

WPLYW DODATKOWYCH NIELINIOWYCH ZABURZEŃ NA CHARAKTERYSTYKI
PROBABILISTYCZNE KLASYCZNYCH RÓWNAŃ OPISUJĄCYCH DRGANIA
SAMOWZBUDNE

JAN ŁUCZKO (KRAKÓW)

W pracy zbadano wpływ zaburzeń przypadkowych na amplitudę i częstość drgań samowzbudnych układów o jednym stopniu swobody. Rozpatrzono równania typu van der Pola i Rayleigha z nieliniowymi siłami sprężystości i tłumienia. Założono przy tym, że wymuszenie zewnętrzne jest stacjonarnym, normalnym procesem stochastycznym o wartości średniej równej zeru typu „biały szum”.

Analizowane w pracy równania mogą opisywać zachowanie się znanych klasycznych układów samowzbudnych, ale o bardziej złożonej strukturze.

Sposób rozwiązania zagadnienia oparty jest na przybliżonej metodzie, przedstawionej w pracy PISZCZKA [1] i polega na stosowaniu do równania różniczkowego, opisującego drgania układu, kolejno linearyzacji harmonicznej i statystycznej. Podobne podejście do zagadnienia drgań samowzbudnych można znaleźć w pracach CAUGHHEYA [2] i POPOWA, PALTOWA [3]. Idea linearyzacji statystycznej została przedstawiona w pracy KAZAKOWA [4].

1. Równanie typu van der Pola

Rozważmy następujące równanie różniczkowe

$$(1.1) \quad \ddot{z} - (a^2 - b^2 z^2 - cz^4) \dot{z} + \omega_0^2 z = f(t),$$

przy czym $S_f(\omega) = S_0$ jest stałą gęstością widmową wymuszenia. Równanie to można sprowadzić do postaci bezwymiarowej przez podstawienie

$$z(t) = \frac{a}{b} x(\tau), \quad \tau = \omega_0 t.$$

Otrzymamy

$$(1.2) \quad \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \mu x^4) \dot{x} + x = p(\tau),$$

gdzie oznaczono

$$(1.3) \quad \varepsilon = \frac{a^2}{\omega_0}, \quad \mu = \frac{a^2 c}{b^4},$$

gęstość zaś widmowa procesu $p(\tau)$ jest związana z gęstością $S_f(\omega)$ następującą zależnością:

$$(1.4) \quad S_p(\omega) = \bar{S}_0 = \frac{b^2}{a^2 \omega_0^3} S_0.$$

Rozwiązanie równania (1.2) przyjmujemy w postaci

$$(1.5) \quad x = x_p + A \sin \alpha \tau, \quad \alpha = \frac{\omega}{\omega_0},$$

gdzie x_p oznacza składową przypadkową rozwiązania, zależną od wymuszenia zewnętrznego $p(\tau)$.

Jako wynik linearyzacji harmoniczej otrzymamy układ równań na amplitudę i częstość drgań, który po odrzuceniu rozwiązania trywialnego ma postać

$$\frac{1}{2} \mu A^4 + (1 - 6\mu x_p^2) A^2 - 4(1 - x_p^2 - \mu x_p^4) = 0,$$

$$\alpha^2 = 1 + 2\varepsilon(x_p + 2\mu x_p^3) \dot{x}_p + 3\varepsilon \mu x_p \dot{x}_p A^2$$

oraz równanie różniczkowe określające $x_p(\tau)$:

$$\ddot{x}_p - \varepsilon(1 - x_p^2 - \mu x_p^4) \dot{x}_p + x_p + \frac{1}{2} \varepsilon(1 + 6\mu x_p^2) \dot{x}_p A^2 + \frac{3}{8} \varepsilon \mu \dot{x}_p A^4 = p(\tau).$$

Pierwsze z tych równań określa amplitudę drgań. Rozwiązanie stabilne otrzymamy dla wartości amplitudy równej

$$A^2 = \frac{1 + 6\mu x_p^2}{\mu} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8(1 - x_p^2 - \mu x_p^4)}{(1 + 6\mu x_p^2)^2}} \right].$$

