

PRZEPŁYW CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE
MIĘDZY POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI: NIERUCHOMĄ
I DRGAJĄCĄ SKRĘTNIE

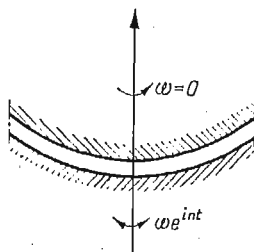
EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

1. Wstęp

Laminarny ustalony przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi tarczami, stożkami oraz powierzchniami obrotowymi od dawna zwracał uwagę ze względu na możliwości wielorakich zastosowań praktycznych; w pracach [1, 13, 14] szerzej omówiono literaturę dotyczącą tego rodzaju ustalonych przepływów.

Ustalone przepływy między wirującymi powierzchniami krzywoliniowymi były badane w pracach [4, 13, 14].

W pracach [2, 3, 7 - 12, 15] zbadano przepływy wywołane drganiami skrętnymi; prace [2, 3, 7, 9, 10, 12] zawierają badania przepływów między płaskimi tarczami; praca [15] daje opis przepływu między równoległymi powierzchniami stożkowymi. Prace [8, 11]



Rys. 1

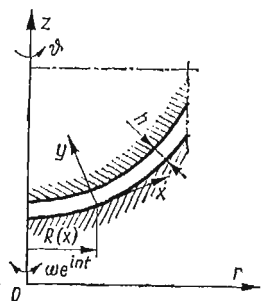
przedstawiają opisy badań przepływów w szczelinach między współosiowymi powierzchniami kulistymi, z których jedna wykonuje drgania skrętne. Celem niniejszej pracy jest zbadanie nieustalonego przepływu cieczy lepkiej w szczelinie o stałej grubości między równoległymi, nieograniczonymi powierzchniami, z których górna jest nieruchoma (rys. 1), a dolna wykonuje drgania skrętne dookoła wspólnej osi symetrii obu tych powierzchni.

2. Równania ruchu

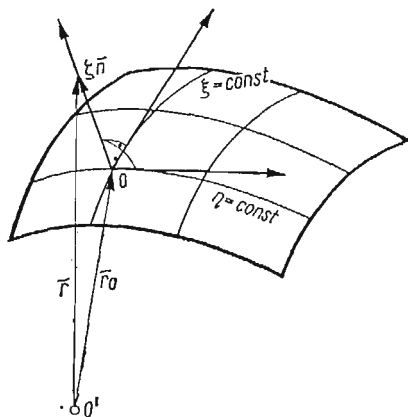
Obszar przepływu cieczy pokazany jest na rys. 2. Dolna, ruchoma powierzchnia opisana jest funkcją $R(x)$ oznaczającą promień tej powierzchni. Grubość szczeliny h , tj. odległość między zakrzywionymi powierzchniami mierzona wzdłuż normalnej do ruchomej

powierzchni, jest wielkością stałą. Do rozważań użyjemy krzywoliniowego ortogonalnego układu współrzędnych x, ϑ, y , związanego z dolną powierzchnią. Parametrami przepływu są składowe prędkości v_x, v_ϑ, v_y oraz ciśnienie p . Ze względu na istniejącą ośiową symetrię parametry przepływu nie zależą od kąta ϑ .

Równaniami opisującymi przepływ cieczy są równanie ciągłości oraz równanie Naviera i Stokesa wyrażone w przyjętym układzie współrzędnych [5].



Rys. 2



Rys. 3

Aby otrzymać odpowiednią postać tych równań rozważmy przedstawiony na rys. 3 element powierzchni ograniczającej przepływ z zaznaczonymi liniami $\xi = \text{const}$ oraz $\eta = \text{const}$ tworzącymi ortogonalną siatkę. Wektorowe równanie rozważanej powierzchni można przedstawić w postaci:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_0(\xi, \eta).$$

Położenie dowolnego punktu przestrzeni — leżącego w odległości ζ mierzonej wzdłuż normalnej — określa wektor

$$\bar{r} = \bar{r}_0(\xi, \eta) + \zeta \bar{n}(\xi, \eta).$$

Kwadrat elementu długości łuku w ortogonalnym układzie współrzędnych ξ, η, ζ jest równy

$$ds^2 = (d\bar{r})^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial \bar{n}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Zakładając, że współrzędne ξ i η pokrywają się z liniami krzywiznowymi powierzchni oraz stosując wzory Rodrigues'a [17]:

