MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 13 (1975)

PRZESTRZENNE DRGANIA ELEMENTU PRĘTOWO-BRYŁOWEGO

WACŁAW PRZYBYŁO (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy [7] podano definicję układu prętowo-bryłowego, jako wspólnego modelu fizycznego do obliczeń nietłumionych, ustalonych, harmonicznych drgań, trzech rodzajów prefabrykowanych, szkieletowych konstrukcji inżynierskich — budynków szkieletowych, ramowych fundamentów pod maszyny o ruchu obrotowym i kopalnianych wież wyciągowych. Wprowadzono pojęcia elementu prętowego, tj. pręta wraz z przestrzennymi, nieważkimi, liniowymi i kątowymi więzami sprężystymi na końcach, oraz elementu prętowo-bryłowego, tj. układu złożonego z elementu prętowego wraz z dwoma bryłami sztywnymi przyłączonymi do jego końców.

W pracy [8], na podstawie [7], wyprowadzono macierzowe, niejednorodne równanie transformacyjne elementu prętowego.

W niniejszej pracy rozważono przestrzenne, nietłumione, własne i wymuszone, ustalone harmoniczne drgania elementu prętowo-bryłowego. Obciążenie przyjęto w postaci układu harmonicznych wektorów stanu (wektorów kąta obrotu, przemieszczenia, momentu i siły) o jednakowych częstościach i fazach drgań. Na podstawie [7] i [8] dla elementu prętowo-bryłowego wyprowadzono macierzowe, niejednorodne równanie transformacyjne metody przemieszczeń.

Przedstawiony w pracy sposób wyprowadzenia powyższego równania transformacyjnego był dla autora podstawą do prostego sformułowania równań drgań układu prętowo-bryłowego [10] oraz równań drgań sprężystego, tłumionego układu bryłowego [9] (tzw. metoda sztywnych elementów skończonych, por. np. [3, 4, 2]).

Wyniki niniejszej pracy mogą być również wykorzystane do znacznego uproszczenia opisanego w [1] algorytmu analizy tzw. ram krępych oraz opracowania algorytmu statycznej i dynamicznej analizy przestrzennych ram krępych.

W pracy stosujemy następujący sposób oznaczeń. Macierze oznaczamy dużymi literami pisanymi tłustym drukiem, przy czym litery bez kresek poziomych (**A**, **B**) oznaczają macierze o wymiarze 3×3 lub innym określonym w tekście, litery z jedną kreską poziomą ($\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$) — macierze o wymiarze 6×6, a z dwiema kreskami poziomymi ($\bar{\bar{\mathbf{A}}}$, $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$) — macierze o wymiarze 12×12. Wektory (macierze kolumnowe) oznaczamy małymi literami pisanymi tłustym drukiem. Litery bez kreski (**a**, **b**) oznaczają wektory o trzech współrzędnych lub o liczbie współrzędnych określonej w tekście, litery z jedną kreską ($\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$) oznaczają wektory o sześciu współrzędnych, a z dwiema kreskami ($\bar{\bar{\mathbf{a}}}$, $\bar{\bar{\mathbf{b}}}$) — wektory o dwunastu współrzędnych. Zbiory elementów oznaczamy dużymi literami pisanymi.

W szczególności wektory przemieszczeń liniowych i kątów obrotu mają następujące współrzędne:

$$\Delta_C = \begin{Bmatrix} \Delta_C^x \\ \Delta_C^y \\ \Delta_C^z \end{Bmatrix}, \quad \varphi_C = \begin{Bmatrix} \varphi_C^x \\ \varphi_C^y \\ \varphi_C^z \end{Bmatrix}. \tag{1.1}$$

Wektor przemieszczeń uogólnionych punktu C wyraża się następująco:

$$\bar{\mathbf{u}}_C = \begin{Bmatrix} \varphi_C \\ \Delta_C \end{Bmatrix}. \tag{1.2}$$

Wektory siły i momentu w punkcie C mają współrzędne

$$\mathbf{p}_C = \begin{Bmatrix} p_C^x \\ p_C^y \\ p_C^z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m}_C = \begin{Bmatrix} m_C^x \\ m_C^y \\ m_C^z \end{Bmatrix}. \tag{1.3}$$

Wektor sił uogólnionych w punkcie C ma postać

$$\bar{\mathbf{p}}_C = \begin{Bmatrix} \mathbf{m}_C \\ \mathbf{p}_C \end{Bmatrix}. \tag{1.4}$$

Wektory przemieszczeń i sił uogólnionych pręta w punktach C_{ij} i C_{ji} określamy następująco:

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}_C = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{C_{ij}} \\ \bar{\mathbf{u}}_{C_{ji}} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{p}}}_C = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{C_{ij}} \\ \bar{\mathbf{p}}_{C_{ji}} \end{Bmatrix}. \tag{1.5}$$

Wektor stanu w punkcie C określamy relacją

$$\bar{\bar{\mathbf{z}}}_C = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_C \\ \bar{\mathbf{p}}_C \end{Bmatrix}. \tag{1.6}$$

2. Definicje elementów układu prętowo-bryłowego

Rozważamy ustrój złożony ze zbioru ważkich brył sztywnych, połączonych między sobą za pomocą dowolnej liczby jednorodnych, izotropowych, liniowo sprężystych, bisymetrycznych prętów pryzmatycznych o przekroju zwartym. Pręty oraz bryły węzłów są dowolnie położone w przestrzeni. Końce prętów połączone są z bryłami węzłów przestrzennymi, nieważkimi, liniowymi i kątowymi więzami sprężystymi. Pełną definicję układu prętowo-bryłowego podano w [7]. Tutaj przytoczymy tylko niezbędne pojęcia.

Układ prętowo-bryłowy $\mathscr{U} = \langle \mathscr{V}, \mathscr{F} \rangle$ jest parą uporządkowaną, w której $\mathscr{V}$ jest ustrojem prętowo-bryłowym, a $\mathscr{F}$ jest zbiorem sił zewnętrznych działających na ustrój $\mathscr{V}$.