Zakładając $\mu \ll 1$ i rozwijając $A^2(\mu)$ w szereg Taylora dostaniemy w pierwszym przybliżeniu

$$(1.6) \quad \begin{aligned} A^2 &\approx 4(1 - 2\mu) - 4(1 + 2\mu)x_p^2 + 12\mu x_p^4, \\ \alpha^2 &\approx 1 + 2\varepsilon(1 + 6\mu)x_p \dot{x}_p - 8\varepsilon \mu x_p^3 \dot{x}_p \end{aligned}$$

oraz

$$(1.7) \quad \ddot{x}_p + \varepsilon[(1 + 2\mu) - (1 + 4\mu)x_p^2 + \mu x_p^4] \dot{x}_p + x_p = p(\tau).$$

Przeprowadzając teraz linearyzację statystyczną równania (1.7) otrzymamy równanie liniowe

$$(1.8) \quad \ddot{x}_p + k \dot{x}_p + \Omega^2 x_p = p(\tau),$$

gdzie

$$(1.9) \quad k = \varepsilon[(1 + 2\mu) - (1 + 4\mu)\langle x_p^2 \rangle + 3\mu(\langle x_p^2 \rangle)^2], \quad \Omega^2 = 1$$

zaś $\langle x_p \rangle = 0$.

W przypadku «białego szumu» z równania (1.8) mamy

$$(1.10) \quad \langle x_p^2 \rangle = \frac{\pi \bar{S}_0}{k \Omega^2}.$$

Z równań (1.9) i (1.10) otrzymamy z dokładnością do μ równanie algebraiczne 3 stopnia na dyspersję $\langle x_p^2 \rangle$

$$(1.11) \quad 3\mu(\langle x_p^2 \rangle)^3 - (1 + 4\mu)(\langle x_p^2 \rangle)^2 + (1 + 2\mu)\langle x_p^2 \rangle - \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon} = 0,$$

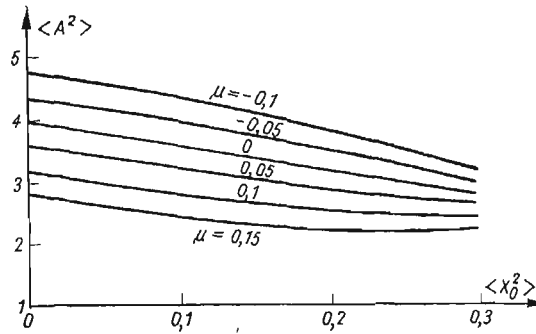
które można rozwiązać w sposób przybliżony metodą małego parametru przyjmując

$$(1.12) \quad \langle x_p^2 \rangle = \langle x_0^2 \rangle + \mu \langle x_1^2 \rangle + \mu^2 \langle x_2^2 \rangle + \dots$$

Przy ograniczeniu się do pierwszego przybliżenia dostaniemy

$$(1.13) \quad \langle x_p^2 \rangle = \langle x_0^2 \rangle \left[1 - \frac{3(\langle x_0^2 \rangle)^2 - 4\langle x_0^2 \rangle + 2}{1 - 2\langle x_0^2 \rangle} \mu \right],$$

$$\langle x_0^2 \rangle = 0,5 \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right].$$



Rys. 1

Wartości średnie $\langle \alpha^2 \rangle$ lub $\langle \omega^2 \rangle$ i $\langle A^2 \rangle$ są równe odpowiednio: $\langle \alpha^2 \rangle = 1$, skąd $\langle \omega^2 \rangle = \omega_0^2$,

$$(1.14) \quad \langle A^2 \rangle = \langle A_0^2 \rangle \left[1 - \frac{2 - 4\langle x_0^2 \rangle - 9(\langle x_0^2 \rangle)^2 + 15(\langle x_0^2 \rangle)^3}{(1 - 2\langle x_0^2 \rangle)(1 - \langle x_0^2 \rangle)} \mu \right],$$

przy czym

$$\langle A_0^2 \rangle = 2 \left[1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]$$

przedstawia zależność amplitudy drgań od zaburzenia zewnętrznego w przypadku oscylatora van der Pola ($\mu = 0$).