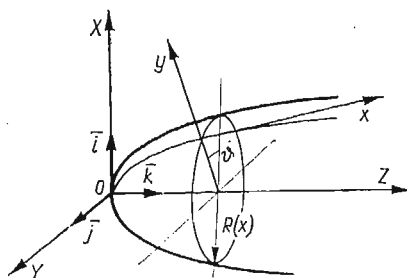
$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial \eta} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \eta}$$

mamy

$$(2.1) \quad ds^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi} \right)^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right)^2 d\xi^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \eta} \right)^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right)^2 d\eta^2 + d\zeta^2;$$

gdzie R_1, R_2 oznaczają odpowiednie promienie krzywizny powierzchni. Dla powierzchni obrotowej przedstawionej na rys. 4 w układzie współrzędnych X, Y, Z równanie wektorowe przyjmuje postać [16]

$$(2.2) \quad \bar{r}_0 = \bar{i}R(x)\cos\vartheta + \bar{j}R(x)\sin\vartheta + \bar{k}Z(x).$$



Rys. 4

Podstawiając (2.2) do (2.1) i przyjmując

$$\xi = x, \quad \eta = \vartheta, \quad \zeta = y,$$

otrzymamy po prostych wyliczeniach

$$(2.3) \quad ds^2 = \left(1 + \frac{y^2}{R_1^2}\right)^2 dx^2 + R^2 \left(1 + \frac{y^2}{R_2^2}\right)^2 d\vartheta^2 + dy^2,$$

przy czym $R_1, R_2 \geq R$.

Wracając do przepływu stanowiącego temat pracy zauważmy, że $y \leq h$; przy założeniu, że $h \ll R$ wyrażenie określające kwadrat elementu liniowego w układzie współrzędnych x, ϑ, y można zapisać w postaci:

$$(2.4) \quad ds^2 = dx^2 + R^2 d\vartheta^2 + dy^2.$$

Zatem współczynniki Lamégo będą równe*)

$$H_x = 1, \quad H_\vartheta = R(x), \quad H_y = 1.$$

Posługując się nimi można przedstawić równania ruchu cieczy lepkiej w przyjętym do rozważań układzie współrzędnych krzywoliniowych dla osiowej symetrii w postaci

$$(2.5) \quad \frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} + \vartheta_x \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} - \frac{R'}{R} \vartheta_\vartheta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{R''}{R} v_x - \frac{R'^2}{R^2} v_x \right),$$

*) W przypadku, gdy równanie (2.2) dane jest w postaci

$$\bar{r}_0 = \bar{i}R\cos\vartheta + \bar{j}R\sin\vartheta + \bar{k}Z(R),$$

współczynniki Lamégo są równe

$$H_x = \left[1 + \left(\frac{dZ}{dR}\right)^2\right]^{1/2}, \quad H_\vartheta = R, \quad H_y = 1.$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{R'}{R} v_x v_0 = \\ = v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{R''}{R} v_0 - \frac{R'^2}{R^2} v_0 \right),$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$(2.8) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

gdzie przecinkiem oznaczono operację różniczkowania względem zmiennej x .

Warunki brzegowe dla składowych prędkości są następujące:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} v_x = v_y = 0, \quad v_0 = R\omega e^{int} & \quad \text{dla } y = 0, \\ v_x = v_y = v_0 = 0 & \quad \text{dla } y = h. \end{aligned}$$

Poczynione wyżej założenia, że $h \ll R(x)$ można wykorzystać do oszacowania wielkości poszczególnych składników równań (2.5) - (2.7). W tym celu rozważmy pewien przekrój szczeliny określony współrzędną $x = L$ (przy czym zakładamy, że $R(L) \gg h$). Prędkość obwodowa w tym przekroju jest $v_0 = O(V_0)$, a prędkość promieniowa jest $v_x = O\left(V_0 \frac{h}{R}\right)$ [18], gdzie oznaczono dla uproszczenia $V_0 = \omega R(L)$.

