

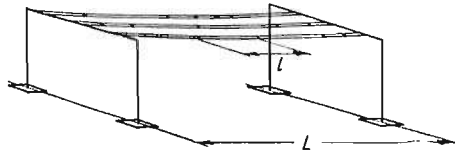
DYNAMIKA PŁASKIEJ WIĄZKI PRZEWODÓW PRZY PRĄDACH ZWARCIOWYCH

MARIA RADWAŃSKA, ZENON WASZCZYŚCZYŃ (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne, założenia i oznaczenia

Przy projektowaniu konstrukcji wsporczych stacji rozdzielczych wysokich napięć należy uwzględnić dynamiczne oddziaływania powstające pomiędzy przewodami podczas krótkich zwarć. Znaczny wzrost sił elektrodynamicznych powoduje gwałtowne zbliżanie się przewodów, czemu towarzyszy wzrost sił w przewodach, a to z kolei wywołuje dynamiczną «odpowieź» konstrukcji wsporczej.

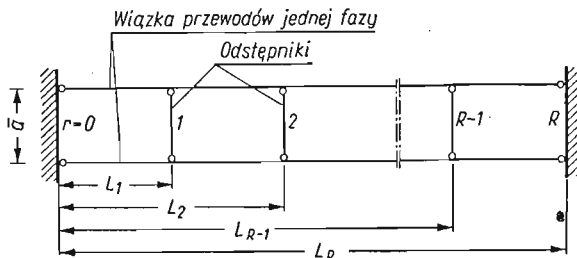
Pełne opisanie zjawiska jest zadaniem bardzo złożonym, gdyż wymaga ujęcia wzajemnego sprzężenia konstrukcji linowo-ramowej, jaką jest najprostsza stacja wysokiego napięcia (rys. 1). Obok oddziaływań elektrodynamicznych w wiązkach przewodów należa-



Rys. 1

łoby również uwzględnić oddziaływania międzyfazowe (międzywiązkowe). Obydwa typy oddziaływań mają charakter nieliniowy, gdyż zależą one nie tylko od zmiennego w czasie natężenia prądu zwarciovego, ale też od wzajemnej konfiguracji (przemieszczeń) przewodów.

W obecnej pracy zajmiemy się kluczowym problemem obliczania lin¹⁾ jednej wiązki dwuprzewodowej z nieregularnie umieszczonymi odstępnikami (rys. 2). Rozwiązywanie



Rys. 2

¹⁾ W dalszym ciągu we wszystkich miejscach, gdzie opisujemy mechaniczną stronę problemu, używamy raczej terminu «lina» niż «przewód», który bardziej kojarzy się ze zjawiskami elektrycznymi.

wiązki oddzielonej od konstrukcji wsporczej będzie stanowiło istotną część ogólnego algorytmu obliczania stacji rozdzielczych.

Dotychczas liczone liny przy prądach zwarciovych na podstawie szeregu upraszczających założeń [8, 10], z których jednym z istotniejszych jest narzucenie kształtu odkształconych lin, co jest równoznaczne z radykalnym zmniejszeniem jej liczby stopni swobody.

W obecnej pracy będziemy traktowali liny jako układy o nieskończonej liczbie stopni swobody. Możliwość powstania dużych kątów obrotu normalnej do osi liny skłania do oparcia się na teorii dużych przemieszczeń. Z kolei niektóre doświadczenia [1] wykazały, że do chwili «sklejenia się» przewodów istotny jest ich ruch poziomy. «Podrzucanie» następuje w dalszej fazie «sklejania». Towarzyszy temu powstanie impulsu przekazywanego na konstrukcję wsporczą.

To spostrzeżenie zezwala na traktowanie lin o małym zwisie jako strun i ograniczenie rozważań do przypadku przemieszczeń w płaszczyźnie poziomej.

Dalszym założeniem jest przyjęcie lin jako wiotkich, idealnie sprężystych cięgien z unieruchomionymi końcami. Będziemy opierali się na teorii dużych ugięć, lecz małych przemieszczeń (pomijamy wpływ zmiany pola przekroju poprzecznego na rozkład naprężeń i stosujemy miarę Cauchy'ego dla odkształceń).