Na rys. 1 przedstawiono zależność wartości średniej kwadratu amplitudy od $\langle x_0^2 \rangle$ przy ustalonych wartościach μ . Wartość $\langle x_0^2 \rangle$ może być tu miarą wielkości zaburzenia [ze wzoru (1.13) wynika, że $\langle x_0^2 \rangle$ rośnie ze wzrostem gęstości widmowej \bar{S}_0 zaburzenia]. Wykres ilustruje wzór (1.14) w niecałym zakresie zmian $\langle x_0^2 \rangle$. Wartości $\langle A^2 \rangle$ są wyznaczone mniej dokładnie dla większych wartości $\langle x_0^2 \rangle$ [ze względu na przybliżony sposób znalezienia dyspersji $\langle x_p^2 \rangle$ z równania (1.11)] i dlatego też ograniczono się do pokazania związku (1.14) dla $\langle x_0^2 \rangle < 0,3$.

Z wykresu widać, że wzrost zaburzeń powoduje zmniejszanie się amplitudy drgań. Współczynnik μ stojący przy x^4 w członie van der Pola zmniejsza dodatkowo amplitudę, gdy $\mu > 0$, lub też ją zwiększa dla $\mu < 0$. Ze wzoru (1.13a) wynika, że częstość drgań jest niezależna zarówno od zaburzenia zewnętrznego, jak i wartości μ .

2. Równanie typu van der Pola z nieliniową siłą sprężystości

Rozpatrzmy obecnie równanie van der Pola z sześcienną sztywną charakterystyką siły sprężystości

$$(2.1) \quad \ddot{z} - (a^2 - b^2 z^2) \dot{z} + \omega_0^2 z + \delta z^3 = f(t), \quad \delta \geq 0,$$

które po przejściu do wielkości bezwymiarowych ma postać

$$(2.2) \quad \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2) \dot{x} + x + \mu x^3 = p(\tau),$$

przy czym $S_p(\omega)$ i ε wyrażają się wzorami (1.3) i (1.4), a $\mu = \frac{a^2 \delta}{b^2 \omega_0^2}$.

W sposób podobny do wcześniejszego otrzymamy dla rozwiązania (1.5) następujący układ równań na amplitudę A i częstość α oraz składową przypadkową x_p :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A^2 &= 4(1 - x_p^2), \\ \alpha^2 &= 1 + 3\mu + 2\varepsilon x_p \dot{x}_p, \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \ddot{x}_p + \varepsilon(1 - x_p^2) \dot{x}_p + [(1 + 6\mu) - 5\mu x_p^2] x_p = p(\tau).$$

Współczynniki zlinearyzowanego statystycznie równania (2.4) są teraz równe

$$(2.5) \quad k = \varepsilon(1 - \langle x_p^2 \rangle), \quad \Omega^2 = 1 + 6\mu - 15\mu \langle x_p^2 \rangle,$$

a wartość średnia $\langle x_p \rangle$ jest równa zeru. Wartość $\langle x_p^2 \rangle$ można wyznaczyć z równania

$$15\mu \langle x_p^2 \rangle^3 - (1 + 21\mu) \langle x_p^2 \rangle^2 + (1 + 6\mu) \langle x_p^2 \rangle - \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon} = 0.$$

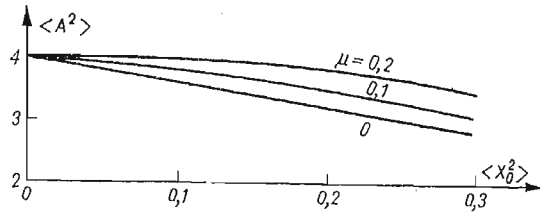
Przyjmując rozwiązanie w postaci szeregu (1.12) otrzymamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \langle x_p^2 \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \left[1 - \frac{15 \langle x_0^2 \rangle^2 - 21 \langle x_0^2 \rangle + 6}{1 - 2 \langle x_0^2 \rangle} \mu \right], \\ \langle x_0^2 \rangle &= 0,5 \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Wartości średnie kwadratu częstości i amplitudy określają wzory