Z równania ciągłości wynika, że $v_y = O\left(V_0 \frac{h^2}{R^2}\right)$. Wprowadzając powyższe oszacowania do równań (2.5) - (2.7) i pomijając w każdym z nich człony małe wyższego rzędu sprowadzimy je do postaci

$$(2.10) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{R'}{R} v_0^2 = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2},$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}.$$

3. Całki równań ruchu

Rozwiązań równań ruchu (2.10) - (2.12), przy założeniu $h = \text{const}$, będziemy poszukiwać w postaci zależności funkcyjnych spełniających równanie ciągłości (2.8), mianowicie:

$$(3.1) \quad v_0 = R\omega e^{i\tau} G(\eta),$$

$$(3.2) \quad v_x = \frac{RR'\omega^2}{n} \frac{\partial F(\eta, \tau)}{\partial \eta},$$

$$(3.3) \quad v_y = -\frac{(2R'^2 + RR'')\omega^2 h}{n} F(\eta, \tau);$$

dla rozkładu ciśnień przyjmujemy

$$(3.4) \quad \frac{p}{\varrho} = (2R'^2 + RR'')\omega^2 h^2 P(\eta, \tau) + \frac{1}{2}R^2\omega^2 K(\tau),$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono

$$(3.5) \quad \eta = \frac{y}{h}; \quad \tau = nt.$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równań ruchu (2.10) - (2.12) otrzymamy odpowiednio:

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \tau} - (Ge^{i\tau})^2 = -K(\tau) + \frac{1}{N} \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3},$$

$$(3.7) \quad \frac{d^2 G}{d\eta^2} - iNG = 0,$$

$$(3.8) \quad -\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{1}{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}.$$

W powyższych równaniach symbolem N oznaczono liczbę Reynoldsa

$$N = \frac{nh^2}{\nu}.$$

Warunki brzegowe (2.9) przyjmują teraz postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad G = 1 & \quad \text{dla } \eta = 0, \\ F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = G = 0 & \quad \text{dla } \eta = 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (3.7) można przedstawić wzorem

$$(3.10) \quad G = \lambda_1 - i\lambda_2,$$

gdzie:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\operatorname{ch} \alpha (2-\eta) \cos \alpha \eta - \operatorname{ch} \alpha \eta \cos \alpha (2-\eta)}{\Phi}, \\ \lambda_2 &= \frac{\operatorname{sh} \alpha (2-\eta) \sin \alpha \eta - \operatorname{sh} \alpha \eta \sin \alpha (2-\eta)}{\Phi} \end{aligned}$$

oraz

$$\Phi = \operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\alpha, \quad \alpha^2 = \frac{N}{2}.$$

Wzór (3.1) po uwzględnieniu (3.10) prowadzi w zapisie rzeczywistym do zależności:

$$(3.12) \quad v_0 = R\omega \operatorname{Re}[G(\eta)e^{i\tau}] = R\omega(\lambda_1 \cos \tau + \lambda_2 \sin \tau).$$

Dla małych liczb Reynoldsa mamy

$$(3.13) \quad v_0 \approx R\omega(1-\eta) \left\{ \left[1 - \frac{N^2}{360} \eta (8+8\eta-12\eta^2+3\eta^3) \right] \cos \tau + \frac{N\eta(2-\eta)}{6} \left(1 - \frac{4+6\eta-3\eta^2}{30} \right) \sin \tau \right\},$$

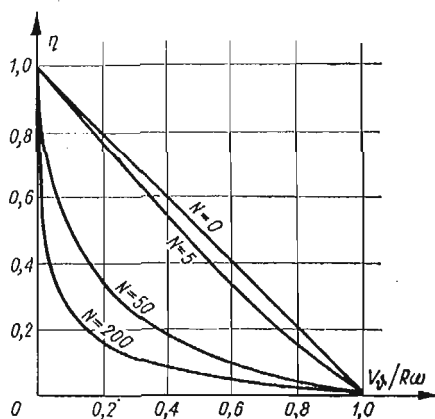
natomiast dla dużych liczb Reynoldsa otrzymamy