Oddziaływania elektrodynamiczne obliczymy z prawa Biota-Savarta, uwzględniając składową bezokresową prądu zwarciovego [6]. Intensywności tych sił silnie zależą od wzajemnego położenia przewodów, co można uwzględnić przez wykorzystanie pamięci komputera dla zapisu aktualnej konfiguracji lin.

W pracy wyprowadzimy i zbadamy podstawowy układ równań różniczkowych oraz zaproponujemy przybliżony opis przydatny do obliczeń numerycznych.

Wszystkie równania i obliczenia będą prowadzone w wielkościach bezwymiarowych. Ogólnie, wielkości fizyczne będą oznaczone nadkreśleniami bądź dużymi literami. Poniżej zestawiono najistotniejsze oznaczenia; pozostałe wielkości zaznaczono na rysunkach bądź też objaśniono w tekście.

- $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \eta_m$ współczynniki w równaniach różnicowych,
- α, a, b, c współczynniki w podstawowych układach równań,
- \bar{a} osiowy rozstaw lin w wiązce,
- A współczynnik w funkcji prądu $k(\tau)$,
- $d = \bar{d}/\bar{a}$ bezwymiarowa średnica liny,
- E, F moduł sprężystości materiału i powierzchnia pola przekroju poprzecznego liny,
- φ kąt nachylenia stycznej do osi odkształconej liny,
- $G(\mathbf{x})$ funkcja konfiguracji przewodów występująca w oddziaływaniu \bar{p} prądu zwarcia,
- I, I'' skuteczne wartości natężenia prądu roboczego i prądu zwarcia,
- $k(\tau)$ funkcja czasowa występująca w oddziaływaniu elektrodynamicznym \bar{p} prądu zwarcia,
- l, L_r numeracja współrzędnych $\xi = \xi_i$ i położenia odstępników,

- $\varrho_0/g, \mu = \varrho_0 \bar{a}^2/gN_0 T^2$ jednostkowa, wymiarowa i bezwymiarowa masa ciężka,
- m numeracja czasu $\tau = \tau_m$,
- $N_0, v = N_0/EF$ wymiarowa i bezwymiarowa siła wstępnego naciągu,
- $n = S/N_0$ względny przyrost naciągu podczas ruchu liny,
- $p = P\bar{a}/N_0$ intensywność oddziaływania elektrodynamicznego,
- $r = 0, 1, \dots, R$ numeracja podpór i odstępników,
- $s = \bar{s}/\bar{a}$ współrzędna krzywoliniowa odmierzana wzdłuż odkształconej osi liny,
- $\tau = t/T$ bezwymiarowy czas,
- T, T_a okres prądu i stała czasowa prądu zwarcia,
- $u = \bar{u}/\bar{a}, v = \bar{v}/\bar{a}$ przemieszczenia wzdłuż osi x i y ,
- $\xi = \bar{\xi}/\bar{a}, x = \bar{x}/\bar{a}$ bezwymiarowe współrzędne punktu osi liny: materialna i przestrzenna,
- $(\prime) = \partial/\partial\xi, (\dot{\prime}) = \partial/\partial\tau$ oznaczenia pochodnych,
- $\{w\}_m$ zbiory wartości w_i odpowiadające czasowi τ_m .

2. Oddziaływania elektrodynamiczne przewodów

Zgodnie z założeniami zajmiemy się wzajemnym oddziaływaniem przewodów jednej płaskiej wiązki dwuprzewodowej (rys. 2), w której płynie prąd zgodny w fazie. Wynika stąd «przyciągające» działanie sił elektrodynamicznych.