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &= 1 + 3\mu, \quad \langle \omega^2 \rangle = \omega_0^2 (1 + 3\mu), \\ \langle A^2 \rangle &= \langle A_0^2 \rangle \left[1 + \frac{6 \langle x_0^2 \rangle - 21 \langle x_0^2 \rangle^2 + 15 \langle x_0^2 \rangle^3}{(1 - 2 \langle x_0^2 \rangle) (1 - \langle x_0^2 \rangle)} \mu \right], \\ \langle A_0^2 \rangle &= 2 \left[1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Z wykresu (rys. 2) przedstawiającego funkcję $\langle A^2 \rangle = f(\langle x_0^2 \rangle)$ dla różnych $\mu > 0$ wynika, że wpływ zaburzeń przypadkowych jest tu podobny, jak w przykładzie poprzednim. Amplituda maleje ze wzrostem $\langle x_0^2 \rangle$, osiągając np. dla $\mu = 0$ wartość minimalną przy $\langle x_0^2 \rangle = 0,5$, równą połowie wartości maksymalnej ($\langle x_0^2 \rangle = 0$). Ciekawy jest fakt, że wartość średnia $\langle A^2 \rangle$ w przypadku zdeterminowanym jest niezależna od μ ; wpływ nieliniowości



Rys. 2

siły sprężystości uwidacznia się dopiero w przypadku występowania przypadkowych zaburzeń. Częstość jest teraz dalej niezależna od wymuszenia $p(\tau)$, ma natomiast na nią wpływ współczynnik μ ; częstość rośnie ze wzrostem tego współczynnika.

3. Równanie typu Rayleigha z nieliniową siłą sprężystości

Przyjmijmy podobną jak w p. 2. charakterystykę siły sprężystości. Równanie różniczkowe Rayleigha

$$(3.1) \quad \ddot{z} - \left(a^2 - \frac{1}{3} b^2 z^2 \right) \dot{z} + \omega_0^2 z + \delta z^3 = f(t), \quad \delta \geq 0,$$

można po wprowadzeniu nowej zmiennej $x(\tau)$ doprowadzić do postaci

$$(3.2) \quad \ddot{x} - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{3} \dot{x}^2 \right) \dot{x} + x + \mu x^3 = p(\tau),$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} z(t) &= \frac{a}{b\omega_0} x(\tau), \quad \tau = \omega_0 t, \\ \varepsilon &= \frac{a^2}{\omega_0}, \quad \mu = \frac{a^2 \delta}{b^2 \omega_0^4}, \\ S_p(\omega) &= \bar{S}_0 = \frac{b^2}{a^2 \omega_0} S_0. \end{aligned}$$

Linearyzacja harmoniczna równania (3.2) prowadzi do równań:

$$\alpha^2 A^2 = 4(1 - x_p^2),$$

$$\alpha^2 = 1 + 3\mu x_p^2 + \frac{3}{4} \mu A^2$$

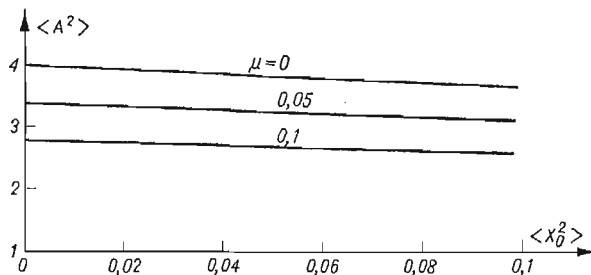
oraz

$$\ddot{x}_p - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{3} \dot{x}_p^2 \right) \dot{x}_p + x_p + \mu x_p^3 + \frac{1}{2} \varepsilon \dot{x}_p (A\alpha)^2 + \frac{3}{2} \mu x_p A^2 = p(\tau).$$

Przy założeniu, że charakterystyka siły sprężystej jest słabo nieliniowa ($\mu \ll 1$), przyjmą one postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} A^2 &= 4(1-3\mu) - 4(1-6\mu)\dot{x}_p^2 + 12\mu\dot{x}_p^2\dot{x}_p^2 - 12\mu\dot{x}_p^4 - 12\mu x_p^2, \\ \alpha^2 &= (1+3\mu) + 3\mu x_p^2 - 3\mu\dot{x}_p^2, \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \ddot{x}_p + \varepsilon \left(1 - \frac{5}{3}\dot{x}_p^2\right)\dot{x}_p + [(1+6\mu) + \mu x_p^2 - 6\mu\dot{x}_p^2]x_p = p(\tau).$$