$$(3.14) \quad v_0 \approx R\omega e^{-\alpha\eta} \cos(\tau - \alpha\eta).$$

Gdy $N = 0$ profil prędkości obwodowej jest prostoliniowy i określony zależnością

$$(3.15) \quad v_0 = R\omega(1 - \eta).$$

Wynik ten pokrywa się z rezultatami wcześniejszych badań [13, 14] dotyczących przepływu ustalonego w szczelinie między wirującymi powierzchniami obwodowymi. Profile prędkości v_0 dla różnych wartości liczby Reynoldsa pokazano na rys. 5.



Rys. 5

Napężenia tarcia na zakrzywionych powierzchniach dla małych liczb Reynoldsa są odpowiednio równe:

na dolnej powierzchni

$$\sigma_0 = \mu \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\mu R\omega}{h} \left[\left(1 + \frac{N^2}{45} \right) \cos \tau - \frac{N}{3} \sin \tau \right],$$

na górnej powierzchni

$$\sigma_h = \mu \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)_{y=h} = -\frac{\mu R\omega}{h} \left[\left(1 - \frac{7N^2}{360} \right) \cos \tau + \frac{N}{6} \sin \tau \right].$$

Dla dużych zaś liczb Reynoldsa otrzymamy

$$\sigma_0 = -\frac{\mu R\omega}{h} \alpha (\cos \tau - \sin \tau),$$

$$\sigma_h = -\frac{\mu R\omega}{h} \alpha [\cos(\tau - \alpha) - \sin(\tau - \alpha)].$$

Profile naprężeń panujących na obu powierzchniach dla różnych liczb Reynoldsa przedstawiono (dla dolnej powierzchni) na rys. 6 i (dla górnej powierzchni) na rys. 7.

Wyrażenie

$$[\operatorname{Re}(Ge^{i\tau})]^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\lambda_1 - i\lambda_2)^2 e^{2i\tau}]$$

sugeruje istnienie rozwiązania równania (3.6) w postaci sum funkcji

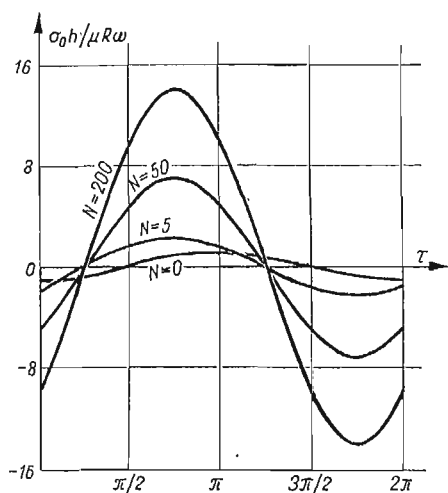
$$(3.16) \quad F(\eta, \tau) = \Psi(\eta) + H(\eta)e^{2i\tau}, \quad K(\tau) = K_0 + K_1 e^{2i\tau}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równania (3.6) otrzymamy dla wyznaczenia $\Psi(\eta)$ oraz $H(\eta)$ następujące równania różniczkowe:

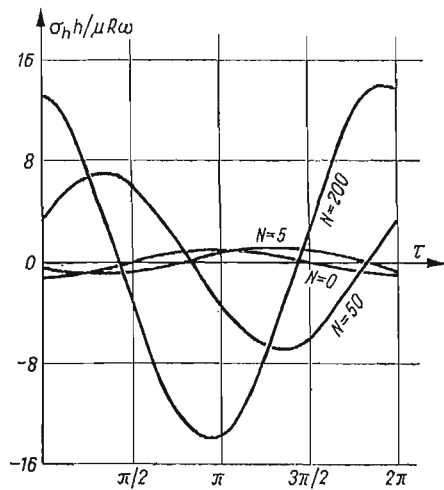
$$(3.17) \quad \Psi'''' = NK_0 - \frac{N}{2} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha(1-\eta) - \cos 2\alpha(1-\eta)}{\Phi},$$

$$(3.18) \quad H'''' - 2iNH' = NK_1 - N \frac{\operatorname{sh} 2\alpha(1-i)[\operatorname{ch} 2\alpha(1+i)(1-\eta) - 1]}{\Phi},$$

użając przecinkiem oznaczono operację różniczkowania względem zmiennej η .