Przebieg prądu roboczego w obwodzie jednofazowym określa funkcja okresowa

$$(2.1) \quad i = \sqrt{2} I \sin \omega t.$$

Prąd zwarcia można opisać następującym przybliżonym wzorem [6]:

$$(2.2) \quad i \approx \sqrt{2} I'' \left[\exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) - \cos \omega t \right].$$

We wzorze (2.2) pominięto wyższe harmoniczne przebiegu prądu oraz zmniejszenie się składowej okresowej I'' prądu zwarciego. Uwzględniono natomiast zanikanie składowej bezokresowej o stałej T_a . Zamiast tej stałej wprowadza się często współczynnik prądu udarowego k_u , odpowiadający maksymalnej wartości natężenia (w przybliżeniu po czasie $t \approx \Pi/\omega$)

$$(2.3) \quad i_u \approx \sqrt{2} I'' [1 + \exp(-t/T_a)] \doteq k_u \sqrt{2} I''.$$

Współczynnik ten na ogół wynosi $k_u \leq 1,8$, co odpowiada $T_a \leq 0,05$ (por. [6]).

Intensywność oddziaływania elektrodynamicznego pola magnetycznego o indukcji \mathbf{B} na przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu i , w kierunku jednostkowego wektora stycznego \mathbf{t} , wynosi według prawa Biota-Savarta

$$(2.4) \quad \mathbf{P} = i(\mathbf{t} \times \mathbf{B}).$$

Indukcja wzdłuż przewodu m , wynika z oddziaływania przewodu n , w środowisku jednorodnym o współczynniku przenikalności magnetycznej $\mu_0 = \text{const}$, wynosi

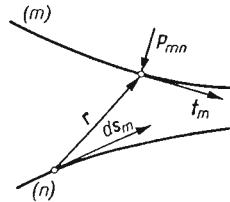
$$(2.5) \quad \mathbf{B}_{mn} = \frac{\mu_0 i_n}{4\pi} \oint_{I_n} \frac{d\mathbf{s}_n \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Tak więc, zgodnie z (2.4), intensywność oddziaływania przewodu n na przewód m (rys. 3) można napisać w postaci

$$(2.6) \quad \mathbf{P}_{mn} = \frac{\mu_0 i_m i_n}{4\pi} \oint_{l_n} \frac{\mathbf{t}_m \times (d\mathbf{s}_n \times \mathbf{r})}{r^3}.$$

Jeśli w ramach jednej wiązki przewody są zakrzywione, to mogą one oddziaływać same na siebie. W wiązce dwuprzewodowej przyjmijmy $m = 1$ oraz $n = 2$, co po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych pozwala napisać wzór na intensywność oddziaływania elektrodynamicznego w postaci

$$(2.7) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12} = k(\tau)\mathbf{G}(\mathbf{x}).$$



Rys. 3

We wzorze tym rozdzielono funkcje zależne od prądu (czasu) i od konfiguracji przewodów:

$$(2.8) \quad k(\tau) = A \left[\exp\left(-\frac{T}{T_a} \tau\right) - \cos 2\pi\tau \right]^2,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^2 \oint_{l_j} \frac{\mathbf{t}_j \times (d\mathbf{s}_j \times \mathbf{r}_j)}{r_j^3}, \quad (j = 1, 2),$$

$$A = \frac{I'^2 \mu_0 a}{2\pi N_0}.$$

Z podwójnego iloczynu wektorowego w funkcji $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ oraz z nieujemności funkcji $k(\tau)$ wynika, że wektor oddziaływania \mathbf{p} będzie leżał z płaszczyźnie wiązki, będzie stale prostopadły do przewodu, dla którego został obliczony i będzie w dodatku miał zwrot zapewniający «przyciąganie» przewodów (rys. 3). Z tego względu możemy się dalej ograniczyć do obliczania jego długości $p = |\mathbf{p}|$ według wzoru

$$(2.9) \quad p = k(\tau)G.$$

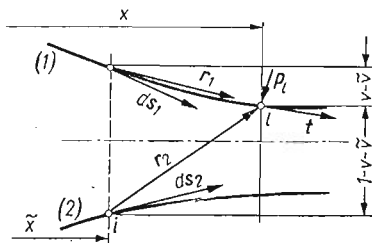
We wzorze (2.9) funkcję $k(\tau)$ należy liczyć według (2.8)₂. Funkcję skalarną G dla symetrycznej dwuprzewodowej płaskiej wiązki można po prostych przekształceniach napisać w postaci