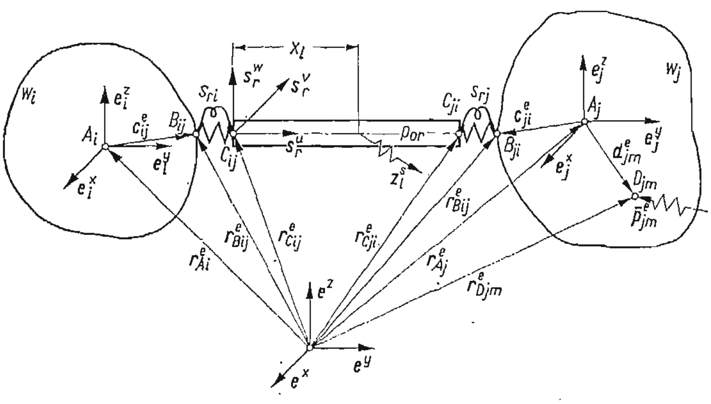
Ustrój prętowo-bryłowy $\mathscr{V} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{P}, \mathbf{H}_0 \rangle$ jest trójką uporządkowaną, w której $\mathscr{W} = \langle w_i \colon i \in \mathscr{I} \rangle$ jest zbiorem ważkich brył sztywnych, $\mathscr{P} = \langle p_r \colon r \in \mathscr{J} \rangle$ jest zbiorem elementów prętowych, $\mathbf{H}_0 = [h_{p,q}]$ jest macierzą przekrojów przywęzłowych, opisującą topologiczne własności połączeń elementów ustroju $\mathscr{V}$. Element macierzy

$$(2.1) \qquad h_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad p = 2r-1 \quad \text{i} \quad q = i, \\ 0 & \text{dla} \quad p = 2r-1 \quad \text{i} \quad q \neq i, \\ 1 & \text{dla} \quad p = 2r \quad \text{i} \quad q = j, \\ 0 & \text{dla} \quad p = 2r \quad \text{i} \quad q \neq j. \end{cases}$$

Wskaźnik $r \in \mathscr{J}$ jest numerem elementu prętowego p_r o początku połączonym z bryłą w_i i końcu połączonym z bryłą w_j. Zbiory $\mathscr{I}$ i $\mathscr{J}$ są skończonymi zbiorami wskaźników.

Zbiór sił zewnętrznych $\mathscr{F}$ składa się z dwu rozłącznych podzbiorów $\mathscr{F}_z$ i $\mathscr{F}_p$. Do zbioru $\mathscr{F}_z$ zaliczamy wymuszenia tzw. harmonicznymi wektorami stanu $\bar{\bar{\mathbf{z}}}$ [8], przyłożonymi na długości prętów. Do zbioru $\mathscr{F}_p$ zaliczamy harmoniczne wektory momentów i sił skupionych $\bar{\mathbf{p}}$ przyłożone do brył węzłów.

Wybierzmy pręt p_{0r}, którego końce C_{ij} i C_{ji} połączone są z punktami B_{ij} i B_{ji} brył w_i i $w_j \in \mathscr{W}$ za pomocą więzów sprężystych s_{ri} i s_{rj} (rys. 1).



Rys. 1

Łańcuch $p_r = \langle s_{ri}, p_{0r}, s_{rj} \rangle$, złożony z elementów sprężystych s_{ri} i s_{rj} oraz zawartego między nimi pręta p_{0r} nazywamy elementem prętowym. Element prętowy $p_r \in \mathscr{P}$ określony jest ciągiem parametrów

$$(2.2) \qquad p_r = \langle \mathbf{r}^e_{Cij}, \mathbf{r}^e_{Cji}, \mathbf{A}_r, F_r, I^u_r, C^u_r, I^v_r, I^w_r, E_r, \nu_r, \gamma_r, \bar{\mathbf{S}}_{ri}, \bar{\mathbf{S}}_{rj} \rangle,$$

w którym $\mathbf{r}^e_{Cij}$ i $\mathbf{r}^e_{Cji}$ są wektorami wodzącymi początku i końca pręta p_{0r} względem przyjętego w przestrzeni globalnego, ortogonalnego układu współrzędnych (e), $\mathbf{A}_r$ jest macierzą cosinusów kierunkowych wersorów przyjętego na pręcie lokalnego ortogonalnego układu współrzędnych (s_r) (możemy ją określić np. za pomocą wektorów $\mathbf{r}^e_{Cij}$ i $\mathbf{r}^e_{Cji}$ oraz kąta obrotu przekroju poprzecznego pręta wokół jego osi [11]), F_r, I^u_r, C^u_r, I^v_r, I^w_r oznaczają pole oraz momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem układu (s_r) [5], E_r, ν_r, γ_r oznaczają stałe materiałowe pręta, $\bar{\mathbf{S}}_{ri}(\bar{\mathbf{S}}_{rj})$ jest diagonalną macierzą sztywności więzów sprężystych $s_{ri}(s_{rj})$:

$$(2.3) \qquad \bar{\mathbf{S}}_{ri} = \operatorname{diag}[\varkappa^u_i, \varkappa^v_i, \varkappa^w_i, c^u_i, c^v_i, c^w_i],$$

względem układu współrzędnych (s_r).

Bryła węzła $w_i \in \mathcal{W}^k \subset \mathcal{W}$ (rys. 1) określona jest następującym ciągiem parametrów

$$w_i = \langle \mathbf{r}^e_{Ai}, v_i, \mathbf{T}_{Gi}, \gamma_i \rangle, \tag{2.4}$$

w którym $\mathbf{r}^e_{Ai}$ jest wektorem wodzącym środka ciężkości A_i bryły w_i względem układu współrzędnych (e), v_i jest objętością bryły w_i, $\mathbf{T}_{Gi}$ jest macierzą centralnych, geometrycznych momentów bezwładności bryły w_i względem układu współrzędnych (e_i) o początku w punkcie A_i i osiach równoległych do osi układu globalnego (e), γ_i jest ciężarem właściwym bryły w_i.

Element prętowo-bryłowy $s_r = \langle w_i, p_r, w_j \rangle$ jest łańcuchem, złożonym z brył w_i i $w_j \in \mathcal{W}$ połączonych elementem prętowym p_r (rys. 1). Układ prętowo-bryłowy $\mathcal{U}$ jest układem Clapeyrona ([5]). Ustrój prętowo-bryłowy $\mathcal{V}$ jest kinematycznie niezmienny.