Rys. 6



Rys. 7

Warunki brzegowe (3.9) w odniesieniu do funkcji Ψ oraz H można wyrazić w postaci

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi(1) = \Psi'(1) = 0,$$

$$H(0) = H'(0) = H(1) = H'(1) = 0.$$

Rozwiązania równań (3.17) oraz (3.18) określone są wyrażeniami

$$(3.19) \quad \Psi'(\eta) = -\frac{NK_0}{2} \eta(1-\eta) - \frac{N}{8\alpha^2\Phi} [\operatorname{ch} 2\alpha(1-\eta) + \cos 2\alpha(1-\eta)] + \\ + \frac{N}{8\alpha^2\Phi} [(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha)(1-\eta) + 2\eta],$$

$$(3.20) \quad \Psi(\eta) = -\frac{NK_0}{12} \eta^2(3-2\eta) + \frac{N}{16\alpha^3\Phi} [\operatorname{sh} 2\alpha(1-\eta) - \operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha(1-\eta) - \\ - \sin 2\alpha] + \frac{N}{16\alpha^2\Phi} \eta[(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha)(2-\eta) + 2\eta],$$

$$(3.21) \quad K_0 = \frac{3}{4\alpha^2\Phi} (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha + 2) - \frac{3}{4\alpha^3\Phi} (\operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

oraz

$$(3.22) \quad H'(\eta) = \frac{K_1 + A}{2i} \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - 1 \right] + \\ + \frac{A}{2i} \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{ch} 2\beta \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - \operatorname{ch} 2\beta (1 - \eta) \right],$$

$$(3.23) \quad H(\eta) = \frac{K_1 + A}{2\sqrt{2} \beta i} \left[\frac{\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta \eta - 1 + \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - \sqrt{2} \beta \eta \right] + \\ + \frac{A}{2\sqrt{2} \beta i} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta \eta - 1 + \operatorname{ch} 2\beta [\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)]}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} [\operatorname{sh} 2\beta (1 - \eta) - \operatorname{sh} 2\beta] \right\},$$

$$(3.24) \quad K_1 = A \left[\frac{(\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - 1)(\operatorname{ch} 2\beta + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \operatorname{sh} 2\beta}{2(\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - 1) - \sqrt{2} \beta \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - 1 \right],$$

gdzie oznaczono

$$A = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha (1 - i)}{\Phi^2}, \quad \beta = \alpha (1 + i).$$

Rozwijając powyższe zależności w szereg potęgowy i pomijając wyrazy zawierające wielkości małe wyższego rzędu, otrzymamy dla małych liczb Reynoldsa następujące wyrażenia:

$$K_0 \approx \frac{3}{20},$$

$$\Psi'(\eta) \approx \frac{N\eta(1-\eta)(6-15\eta+5\eta^2)}{120},$$

$$\Psi(\eta) \approx \frac{N\eta^2(1-\eta)^2(3-\eta)}{120}$$

oraz

$$K_1 \approx \frac{3}{20} - \frac{109Ni}{4200},$$

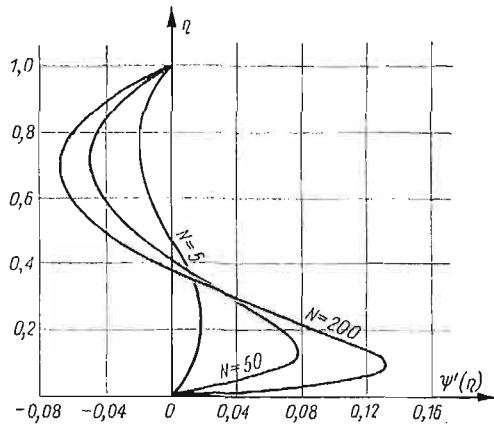
$$H'(\eta) \approx \frac{N\eta(1-\eta)(6-15\eta+5\eta^2)}{120},$$

$$H(\eta) = \frac{N\eta^2(1-\eta)^2(3-\eta)}{120}.$$

Na rys. 8 przedstawiono graficznie przebieg zmienności funkcji $\Psi'(\eta)$ dla różnych wartości liczby Reynoldsa; funkcja ta, jak wynika z wzorów (3.2) i (3.16), określa ustaloną część składową prędkości v_x .