$$(2.10) \quad G = \int_{(v)} \left[\left(\frac{v-\tilde{v}}{r_1^3} + \frac{1-v-\tilde{v}}{r_2^3} \right) d\tilde{x} - \left(\frac{x-\tilde{x}}{r_1^3} + \frac{x-\tilde{x}}{r_2^3} \right) d\tilde{v} \right],$$

gdzie użyto skróconych oznaczeń dla r_j (rys. 4)

$$(2.11) \quad r_1^2 = (x-\tilde{x})^2 + (v-\tilde{v})^2, \quad r_2^2 = (x-\tilde{x})^2 + (1-v-\tilde{v})^2.$$

We wzorze (2.10) całkowania dokonuje się równocześnie wzdłuż przewodów 1 i 2, czemu odpowiadają dla bieżącego punktu współrzędne bezwymiarowe: (x, \tilde{v}) lub $(\tilde{x}, 1 - \tilde{v})$.

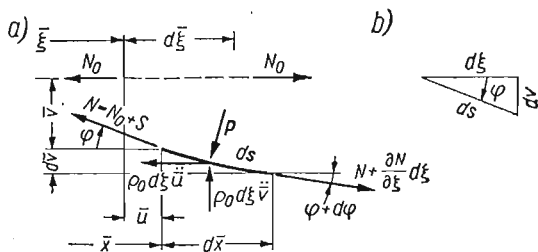


Rys. 4

3. Podstawowy układ równań liny

Pominięcie oddziaływań międzywiązkowych zezwala na rozpatrywanie tylko jednej liny wobec symetrii odkształcenia się wiązki dwuprzewodowej. Dalsze założenie płaskiego stanu przemieszczeń umożliwia pominięcie wpływu ciężaru własnego i ograniczenie rozważań do obciążenia wstępnym naciąganiem N_0 , a przy prądach zwarciovych do obciążenia o intensywności $p(\tau)$, działającego stałe w płaszczyźnie wiązki.

Dla opisu dużych przemieszczeń posłużymy się opisem materialnym i jako zmienną niezależną przyjmijmy współrzędną $\xi = \bar{\xi}/\bar{a}$, odmierzaną wzdłuż liny w stanie wstępnego napięcia siłą N_0 (rys. 5).



Rys. 5

Konfigurację aktualną opiszemy współzrędnymi przestrzennymi układu kartezjańskiego x, y lub też składowymi wektora przemieszczeń u, v

$$(3.1) \quad x = \xi + u, \quad y \equiv v,$$

przy czym dla odkształconego elementu cięgna zachodzą związki

$$dx = ds \cos \varphi, \quad dv = ds \sin \varphi,$$

które można napisać w postaci różniczkowej

$$(3.2) \quad x' = s' \cos \varphi, \quad v' = s' \sin \varphi.$$

Równania ruchu wynikają z rzutowania sił na kierunki osi x i y (rys. 5):

$$(3.3) \quad \begin{aligned} -\rho_0 d\ddot{u} - N \cos \varphi + (N + dN) \cos(\varphi + d\varphi) - \bar{p} d\bar{s} \sin \varphi &= 0, \\ -\rho_0 d\ddot{v} - N \sin \varphi + (N + dN) \sin(\varphi + d\varphi) + \bar{p} d\bar{s} \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli uwzględnimy zależności

$$\sin(\varphi + d\varphi) \approx \sin \varphi + d\varphi \cos \varphi, \quad \cos(\varphi + d\varphi) \approx \cos \varphi - d\varphi \sin \varphi,$$

zasadę zachowania masy

$$\rho d\bar{s} = \rho_0 d\bar{\xi}$$

oraz wprowadzimy wielkości bezwymiarowe, to równania ruchu można napisać w następującej postaci:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mu \ddot{u} + (1+n) \sin \varphi \varphi' - n' \cos \varphi &= -ps' \sin \varphi, \\ \mu \ddot{v} + (1+n) \cos \varphi \varphi' - n' \sin \varphi &= ps' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Odształcenia będziemy traktowali jako małe, licząc je według miary Cauchy'ego w odniesieniu do wstępnie napiętej liny