Rozważamy drgania ustalone, zatem dalej będziemy rozważać amplitudy poszczególnych wielkości fizycznych.

3. Transformacje przemieszczeń i sił w elemencie prętowo-bryłowym

Rozważmy element prętowo-bryłowy $s_r = \langle w_i, p_r, w_j \rangle$ (rys. 1). Obecnie określimy wektorowe pole przemieszczeń w bryłach węzłów w_i i w_j, sposób transformacji wektorów przemieszczeń z punktów A_i i A_j do punktów B_{ij} i B_{ji} oraz transformacje wektorów sił z punktów B_{ij} i B_{ji} do punktów A_i i A_j.

3.1. Wektorowe pole przemieszczeń punktów bryły węzła. W bryle węzła w_i (rys. 1) określamy wektorowe pole przemieszczeń wywołane wektorem przemieszczeń uogólnionych $\bar{\mathbf{u}}^e_{Ai}$ jej środka ciężkości A_i. Dowolny punkt bryły węzła o wektorze wodzącym (mimośrodzie) względem punktu A_i

$$\mathbf{c}^e_{ij} = \begin{Bmatrix} c^x_{ij} \\ c^y_{ij} \\ c^z_{ij} \end{Bmatrix} = \mathbf{r}^e_{Bij} - \mathbf{r}^e_{Ai} \tag{3.1}$$

ma wektor przemieszczenia

$$\bar{\mathbf{u}}^e_{Bij}(t) = \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{u}}^e_{Ai}(t). \tag{3.2}$$

W powyższym wzorze macierz $\bar{\mathbf{C}}_{ij}$ mimośrodu punktu B_{ij} względem punktu A_i ma postać:

$$\bar{\mathbf{C}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{ij}, & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{C}_{ij} = \begin{bmatrix} 0, & +c^z_{ij}, & -c^y_{ij} \\ -c^z_{ij}, & 0, & +c^x_{ij} \\ +c^y_{ij}, & -c^x_{ij}, & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

3.2. Transformacje przemieszczeń w bryle węzła. Korzystając z relacji (3.2) transformację wektora $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_A$ na wektor $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_B$ przedstawiamy w formie

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_B = \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_A, \tag{3.4}$$

w której

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{ij}, & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}, & \bar{\mathbf{C}}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_B = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^e_{Bij} \\ \bar{\mathbf{u}}^e_{Bji} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_A = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^e_{Ai} \\ \bar{\mathbf{u}}^e_{Aj} \end{Bmatrix}. \tag{3.5}$$

Transformację wektora $\overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^e$ na wektor $\overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^s$ zapiszemy teraz w postaci

$$\overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^s = \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r \overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^e, \tag{3.6}$$

w której

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}}_r = \mathrm{diag}[\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_r, \mathbf{A}_r, \mathbf{A}_r] \tag{3.7}$$

oznacza blokowo-diagonalną macierz o wymiarze 12×12, a blok $\mathbf{A}_r$ o wymiarze 3×3 jest macierzą cosinusów kierunkowych układu lokalnego (s_r) względem układu globalnego (e).

Na podstawie relacji (3.4) i (3.6) łączną transformację wektora $\overline{\overline{\mathbf{u}}}_A^e$ na wektor $\overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^s$ przedstawiamy wzorem ([6])

$$\overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^s = \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r \overline{\overline{\mathbf{C}}}_r \overline{\overline{\mathbf{u}}}_A^e = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r \overline{\overline{\mathbf{u}}}_A^e, \tag{3.8}$$

w którym macierz

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}_r = \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r \overline{\overline{\mathbf{C}}}_r, \tag{3.9}$$

czyli

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}_r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{D}}_{ri}, \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} \ , \overline{\mathbf{D}}_{rj} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{D}}_{ri} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & , \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_r \mathbf{C}_{ij}, & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{D}}_{rj} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & , \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_r \mathbf{C}_{ji}, & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

3.3. Transformacja sił w bryle węzła. Transformację wektorów sił w punktach B_{ij} i B_j z układu lokalnego (s_r) do układu globalnego (e) przedstawiamy w postaci

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^e = \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^s. \tag{3.11}$$

Z kolei transformujemy $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^e$ na $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^e$, mianowicie

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^e = \overline{\overline{\mathbf{C}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^e. \tag{3.12}$$

Na podstawie powyższych relacji pełną transformację wektora $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^s$ na wektor $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^e$ przedstawiamy relacją ([6])

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^e = \overline{\overline{\mathbf{C}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^s = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^s. \tag{3.13}$$

4. Równanie transformacyjne elementu prętowo-bryłowego

Dla elementu prętowego w pracy [8] wyprowadzono następujące niejednorodne, macierzowe równanie transformacyjne amplitud

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^s = \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x \overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^s + \overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^{0s}. \tag{4.1}$$

W powyższym równaniu $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^s$ jest wektorem sił brzegowych w punktach B_{ij} i B_{ji}, $\overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^s$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych, $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^{0s}$ jest wektorem wyjściowych sił brzegowych (wywołanych obciążeniem przyłożonym na długości pręta), $\overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x$ jest macierzą sztywności dynamicznej elementu prętowego p_r. Na podstawie [8] wielkości te przedstawiamy następującymi wzorami:

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x = \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r (\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\beta} + \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\alpha} \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r)^{-1} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\beta}, \quad \text{lub} \quad \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x = \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_r^x, \tag{4.2}$$

gdzie macierz

$$\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_r^x = (\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\beta} + \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\alpha} \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r)^{-1} \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\beta}. \tag{4.3}$$

W powyższych relacjach $\overline{\overline{\mathbf{K}}}_r$ jest macierzą sztywności dynamicznej pręta o obu końcach sztywno połączonych z węzłami,

$$(4.4)\qquad \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\alpha} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}}_{r\alpha i}, \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}}\ \ , \overline{\mathbf{S}}_{r\alpha j} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \overline{\overline{\mathbf{S}}}_{r\beta} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}}_{r\beta i}, \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}}\ \ , \overline{\mathbf{S}}_{r\beta j} \end{bmatrix}$$

są macierzami uwzględniającymi sztywności więzów sprężystych s_{ri} i s_{rj}.

