 \cdot 10^4$	$\frac{1}{\text{deg}}$	-1,50	1,50	3,00	1,90	-0,95	-2,00
$Y_1$	—	0,905	0,817	0,829	0,895	0,775	0,747
$Y_2 \cdot 10^4$	$\frac{1}{\text{deg}}$	-7,63	2,81	6,31	6,75	-1,65	-3,90

### 5. Zastosowanie wyników obliczeń

Wyznaczone wartości poprawek pozwalają na obliczenie w prosty sposób rzeczywistej temperatury bezwymiarowej ciała dla podanych poprzednio warunków z wykorzystaniem równania (4.1). Podstawiając w tym równaniu zależność (2.4) otrzymujemy:

$$(5.1) \quad \ln \theta = -\varepsilon \frac{l}{L} (\text{Bi})_0 (\text{Fo}).$$

W równaniu powyższym liczbę Biota należy liczyć dla warunków w chwili początkowej. Wartość  $\varepsilon$  należy wziąć dla  $\Delta T_0$  oraz  $n$  wynikającego z początkowej wartości  $[(\text{Gr}) (\text{Pr})]$ .

Jeżeli podczas wymiany ciepła występuje taka temperatura średnia powietrza, że przy obliczaniu  $\alpha$  następuje zmiana  $C$  i  $n$ , cały proces należy podzielić na części w granicach stosowania danej wartości  $C$  i  $n$ . Dla każdej części procesu należy stosować procedurę podaną w niniejszej pracy.

Graniczną temperaturę bezwymiarową  $\theta_g$ , do której można stosować początkową wartość  $C$  i  $n$ , można obliczyć z przybliżonego wzoru:

$$(5.2) \quad \theta_g = \left( \frac{\lambda_{pa}}{\alpha_0 l_1} C \right)^{\frac{1}{n}} [(\text{Gr}) (\text{Pr})]_g.$$

$[(\text{Gr}) (\text{Pr})]_g$  jest wartością graniczną, przy której należy dokonać zmiany  $C$  i  $n$ .

### 6. Wymieniane ciepło

Przy obliczaniu ciepła wymienianego pomiędzy chłodzonym lub ogrzewanym ciałem i otoczeniem w dowolnym czasie należy korzystać ze wzoru:

$$(6.1) \quad Q = cQV\Delta T_0(\theta_1 - \theta_2),$$

który wynika bezpośrednio z bilansu energii.  $\theta_1$  jest średnią bezwymiarową temperaturą ciała w chwili początkowej,  $\theta_2$  odpowiednio w chwili końcowej. Przy poczynionych założeniach są to równocześnie temperatury rzeczywiste obliczone z (5.1).

### 7. Wnioski

Wprowadzenie zmiennej wartości współczynnika przejmowania ciepła w warunkach brzegowych III rodzaju do równań nieustalonego przewodzenia ciepła ciał o małym oporze cieplnym daje równanie, którego nie można rozwiązać analitycznie. Rozwiązanie na maszynie cyfrowej pozwala na wprowadzenie wykresów lub zastępczych wzorów poprawek, których uwzględnienie w obliczeniach uproszczonych daje temperatury rzeczywiste. Przeprowadzone obliczenia nie uwzględniają wprawdzie promieniowania, jednakże wynikający stąd błąd jest stosunkowo niewielki dla przyjętych temperatur. Nawet dla  $\Delta T_0 = 200$  deg nie przekracza 5% i dlatego obliczenia ograniczono do tej właśnie różnicy temperatur. Przy temperaturach wyższych promieniowania pominąć nie można.

Temperatura ciała zmienia się wolniej niż to wynika z zależności nie uwzględniającej zmienności współczynnika przejmowania ciepła. Różnice rosną wraz ze wzrostem liczby Fouriera i mogą dochodzić do 50%. Wykorzystując więc przedstawione wyniki można znacznie dokładniej określić temperaturę ciała o dużej przewodności cieplnej chłodzonego lub ogrzewanego w powietrzu. Podane zależności mogą być stosowane również przy temperaturach odbiegających od założonej temperatury bazowej 20°C o  $\pm 10$  deg przy zachowaniu dokładności wynikającej z odczytu  $\varepsilon$ .

### Literatura cytowana w tekście

1. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1963.
2. W. GOGÓŁ, *Wymiana ciepła. Tablice i wykresy*, wyd. 2, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.

### Резюме

#### НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕЛ С БОЛЬШОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ВОЗДУХА

В работе приводится решение нестационарной теплопроводности тел с большой теплопроводностью в присутствии теплоотвода на поверхности путем свободной конвекции. Проведены вычисления для свободной конвекции воздуха. Полученные результаты сравниваются с результатами расчетов при сохранении постоянного значения коэффициента теплоотвода.

## S u m m a r y

UNSTEADY HEAT TRANSFER IN BODIES OF HIGH THERMAL CONDUCTIVITY  
IN THE CONDITIONS OF FREE CONVECTION IN THE AIR

The paper presents a solution of the problem of unsteady heat transfer in bodies of high thermal conductivity; at the surface of the body the heat is exchanged under the conditions of free convection. Calculations are made in the case of air convection. The results obtained are compared with those evaluated under the assumption of a constant heat transfer coefficient.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, RZESZÓW

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lipca 1973 r.*

---