$$(3.5) \quad \varepsilon = \frac{d\bar{s} - d\bar{\xi}}{d\bar{\xi}} = s' - 1.$$

Zgodnie z założeniem ograniczymy się do materiału idealnie sprężystego, co daje

$$(3.6) \quad \varepsilon = \frac{S}{EF}.$$

Po podstawieniu (3.6) do (3.5) otrzymujemy zależność pomiędzy względnym wydłużeniem liny s' i siłą osiową n

$$(3.7) \quad s' = 1 + \nu n.$$

Jeśli z kolei po lewej stronie (3.7) podstawimy związek geometryczny wynikający z (3.2)

$$(3.7a) \quad s' = \sqrt{x'^2 + v'^2}$$

i tak otrzymane równanie zróżniczkujemy, to możemy wyznaczyć pochodną siły osiowej

$$(3.8) \quad n' = \frac{s''}{\nu} \equiv \frac{1}{\nu s'} (x'x'' + v'v'').$$

Z równań ruchu (3.4) można wyeliminować kąt φ przez wykorzystanie związków (3.2). Po przekształceniach i dołączeniu (3.8) otrzymujemy następujący podstawowy układ równań:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - ax'' - bx'n' &= -\frac{p}{\mu} v', \\ \ddot{v} - av'' - bv'n' &= \frac{p}{\mu} x', \\ x'x'' + v'v'' - cn' &= 0, \end{aligned}$$

gdzie dla skrócenia zapisu użyto następujących oznaczeń:

$$(3.10) \quad a = \frac{1+n}{\mu(1+\nu n)}, \quad b = \frac{1-\nu}{\mu(1+\nu n)^2}, \quad c = \nu(1+\nu n).$$

Układ (3.9) jest wzajemnie sprzężony poprzez n' (w [5] wykazano, że takie sprzężenia powstają przez uwzględnienie rozciągłości osi cięga w równaniach ruchu). Po wyeliminowaniu n' dochodzimy do układu

$$(3.11) \quad \begin{aligned} (\ddot{x} - \alpha x'')v' - (\ddot{v} - \alpha v'')x' &= -\frac{p}{\mu}, \\ (\ddot{x} - \alpha x'')x' + (\ddot{v} - \alpha v'')v' &= 0, \end{aligned}$$

gdzie obok współczynnika a wprowadzono nowy

$$(3.12) \quad \alpha = \frac{1}{v\mu}.$$

Wyprzedzając dokładniejsze badanie podstawowego układu równań już teraz można stwierdzić, że układ (3.11) ma charakter nieliniowych równań falowych o różnych prędkościach propagacji \sqrt{a} i $\sqrt{\alpha}$.

Pełny opis modelu matematycznego wymaga jeszcze sformułowania warunków granicznych zagadnienia.

Jeśli chodzi o warunki początkowe, to można je przyjąć dla $\tau = 0$ jako warunki typu Cauchy'ego:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} u(\xi, 0) = \dot{u}(\xi, 0) &= 0, \\ v(\xi, 0) = \dot{v}(\xi, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Bardziej skomplikowanie przedstawia się sprawa warunków brzegowych. Pominięcie sztywności giętej lin powoduje ich «załamania» nad odstępnikami, co wymaga rozważania ich przedziałami. W przypadku podpór niepodatnych w kierunku y i nieodkształcalnych odstępników warunki brzegowe i ciągłości dla funkcji v można napisać w postaci

$$(3.14) \quad v(L_r, \tau) = 0, \quad (r = 0, 1, \dots, R),$$

gdzie indeks r numeruje podparcia zgodnie z rys. 2.