Macierze $\overline{\mathbf{S}}_{r\alpha i}$ i $\overline{\mathbf{S}}_{r\beta i}$ ($\overline{\mathbf{S}}_{r\alpha j}$ i $\overline{\mathbf{S}}_{r\beta j}$), występujące w powyższych zależnościach określone są przez

$$(4.5)\quad \overline{\mathbf{S}}_{r\alpha i} = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{\varkappa_i^u + \frac{GC^u}{l}}, \frac{1}{\varkappa_i^v + \frac{EI^y}{l}}, \frac{1}{\varkappa_i^w + \frac{EI^w}{l}}, \frac{1}{c_i^u + \frac{EF}{l}}, \frac{1}{c_i^v + \frac{EI^w}{l^3}}, \frac{1}{c_i^w + \frac{EI^v}{l^3}}\right],$$

$$(4.6)\quad \overline{\mathbf{S}}_{r\beta i} = \operatorname{diag}\left[\frac{\varkappa_i^u}{\varkappa_i^u + \frac{GC^u}{l}}, \frac{\varkappa_i^v}{\varkappa_i^v + \frac{EI^v}{l}}, \frac{\varkappa_i^w}{\varkappa_i^w + \frac{EI^w}{l}}, \frac{c_i^u}{c_i^u + \frac{EF}{l}}, \frac{c_i^v}{c_i^v + \frac{EI^w}{l^3}}, \frac{c_i^w}{c_i^w + \frac{EI^v}{l^3}}\right],$$

Wektor $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^{0s}$ wyjściowych sił brzegowych w punktach węzłowych wyraża się wzorem

$$(4.7)\qquad \overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^{0s} = \sum_{l=1}^{p} \overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s},$$

gdzie wektor $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s}$ jest wektorem wyjściowych sił brzegowych, wywołanym przez wymuszający wektor stanu $\overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$ według relacji

$$(4.8)\qquad \overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{p}}_{Bij,l}^{0s} \\ \overline{\mathbf{p}}_{Bji,l}^{0s} \end{Bmatrix} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl}^{x} \overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s.$$

Macierz $\overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl}^{x}$ transformacji wymuszającego wektora stanu $\overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s$ na wektor $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s}$ jest określona relacją [8]

$$(4.9)\qquad \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl}^{x} = \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_r^{x} \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^{-1} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl},$$

w której macierz $\overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl}$ jest macierzą transformacji wymuszającego wektora stanu $\overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s$ na wektor wyjściowych sił brzegowych $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Cl}^{0s}$ pręta o obu końcach sztywno połączonych z węzłami (por. [8]).

Do wyprowadzenia równania transformacyjnego elementu prętowo-bryłowego wykorzystamy teraz wzory (3.8), (3.13) i (4.1). Wstawiając $\overline{\overline{\mathbf{u}}}_B^s$ z (3.8) do (4.1), a następnie $\overline{\overline{\mathbf{p}}}_B^s$ z (4.1) do (3.13), przy wykorzystaniu równości (3.10) mamy relację

$$(4.10)\qquad \overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^e = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r \overline{\overline{\mathbf{u}}}_A^e + \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl}^x \overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(4.11)\qquad \overline{\overline{\mathbf{G}}}_r = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r = \overline{\overline{\mathbf{C}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{K}}}_r \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_r^x \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r \overline{\overline{\mathbf{C}}}_r,$$

$$(4.12)\qquad \overline{\overline{\mathbf{L}}}_{rl} = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl}^x = \overline{\overline{\mathbf{C}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{A}}}_r^T \overline{\overline{\mathbf{F}}}_{rl}^x,$$

równanie transformacyjne (4.10) elementu prętowo-bryłowego przedstawiamy w formie

$$(4.13)\qquad \overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^e = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_r \overline{\overline{\mathbf{u}}}_A^e + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_{rl} \overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_r \overline{\overline{\mathbf{u}}}_A^e + \overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Al}^{0e},$$

gdzie

$$(4.14)\qquad \overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Al}^{0e} = \overline{\overline{\mathbf{L}}}_{rl} \overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s.$$

Relację (4.14), określającą wektor wyjściowych sił brzegowych wyprowadzono dla przypadku, gdy pręt p_{0r} poddany jest działaniu tylko jednego wymuszającego wektora stanu $\bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s$ w punkcie o współrzędnej $x = x_l$. Gdy na pręt p_{0r} działa układ wektorów stanu $\bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s$ ($l = 1, 2, \ldots, p$), wówczas, korzystając z zasady superpozycji, wektor wyjściowych sił brzegowych wyrazimy równością

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^{0e} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{Ai}^{0e} \\ \bar{\mathbf{p}}_{Aj}^{0e} \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Al}^{0e} = \sum_{l=1}^{p} \bar{\bar{\mathbf{L}}}_{rl} \bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s = \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r^T \sum_{l=1}^{p} \bar{\bar{\mathbf{F}}}_l^x \bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s. \tag{4.15}$$

Gdy pręt p_{0r} nie jest obciążony wymuszającym wektorem stanu, równanie (4.13) zredukuje się do postaci

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^e = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}_A^e. \tag{4.16}$$

Powyższe równanie podaje transformację przemieszczeń punktów A_i i A_j na siły w tych punktach. Transformacja ta odbywa się w bryłach w_i i w_j, połączonych elementem prętowym p_r. Równanie (4.16) nazwiemy równaniem fizycznym elementu prętowo-bryłowego. Możemy je rozpisać następująco:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_{Ai}^e &= \bar{\mathbf{G}}_{ij,i} \bar{\mathbf{u}}_{Ai}^e + \bar{\mathbf{G}}_{ij,j} \bar{\mathbf{u}}_{Aj}^e, \\ \bar{\mathbf{p}}_{Aj}^e &= \bar{\mathbf{G}}_{ji,i} \bar{\mathbf{u}}_{Ai}^e + \bar{\mathbf{G}}_{ji,j} \bar{\mathbf{u}}_{Aj}^e. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Macierze $\bar{\mathbf{G}}_{ij,i}$, $\bar{\mathbf{G}}_{ij,j}$, $\bar{\mathbf{G}}_{ji,i}$, $\bar{\mathbf{G}}_{ji,j}$ (6×6) są blokami macierzy $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r$ według równości