Aby wyznaczyć rozkład ciśnień w poprzek szczeliny, wróćmy do równania (3.8), które przepiszemy w postaci

$$(3.25) \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{1}{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{\partial F}{\partial \tau}.$$



Rys. 8

Uwzględniając pierwszą z zależności (3.16) możemy przedstawić rozwiązanie równania (3.25) w formie sumy

$$(3.26) \quad P(\eta, \tau) = P_1(\eta) + P_2(\eta)e^{2i\tau}.$$

Po podstawieniu (3.26) do (3.25) otrzymamy

$$(3.27) \quad P'_1 = \frac{1}{N} \Psi''',$$

$$(3.28) \quad P'_2 = \frac{1}{N} H'' - 2iH.$$

Całkując te równania przy spełnieniu warunków brzegowych:

$$P_1(0) = II_1, \quad P_2(0) = II_2,$$

wyznamy zależności:

$$(3.29) \quad P_1(\eta) = II_1 - \frac{K_0}{2} \eta(1-\eta) - \frac{1}{8\alpha^2 \Phi} [\operatorname{ch} 2\alpha(1-\eta) + \cos 2\alpha(1-\eta)] + \\ + \frac{1}{8\alpha^2 \Phi} [(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha)(1-\eta) + 2\eta],$$

$$\begin{aligned}
 (3.30) \quad P_2(\eta) = & \Pi_2 + \frac{K_1 + A}{2iN} \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - 1 \right] + \\
 & + \frac{A}{2iN} \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{ch} 2\beta \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - \operatorname{ch} 2\beta (1 - \eta) \right] - \\
 & - \frac{K_1 + 2A}{2\beta^2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta - \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{ch} 2\beta [\sqrt{2} \beta \eta \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta + \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)]}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} \right\} + \\
 & + \frac{K_1 + A}{2\sqrt{2}} \eta^2 + \frac{A}{2\beta} \left[\frac{1}{2\beta} \operatorname{ch} 2\beta (1 - \eta) + \eta \operatorname{sh} 2\beta \right] + \frac{K_1 + A}{2\beta^2} \operatorname{ctgh} \sqrt{2} \beta + \frac{A}{4\beta^2} \operatorname{ch} 2\beta.
 \end{aligned}$$

4. Uwagi końcowe

Wzory wprowadzone w poprzednim punkcie pracy określają pole prędkości i pole ciśnień w szczelinie o stałej grubości $h = \text{const}$, między powierzchniami o dowolnym kształcie.

Przedstawione tutaj wyniki są zgodne z wynikami cytowanych wcześniej prac. Podstawiając we wzorach (3.1) - (3.4) odpowiednie zależności dla $R(x)$ otrzymać możemy przepływy w szczelinie między tarczami, stożkami, bądź też powierzchniami kulistymi.

Z postaci otrzymanych rozwiązań wynika, że dla przyjętego modelu przepływu profile prędkości i ciśnień w dowolnym przekroju poprzecznym szczeliny są niezależne od kształtu powierzchni wywołujących ruch cieczy.

Z przytoczonych wykresów dla składowych prędkości v_θ oraz v_x wynika, że ze wzrostem liczby Reynoldsa przepływ «zbliża» się do drgającej powierzchni, na której zaczyna się pojawiać warstwa przyścienna.

Otrzymane w pracy rozwiązania — zgodnie z założeniem, że $h \ll R$ — zachowują swoją ważność dla dowolnego kształtu szczeliny jedynie w dużych odległościach od osi obrotu. W przypadku szczególnym, gdy — począwszy od pewnej wartości $x = l$ — takiej, że jeszcze $h \ll R(l)$ zachodzą zależności $R(x) \approx x$, $R'(x) \approx 1$, tzn. gdy dla $0 \leq x \leq l$ powierzchnie tworzące szczelinę tylko nieznacznie różnią się od płaszczyzn, rozwiązanie zachowuje swoją ważność również w pobliżu osi obrotu. Bowiem dla $R(x) = x$, $R'(x) = 1$, a rozwiązanie pokrywa się z wynikami uzyskanymi w pracy [2] dla przepływu między drgającymi skrajnie płaskimi tarczami.