Warunki brzegowe dla skrajnych podpór niepodatnych w kierunku x mają dla przemieszczeń u postać

$$(3.15) \quad u(0, \tau) = 0, \quad v(L_R, \tau) = 0.$$

Nie nakłada się natomiast żadnych więzów na odstępniki w kierunku X , a więc

$$(3.16) \quad u(L_{r-}, \tau) = u(L_{r+}, \tau), \quad (r = 1, 2, \dots, R-1).$$

Tak więc będzie można rozpatrywać ruch liny przedziałami, a następnie spełniać warunki ciągłości (3.14) i (3.16).

Jeszcze bardziej kłopotliwe jest sformułowanie warunku brzegowego dla siły osiowej n . Zgodnie ze wzorami (3.7) i (3.7a) można napisać

$$(3.17) \quad n(0, \tau) = \frac{1}{v} \left\{ \sqrt{[x'(0, \tau)]^2 + [y'(0, \tau)]^2} - 1 \right\},$$

a więc warunek zależny od bieżącego rozwiązania

$$x_0 = f_1(\tau, n), \quad y_0 = f_2(\tau, n),$$

które będzie można uzyskać np. w drodze kolejnych przybliżeń.

4. Badanie podstawowego układu równań i równania przybliżone

Przed wybraniem właściwej metody rozwiązywania podstawowego układu (3.9) należy dokładniej zbadać jego własności. Podobieństwo do równań falowych pozwala przypuszczać, że będą one miały cechy równań hiperbolicznych, skąd wynika konieczność wyznaczenia obszaru określoności rozwiązania, ograniczonego odpowiednimi rodzinami charakterystyk.

Charakterystyki wyznaczmy według metody MISESA, opracowanej w [7] dla równań hydromechaniki, gdzie można spotkać układy równań podobnych do (3.9).

Metoda została opracowana dla równań pierwszego rzędu. W przypadku układu (3.9) wprowadzimy nowe funkcje

$$(4.1) \quad z_1 = x', \quad z_2 = \dot{x}, \quad z_3 = v', \quad z_4 = \dot{v}, \quad z_5 = n,$$

co daje liczbę poszukiwanych funkcji $M = 5$. Liczba zmiennych niezależnych ξ i τ wynosi $N = 2$, co odpowiada zadaniu płaskiemu [7]. Brakujące równania otrzymamy ze związków Schwarza

$$(4.2) \quad \dot{z}_1 = z'_2, \quad \dot{z}_3 = z'_4.$$

Równanie charakterystyczne dla układu (3.9) i (4.2) otrzymamy z warunku (por. [7]):

$$(4.3) \quad \begin{vmatrix} -a\lambda_\xi & \lambda_\tau & 0 & 0 & -bx'\lambda_\xi \\ 0 & 0 & -a\lambda_\xi & \lambda_\tau & -bv'\lambda_\xi \\ x'\lambda_\xi & 0 & v'\lambda_\xi & 0 & -c\lambda_\xi \\ \lambda_\tau & -\lambda_\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\tau & -\lambda_\xi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie λ_ξ i λ_τ są współrzędnymi wektora λ , prostopadłego do charakterystyki.

Po rozwinięciu wyznacznika otrzymujemy z (4.3) równanie

$$(4.4) \quad \lambda_\xi [d_1 \eta^2 - (2d_1 + d_2) \eta + (d_1 + d_2)] = 0,$$

gdzie dla skrócenia zapisu użyto oznaczeń

$$(4.5) \quad d_1 = ac = \frac{\nu}{\mu}(1+n), \quad d_2 = bs'^2 = \frac{1-\nu}{\mu}, \quad \eta = \frac{\lambda_\tau^2}{a\lambda_\xi^2}.$$

Pierwiastkami równania (4.4) są

$$(4.6) \quad \lambda_\xi = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = 1 + \frac{d_2}{d_1},$$

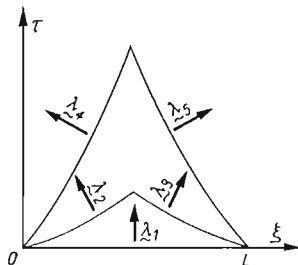
a po powrocie do pierwotnych wielkości, współrzędne wektorów λ wynoszą

$$(4.7) \quad \lambda_\xi^{(1)} = 0, \quad \left. \frac{\lambda_\tau}{\lambda_\xi} \right|_{(2,3)} = \pm \sqrt{\frac{1+n}{\mu(1+m)}}, \quad \left. \frac{\lambda_\tau}{\lambda_\xi} \right|_{(4,5)} = \pm \frac{1}{\sqrt{\nu\mu}}.$$