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_{ij,i}, & \bar{\mathbf{G}}_{ij,j} \\ \bar{\mathbf{G}}_{ji,i}, & \bar{\mathbf{G}}_{ji,j} \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Korzystając z relacji (4.11) powyższe bloki przedstawiamy w postaci następujących iloczynów macierzy:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{ij,i} &= \bar{\mathbf{D}}_{ri}^T \bar{\mathbf{K}}_{ii}^x \bar{\mathbf{D}}_{ri}, \qquad & \bar{\mathbf{G}}_{ij,j} &= \bar{\mathbf{D}}_{ri}^T \bar{\mathbf{K}}_{ij}^x \bar{\mathbf{D}}_{rj}, \\ \bar{\mathbf{G}}_{ji,i} &= \bar{\mathbf{D}}_{rj}^T \bar{\mathbf{K}}_{ij}^x \bar{\mathbf{D}}_{ri}, \qquad & \bar{\mathbf{G}}_{ji,j} &= \bar{\mathbf{D}}_{rj}^T \bar{\mathbf{K}}_{jj}^x \bar{\mathbf{D}}_{rj}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

W powyższych wyrażeniach $\bar{\mathbf{K}}_{ii}^x$, $\bar{\mathbf{K}}_{ij}^x$, $\bar{\mathbf{K}}_{ji}^x$, $\bar{\mathbf{K}}_{jj}^x$ są blokami (6×6) macierzy $\bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x$ według równości

$$\bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^x, & \bar{\mathbf{K}}_{ij}^x \\ \bar{\mathbf{K}}_{ji}^x, & \bar{\mathbf{K}}_{jj}^x \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Zauważmy jeszcze, że na podstawie wzoru (4.11) macierz $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r$ jest symetryczna.

5. Równania układu prętowo-bryłowego

Do analizy nietłumionych, ustalonych, własnych i wymuszonych, harmonicznych drgań układu prętowo-bryłowego, w pracy [10] sformułowano macierzowe równania ciągłości przemieszczeń, fizyczne i równowagi kinetostatycznej. W równaniach uwzględniono geometryczne i mechaniczne własności elementów, a także topologiczne własności ich wzajemnych połączeń. Na podstawie powyższych równań wyprowadzono ostateczne macierzowe równanie kanoniczne metody przemieszczeń układu prętowo-bryłowego, które przedstawia się następująco:

$$(5.1)\qquad (\mathbf{H}^T\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{K}(\omega)\mathbf{Q}^x\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{H}-\omega^2\mathbf{B})\mathbf{u}_A^e = \mathbf{C}^{0T}\mathbf{p}_D^e-\mathbf{H}^T\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{q}_B^{0s}.$$

Poniżej podajemy znaczenie poszczególnych symboli. $\mathbf{H}$ jest macierzą, otrzymaną z macierzy przekrojów przywęzłowych $\mathbf{H}_0$, po wstawieniu do niej na miejsce zer i jedynek bloków zerowych i jednostkowych o wymiarze 6×6.

$$(5.2)\qquad \mathbf{C} = \operatorname{diag}[\overline{\overline{\mathbf{C}}}_r], \quad (r\in\mathscr{I})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą mimośrodów.

$$(5.3)\qquad \mathbf{A} = \operatorname{diag}\ [\overline{\overline{\mathbf{A}}}_r], \quad (r\in\mathscr{I})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą transformacji z układu globalnego (e) do układów lokalnych (s_r), $(r\in\mathscr{I})$.

$$(5.4)\qquad \mathbf{K} = \operatorname{diag}[\overline{\overline{\mathbf{K}}}_r], \quad (r\in\mathscr{I})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą sztywności.

$$(5.5)\qquad \mathbf{Q}^x = \operatorname{diag}[\overline{\overline{\mathbf{Q}}}{}_r^x], \quad (\mathbf{r}\in\mathscr{I}).$$

jest blokowo-diagonalną macierzą więzów sprężystych.

$$(5.6)\qquad \mathbf{B} = \operatorname{diag}[\overline{\mathbf{B}}_i], \quad (i\in\mathscr{I})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą bezwładności brył węzłów. $\mathbf{p}_D^e$ jest wektorem sił wymuszających przyłożonych do brył węzłów. $\mathbf{C}^0$ jest macierzą redukcji wektorów sił wymuszających do środków ciężkości brył węzłów. $\mathbf{q}_B^{0s}$ jest wektorem wyjściowych sił brzegowych, wywołanych obciążeniami przyłożonymi na długości prętów.

Równanie (5.1) przedstawiamy teraz w postaci

$$(5.7)\qquad \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{u}_A^e = \mathbf{p}_A^e,$$

w której $\mathbf{Z}(\omega)$ jest macierzą dynamicznej sztywności układu prętowo-bryłowego, $\mathbf{u}_A^e$ jest wektorem przemieszczeń uogólnionych układu, $\mathbf{p}_A^e$ jest wektorem sił uogólnionych układu.

Po narzuceniu na część przemieszczeń uogólnionych zerowych warunków kinematycznych, równanie (5.7) przedstawiamy w formie blokowej

$$(5.8)\qquad \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{kk} & \mathbf{z}^{kp} \\ \mathbf{z}^{pk} & \mathbf{z}^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A^{ke} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_A^{ke} \\ \mathbf{r}_A^{ke} \end{Bmatrix},$$

z której otrzymamy układ dwu równań macierzowych

$$(5.9)\qquad \mathbf{z}^{kk}(\omega)\mathbf{u}_A^{ke} = \mathbf{p}_A^{ke},$$

$$(5.10)\qquad \mathbf{z}^{pk}(\omega)\mathbf{u}_A^{ke} = \mathbf{r}_A^{ke}.$$

W powyższych równaniach niewiadomymi są wektory $\mathbf{u}_A^{ke}$ — niezerowych przemieszczeń uogólnionych i $\mathbf{r}_A^{ke}$ — reakcji podłoża na układ. Wektor $\mathbf{u}_A^{ke}$ wyznaczamy z równania (5.9), a następnie obliczamy wektor $\mathbf{r}_A^{ke}$ z relacji (5.10).