Rys. 3

W wyniku linearyzacji statystycznej otrzymamy równanie liniowe, gdzie k i Ω^2 są równe

$$(3.6) \quad \begin{aligned} k &= (1 - 5\Omega^2 \langle x_p^2 \rangle), \\ \Omega^2 &= [(1+6\mu) + 3\mu \langle x_p^2 \rangle][1 + 6\mu \langle x_p^2 \rangle]^{-1} \end{aligned}$$

oraz $\langle x_p \rangle = 0$. Dyspersję $\langle x_p^2 \rangle$ można wyznaczyć z równań (3.6) i (1.10), mianowicie

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \langle x_p^2 \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \left[1 - \frac{30(\langle x_0^2 \rangle)^2 - 63\langle x_0^2 \rangle + 6}{1 - 10\langle x_0^2 \rangle} \mu \right], \\ \langle x_0^2 \rangle &= 0,1 \left[1 - \sqrt{1 - 20 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Wartości $\langle \alpha^2 \rangle$, $\langle \omega^2 \rangle$ i $\langle A^2 \rangle$ są równe:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &= 1 + 3\mu, & \langle \omega^2 \rangle &= \omega_0^2(1 + 3\mu), \\ \langle A^2 \rangle &= \langle A_0^2 \rangle \left[1 - 3 \frac{1 - 11\langle x_0^2 \rangle + 12(\langle x_0^2 \rangle)^2 - 20(\langle x_0^2 \rangle)^3}{(1 - 10\langle x_0^2 \rangle)(1 - \langle x_0^2 \rangle)} \mu \right], \\ \langle A_0^2 \rangle &= 4 \left[0,9 + 0,1 \sqrt{1 - 20 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Z analizy wzoru (3.8b) lub z wykresu (rys. 3) wynika, że zarówno wzrost zaburzenia (co związane jest ze wzrostem $\langle x_0^2 \rangle$), jak i zwiększenie sztywności siły sprężystej powodują zmniejszanie amplitudy drgań samowzbudnych, natomiast ze wzoru (3.8a) widać, że częstość kątowna drgań rośnie ze zwiększeniem współczynnika μ .

Ogólnie z analizy wybranych powyżej układów samowzbudnych można wyciągnąć następujące wnioski:

— średnia wartość kwadratu amplitudy maleje ze wzrostem zaburzenia przypadkowego,

- wpływ członów nieliniowych na wartość amplitudy jest różny i zależy od typu równania różniczkowego, opisującego proces drgań,
- średnia wartość kwadratu częstości nie zależy od zewnętrznych zaburzeń przypadkowych,
- nieliniowość siły sprężystej (charakterystyka sztywna) powoduje wzrost częstości kątowej drgań.

Literatura cytowana w tekście

1. K. PISZCZEK, *Influence of random perturbations on self-excited vibrations of a system with one degree of freedom*, Arch. Mech. Stos., 25, 5 (1973).
2. T. K. CAUGHEY, *Response of Van der Pol's oscillator to random excitation*, J. Appl. Mech., (1959), 345 - 348.
3. E. P. POPOW, I. P. PALTOW, *Przybliżone metody badań nieliniowych układów automatycznych*, WNT, Warszawa 1964.
4. И. Е. КАЗАКОВ, *Статические методы проектирования систем управления*, Машиностроение, Москва 1969.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОПИСЫВАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯ САМОВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

В работе исследуется влияние нелинейных членов на амплитуду и частоту систем с одной степенью свободы. Примеры относятся к системам, допускающим описание с помощью уравнений типа ван дер Поля и Релея, подверженным случайному вынуждению в виде стационарного нормального стохастического процесса типа „белый шум”. Анализ проводится при использовании метода гармонической и статической линеаризации. Полученные результаты показаны на диаграммах.

Summary

INFLUENCE OF ADDITIONAL NON-LINEAR PERTURBATIONS ON THE PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF CLASSICAL EQUATIONS DESCRIBING SELF-EXCITED VIBRATIONS

In the paper is considered the influence of non-linear terms on the amplitude and frequency of systems with one degree of freedom. The examples presented concern systems which can be described by Van der Pol's and Rayleigh's equations. These systems are forced by stationary, normal stochastic "white — noise" excitations. The analysis is done by means of the methods of harmonic and stochastic linearizations. The results are illustrated by graphs.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1974 r.