Literatura cytowana w tekście

1. Л. А. Дорфман, *Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел*, Москва 1960.
2. S. ROSENBLAT, *Flow between torsionally oscillating disks*, J. Fluid. Mech, 2, 8 (1960).
3. S. DATTA, *Hydromagnetic flow between torsionally oscillating discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci techn., 11 - 12, 12 (1965).
4. K. W. Mc ALISTER, W. RICE, *Throughflows between rotating surfaces of revolution, having similitartiy solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 4, 37, (1970).
5. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1970.

6. A. SZANIAWSKI, *Przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego*, Prace IPPT 15/1970.
7. R. C. CHANAUD, *Observations of oscillatory radial flow between a fixed disk and a free disk*, J. Acoust. Soc. Amer., 47 5, (1970) 2.
8. H. F. KORMAN, L. R. KOVAL, *Energy dissipation in an oscillating spherical annulus filled with a viscous fluid*, AIAA Journal, 7, 9 (1971).
9. C. JACOBS, *Transient motions produced by disks oscillating torsionally about a state of rigid rotation*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 2, 24 (1971).
10. J-M. PIAU, *Ecoulement radial non stationnaire entre une paroi fixe et une paroi oscillante; stabilité des paliers à air*, C. R. Acad. Sci., 22, 273 (1971).
11. С. Г. ДАДАЕВ, *Статистические характеристики гибридного сферического газового подшипника с vibrating surface*, Сб. науч. тр. Челябинск. политехн. ин-та, 1971, вып. 101.
12. ABDUL ALEEM KHAN MOHD, *Hydromagnetic flow of an electrically conducting fluid due to unsteady rotation of a porous disk over a fixed disk*, Indian J. Pure and Appl. Math., 4, 3 (1972).
13. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Mech. Teor. i Stos., 1, 12 (1974).
14. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej — o zmiennej lepkości — w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Zeszyty Naukowe AT-R w Bydgoszczy, Mechanika 8 (1975).
15. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej między drgającymi skrętnie powierzchniami stożkowymi*, Zeszyty Naukowe AT-R w Bydgoszczy, Mechanika, 8 (1975).
16. E. KARAŚKIEWICZ, *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Warszawa 1971.
17. А. П. НОРДЕН, *Теория поверхностей*, Москва 1956.
18. Н. А. СЛЕЗКИН, *Динамика вязкой жидкости*, Москва 1955.

Резюме

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ ИЗ КОТОРЫХ ОДНА НЕПОДВИЖНА А ВТОРАЯ СОВЕРШАЕТ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В работе рассматривается течение вязкой жидкости в щели между параллельными криволинейными поверхностями вращения с вертикальной осью симметрии, причем, верхняя поверхность неподвижна а нижняя совершает крутильные колебания.

Для решения задачи применяются линеаризованные уравнения движения вязкой жидкости для осесимметрического течения в системе криволинейных координат x, ϑ, y связанных с нижней поверхностью.

Получены формулы определяющие такие параметры течения как компоненты скорости v_x, v_ϑ, v_y и давление p .

Summary

VISCOUS FLUID FLOW THROUGH IN A SLOT BETWEEN TWO SURFACES OF REVOLUTION: ONE OF THEM FIXED AND THE OTHER ONE — TORSIONALLY OSCILLATING

Laminar flow of an incompressible viscous fluid is considered in a slot between two parallel surfaces of revolution having vertical axis of symmetry: the upper one is fixed and the lower one — torsionally oscillating. The linearized equations of motion of the viscous fluid flow for axial symmetry are written in the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system x, ϑ, y linked with the lower surface. As a result, the formulae defining the velocity components v_x, v_ϑ, v_y and pressure p have been obtained.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1974 r.; w wersji ostatecznej — dnia 5 stycznia 1975 r.