Dla przypadku drgań własnych musimy rozwiązać równanie jednorodne

$$(5.11)\qquad \mathbf{z}^{kk}(\omega)\mathbf{u}_A^{ke} = 0.$$

Jak wiadomo, warunkiem istnienia niezerowego rozwiązania powyższego równania jest spełnienie relacji

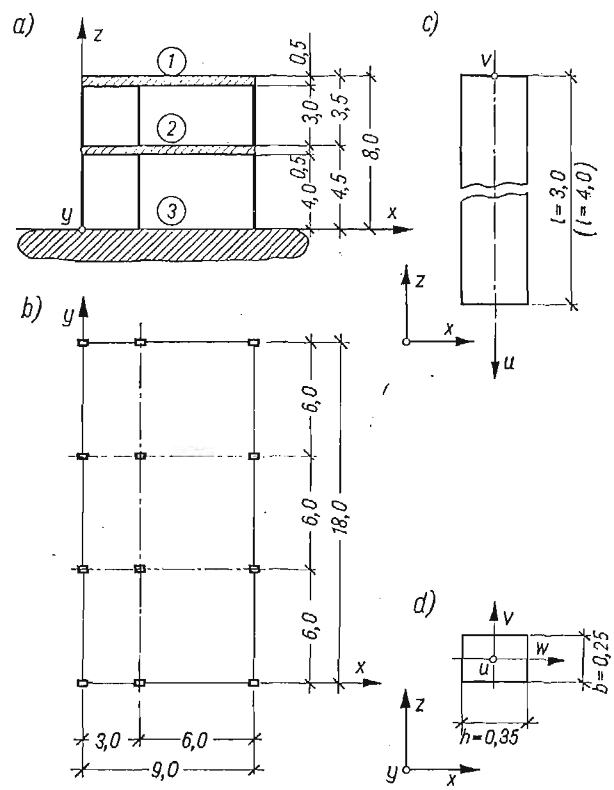
(5.12) $$\det\left(z^{kk}(\omega)\right) = 0.$$

Równanie (5.12) jest równaniem przestępnym. Najprostszą i równocześnie skuteczną metodą numerycznego rozwiązania tego równania jest metoda bisekcji.

Do powyższych obliczeń autor wykonał pakiet programów na EMC ODRA 1204 w językach MOST i ALGOL 1204.

6. Przykład liczbowy

Rozważmy drgania własne ustroju prętowo-bryłowego, przedstawionego na rys. 2. Ustrój składa się z dwu jednakowych, ruchomych brył węzłów, jednej nieruchomej bryły tworzącej podłoże, oraz 24 prętów — po 12 między każdymi dwoma bryłami. Jako materiał



Rys. 2

przyjęto żelbet z betonu marki Rw 200, o module sprężystości podłużnej $E = 2{,}9\times10^2\,\mathrm{Tm}^{-2}$, współczynniku Poissona $\nu = 1/6$ i ciężarze właściwym $\gamma = 2{,}4\ \mathrm{Tm}^{-3}$. W układzie SI powyższe stałe materiałowe mają wartości $E = 28{,}4393\times10^6\ \mathrm{kNm}^{-2}$, $\nu = 1/6$, $\gamma = 23{,}5360\ \mathrm{kNm}^{-3}$. Przyśpieszenie ziemskie $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$.

Wszystkie pręty mają taki sam przekrój o wymiarach: $b = 0{,}25$ m, $h = 0{,}35$ m (rys. 2c i 2d). Współczynniki charakteryzujące przekrój pręta mają następujące wartości: pole przekroju poprzecznego

$$F = b\times h = 0{,}25\times 0{,}35 = 0{,}0875\ \mathrm{m}^2,$$

momenty bezwładności względem układu lokalnego (rys. 2c i 2d)

$$I^v = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}25\times 0{,}35^3}{12} = 8{,}9323\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^4,$$

$$I^w = \frac{hb^3}{12} = \frac{0{,}35\times 0{,}25^3}{12} = 4{,}5573\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^4,$$

$$I^u = I^v + I^w = 13{,}4896\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^4,$$

współczynnik charakteryzujący sztywność pręta na skręcanie [5]

$$C^u = \frac{b^4}{3}\left(\frac{h}{b} - 0{,}630 + 0{,}052\times\left(\frac{b}{h}\right)^4\right) =$$

$$= \frac{0{,}25^4}{3}\left(\frac{0{,}35}{0{,}25} - 0{,}630 + 0{,}052\times\left(\frac{0{,}25}{0{,}35}\right)^4\right) = 10{,}2018\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^4.$$

Współczynniki charakteryzujące własności geometryczne brył ruchomych mają następujące wartości: objętość bryły

$$v = a\times c\times d = 9\times 0{,}5\times 18 = 81\ \mathrm{m}^3,$$

geometryczne momenty bezwładności

$$I^x = \frac{v(d^2+c^2)}{12} = \frac{81(18^2+0{,}5^2)}{12} = 2188{,}7\ \mathrm{m}^4,$$

$$I^y = \frac{v(c^2+a^2)}{12} = \frac{81(0{,}5^2+9^2)}{12} = 548{,}4\ \mathrm{m}^4,$$

$$I^z = \frac{v(a^2+d^2)}{12} = \frac{81(9^2+18^2)}{12} = 2733{,}8\ \mathrm{m}^4,$$

geometryczne momenty dewiacji

$$D^{xy} = D^{yz} = D^{zx} = 0.$$

Macierz przekrojów przywęzłowych $\mathbf{H}_0$ przedstawiamy równością

$$\mathbf{H}_0^T = [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2],$$

w której

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz tę w sposób skrócony możemy zapisać w postaci macierzy $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}^T = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2],$$

w której

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 2, & 2, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 3, & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2, & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład nr 1

Tablica 1

Obliczenia częstosci drgan własnych. Iteracje:

t= .000000000000$_{10}$+00	w= .546618811749$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .100000000001$_{10}$+01	w= .530418011105$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .200000000003$_{10}$+01	w= .483705960124$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .300000000008$_{10}$+01	w= .411929680243$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .400000000006$_{10}$+01	w= .323440541518$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .500000000007$_{10}$+01	w= .228471772351$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .600000000013$_{10}$+01	w= .137838720648$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .700000000004$_{10}$+01	w= .614838189088$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .799999999995$_{10}$+01	w= .700947045414$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .900000000001$_{10}$+01	w=-.216461159255$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .849999999998$_{10}$+01	w=-.106179339456$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .825000000004$_{10}$+01	w=-.263198900558$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .812500000007$_{10}$+01	w= .198252216424$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .818749999998$_{10}$+01	w=-.376425203399$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .815624999995$_{10}$+01	w= .790139785538$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .817187500004$_{10}$+01	w= .203628143192$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .817968750001$_{10}$+01	w=-.872060559624$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817578124995$_{10}$+01	w= .580092121097$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817773437498$_{10}$+01	w=-.146488796303$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001

l= 1 omega[1]= .817675781254$_{10}$ 01
wspolczynnik redukcji= .100$_{10}$ 001

t= .100000000001$_{10}$+02	w=-.252340868666$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .110000000000$_{10}$+02	w=-.977565771267$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .120000000002$_{10}$+02	w= .134244455940$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .115000000002$_{10}$+02	w= .175679820661$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .112500000002$_{10}$+02	w=-.415001799132$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .113750000001$_{10}$+02	w=-.121694724897$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .114375000002$_{10}$+02	w= .266751282970$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .114062500002$_{10}$+02	w=-.476132861118$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .114218750002$_{10}$+02	w=-.104919502649$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .114296875000$_{10}$+02	w= .808624823614$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .114257812501$_{10}$+02	w=-.120423334788$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .114277343752$_{10}$+02	w= .344066740462$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001

l= 2 omega[2]= .114267578127$_{10}$ 02
wspolczynnik redukcji= .100$_{10}$ 001

Koniec obliczen czestosci drgan wlasnych

Liczba czestosci= 2

Omega[1]= .817675781254$_{10}$ 01
Omega[2]= .114267578127$_{10}$ 02

Obliczenia czestosci drgan wlasnych. Iteracje:

t= .817578124995$_{10}$+01	w= .580092121097$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817773437498$_{10}$+01	w=-.146488796303$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817675781254$_{10}$+01	w= .216675418733$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817724609376$_{10}$+01	w= .350615500230$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817749023444$_{10}$+01	w=-.557214971653$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817736816410$_{10}$+01	w=-.103318540757$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817730712886$_{10}$+01	w= .123646212846$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817733764655$_{10}$+01	w= .101631601326$_{10}$+074	x= .100$_{10}$+001
t= .817735290525$_{10}$+01	w=-.465776368486$_{10}$+074	x= .100$_{10}$+001
t= .817734527583$_{10}$+01	w=-.182077792595$_{10}$+074	x= .100$_{10}$+001
t= .817734146119$_{10}$+01	w=-.402365914049$_{10}$+073	x= .100$_{10}$+001
t= .817733955387$_{10}$+01	w= .307107168582$_{10}$+073	x= .100$_{10}$+001
t= .817734050746$_{10}$+01	w=-.476296979597$_{10}$+072	x= .100$_{10}$+001
t= .817734003074$_{10}$+01	w= .129738309106$_{10}$+073	x= .100$_{10}$+001
t= .817734026910$_{10}$+01	w= .410549426580$_{10}$+072	x= .100$_{10}$+001
t= .817734038828$_{10}$+01	w=-.324362532575$_{10}$+071	x= .100$_{10}$+001
t= .817734032876$_{10}$+01	w= .189057442842$_{10}$+072	x= .100$_{10}$+001
t= .817734035845$_{10}$+01	w= .783084378977$_{10}$+071	x= .100$_{10}$+001
t= .817734037344$_{10}$+01	w= .242638212100$_{10}$+071	x= .100$_{10}$+001
t= .817734038086$_{10}$+01	w=-.496950094091$_{10}$+070	x= .100$_{10}$+001
t= .817734037707$_{10}$+01	w= .832158625278$_{10}$+070	x= .100$_{10}$+001
t= .817734037897$_{10}$+01	w= .123289145594$_{10}$+070	x= .100$_{10}$+001

l= 1 omega[1]= .817734037998$_{10}$ 01
wspolczynnik redukcji= .100$_{10}$ 001

Koniec obliczen czestosci drgan wlasnych

Liczba czestosci= 1

Omega[1]= .817734037998$_{10}$ 01

Tablica 3

Obliczenia czestosci drgan wlasnych. Iteracje:

t= $.000000000000_{10}+00$	w= $.546618811749_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.500000000007_{10}+00$	w= $.542538631190_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.100000000001_{10}+01$	w= $.530418011105_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.150000000004_{10}+01$	w= $.510613156955_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.200000000003_{10}+01$	w= $.483705960124_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.250000000005_{10}+01$	w= $.450486591818_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.300000000008_{10}+01$	w= $.411929680243_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.350000000003_{10}+01$	w= $.369164599496_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.400000000006_{10}+01$	w= $.323440541518_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.450000000009_{10}+01$	w= $.276087170355_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.500000000007_{10}+01$	w= $.228471772351_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.550000000010_{10}+01$	w= $.181953915663_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.600000000013_{10}+01$	w= $.137838720648_{10}+080$	x= $.100_{10}+001$
t= $.650000000001_{10}+01$	w= $.973299049241_{10}+079$	x= $.100_{10}+001$
t= $.700000000004_{10}+01$	w= $.614838189088_{10}+079$	x= $.100_{10}+001$
t= $.750000000007_{10}+01$	w= $.311657115073_{10}+079$	x= $.100_{10}+001$
t= $.799999999995_{10}+01$	w= $.700947045414_{10}+078$	x= $.100_{10}+001$
t= $.849999999998_{10}+01$	w=$-.106179339456_{10}+079$	x= $.100_{10}+001$
t= $.825000000004_{10}+01$	w=$-.263198900558$ +078	x= $.100_{10}+001$
t= $.812500000007_{10}+01$	w= $.198252216424_{10}+078$	x= $.100_{10}+001$
t= $.818749999998_{10}+01$	w=$-.376425203399_{10}+077$	x= $.100_{10}+001$
t= $.815624999995_{10}+01$	w= $.790139785538_{10}+077$	x= $.100_{10}+001$
t= $.817187500004_{10}+01$	w= $.203628143192_{10}+077$	x= $.100_{10}+001$
t= $.817968750001_{10}+01$	w=$-.872060559624_{10}+076$	x= $.100_{10}+001$
t= $.817578124995_{10}+01$	w= $.580092121097_{10}+076$	x= $.100_{10}+001$
t= $.817773437498_{10}+01$	w=$-.146488796303_{10}+076$	x= $.100_{10}+001$

l= 1 omega[1]= $.817675781254_{10}$ 01
wspolczynnik redukcji= $.100_{10}$ 001

Koniec obliczen czestosci drgan wlasnych

Liczba czestosci= 1

Omega[1]= $.817675781254_{10}$ 01

Wyniki obliczeń na EMC ODRA-1204 dwu najniższych częstości drgań własnych przedstawiono w tablicach 1, 2 i 3. Wszystkie obliczenia wykonano dla wielkości wymiarowych określonych w układzie SI.

W tablicy 1 przedstawiono iteracje z początkowymi wartościami częstości drgań $\omega_0 = 0\ s^{-1}$ i kroku $kr = 1\ s^{-1}$. Częstotliwości odpowiadające częstościom drgań, obliczonym z dokładnością $10^{-3}\ s^{-1}$, wynoszą

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{8{,}176}{6{,}283} = 1{,}301\ \mathrm{Hz},$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{11{,}427}{6{,}283} = 1{,}819\ \mathrm{Hz}.$$

Dla porównania w tablicy 2 przedstawiono obliczenia najniższej częstości drgań własnych z dokładnością do $10^{-9}\ s^{-1}$, a w tablicy 3 przedstawiono obliczenie najniższej częstości drgań własnych z dokładnością do $10^{-3}\ s^{-1}$ z początkowymi wartościami częstości $\omega_0 = 0\ s^{-1}$ i kroku $kr = 0{,}5\ s^{-1}$.

Ponieważ w powyższych obliczeniach wartość $w = \det[\mathbf{z}(\omega)]$ nie przekraczała zakresu liczb zmiennoprzecinkowych, nie stosowano redukcji współczynników macierzy sztywności $\mathbf{z}$, zatem współczynnik redukcji $x = 1$.

Czas obliczeń jednej iteracji wynosił około 14 s.

7. Uwagi końcowe

Dla elementu prętowo-bryłowego pręta wraz z dwoma bryłami węzłów przyłączonymi do jego końców za pomocą nieważkich, przestrzennych, punktowych, liniowych i kątowych więzów sprężystych — w pracy wyprowadzono dynamiczne, macierzowe, niejednorodne równanie transformacyjne metody przemieszczeń. Określono dwie macierze: macierz $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_r$ sztywności dynamicznej elementu prętowo-bryłowego i macierz $\overline{\overline{\mathbf{L}}}_{r1}$ transformacji wymuszającego wektora stanu na wektor wyjściowych sił brzegowych, przyłożonych w środkach ciężkości brył. Przytoczono równanie metody przemieszczeń układu prętowo-bryłowego. Dla przykładowego ustroju prętowo-bryłowego obliczono dwie najniższe częstości drgań własnych.

Pełny algorytm numerycznej analizy drgań układu prętowo-bryłowego, problemy stabilności numerycznej oraz opis pakietu programów zostaną przedstawione w oddzielnych opracowaniach.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. BOROWIEC, *Obliczanie sil przywęzłowych w elementach krępej ramy przestrzennej*, Arch. Inż. Ląd., 1, **18** (1972) 87 - 101.
2. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Analiza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Bud. Masz., 4, **19** (1972), 623 - 641.
3. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, nr 165, Mechanika XII, 1970.

4. J. KRUSZEWSKI, *Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych*, Mech. Teoret. i Stos., 4, **9** (1971) 499 - 516.
5. W. NOWACKI, *Mechanika Budowli*, PWN, Warszawa t. 1, wyd. 1, 1957, t. 2, wyd. 1, 1960.
6. W. PRZYBYŁO, *Algorytm blokowy obliczeń drgań harmonicznych przestrzennych ustrojów prętowych o niecentrycznych węzlach*, Dynamika Maszyn, Zbiór prac II Konferencji PAN i RzTPN (Rzeszów, VI. 1969), Rzeszów 1972, 35 - 43.
7. W. PRZYBYŁO, *Układ prętowo-bryłowy jako model fizyczny do analizy drgań przestrzennych konstrukcji szkieletowych*, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Komunikat nr 145, 1974.
8. W. PRZYBYŁO, *Przestrzenne drgania pręta o sprężystych podparciach końców*, Arch. Inż. Ląd., 2, **20** (1974) 265 - 278.
9. W. PRZYBYŁO, *Automatyzacja obliczeń drgań sprężystych, tłumionych układów bryłowych*, Arch. Bud. Masz., 3, **21** (1974) 419 - 433.
10. W. PRZYBYŁO, *Ustalone drgania układu prętowo-bryłowego*, Arch. Inż. Ląd. (w przygotowaniu do druku).
11. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1973.

Резюме

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТА СИСТЕМЫ СОСТОЯЩЕЙ ИЗ СТЕРЖНОЙ И НЕДЕФОРМИРУЕМЫХ МАСС

В работе рассматриваются пространственные недемфированные собственные и вынужденные установившиеся гармонические колебания элемента системы состоящей из бисимметрического упругого призматического стержня, концы которого соединены с помощью невесомых линейных и угловых упругих связей с двумя жесткими массами. Нагрузка принималась в виде системы гармонических векторов состояния с одинаковыми частотами и фазами колебаний. Для состоящего из стержня и масс элемента выводятся матричные неоднородные трансформационные уравнения метода перемещений.

Summary

SPATIAL VIBRATIONS OF ROD-BODY ELEMENT

In the paper are considered spatial, undamped, free and forced, steady-state harmonic vibrations of a rod-body element — the system composed of a bisymmetric, elastic rod the ends of which are connected with two rigid bodies by means of spatial, weightless supports of both the displacement and rotation types. The loading is assumed to form a system of harmonic state vectors with identical frequencies and phases of vibrations. A matrix-type nonhomogeneous transformation equation is derived, based on the displacement method.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1974 r.