Rzeczywiste pierwiastki równania charakterystycznego wskazują na hiperboliczny typ równań (3.9). Wystąpienie dwóch rodzin ukośnych charakterystyk (rys. 6) w sposób zasadniczy utrudnia stosowanie metod numerycznych.

Stosowanie całkowania odpowiednich równań ciągłości wzdłuż charakterystyk jest niemożliwe na skutek zależności oddziaływania elektrodynamicznego p od aktualnej konfiguracji liny. Z kolei stosowanie standardowych metod różnic skończonych (por. [4])

jest bardzo utrudnione przez konieczność dostosowywania siatki różnicowej do płaskiej rodziny charakterystyk o wektorach normalnych λ_4 i λ_5 (rys. 6). Występowanie bardzo małej wartości ν w mianowniku (4.7)₃ przybliża tę rodzinę do osi ξ , co wymaga stosowania małych przyrostów $\Delta\tau$, a więc obniży efektywność metody różnicowej.



Rys. 6

Wymienione trudności skłoniły nas do poszukiwania odpowiednich sposobów przybliżonych dla rozwiązania zagadnienia. Jedną z możliwości jest uproszczenie podstawowego układu równań do postaci przydatnej w obliczeniach numerycznych.

Istotnym ułatwieniem jest przyjęcie stałej siły w cięgnię

$$n(\xi, \tau) \equiv c(\tau).$$

Konsekwencją tego założenia są związki wynikłe z równań (3.9):

$$(4.8) \quad x'x'' = -v'v'', \quad x'\ddot{x} = -v'\ddot{v}.$$

Mechaniczną interpretacją związku (4.8)₂ jest ustalenie kierunku działania przyspieszeń, a więc też sił bezwładności, jako prostopadłego do elementu ds , a więc tak samo jako obciążenia elektrodynamicznego \bar{p} (por. rys. 5).

Po wykorzystaniu związków (4.8) dwa pierwsze równania układu (3.9) są liniowo zależne. Do równania (3.9)₂ dołączymy równania wynikające z (3.7) oraz warunek brzegowy (3.15)₂, rozpisany w postaci całki:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \ddot{v} &= \frac{1+n}{\mu(1+\nu n)}v'' + \frac{p}{\mu}x', \\ x' &= \sqrt{(1+\nu n)^2 - v'^2}, \\ \int_0^{L_R} (x' - 1)d\xi &= 0. \end{aligned}$$

Do tak uproszczonego układu równań (4.9) dołączamy warunki początkowe

$$(4.10) \quad v(\xi, 0) = \dot{v}(\xi, 0) = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(4.11) \quad x(0, \tau) = 0, \quad v(L_r, \tau) = 0 \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, \dots, R.$$

Obszar istnienia rozwiązania układu (4.9) jest teraz ograniczony bardziej stromymi charakterystykami (4.7)₂. Umożliwia to stosowanie większych kroków czasowych $\Delta\tau$ w dalej podanym algorytmie rozwiązywania.

Równanie (4.9)₃ będzie służyło do obliczania siły podłużnej w linii n . Ponieważ siła ta jest funkcją aktualnej konfiguracji lin, siłę n będzie można obliczać w drodze kolejnych przybliżeń. W tym celu rozwinieemy funkcję podcałkową w szereg potęgowy i przez zachowanie czterech pierwszych wyrazów dochodzimy do następującego wzoru:

$$(4.12) \quad n^{(r)} = \frac{1}{L_R \nu} \left[\frac{A_2}{2(1+\nu n)} + \frac{A_4}{8(1+\nu n)^3} + \frac{A_6}{16(1+\nu n)^5} \right]_{(r-1)},$$

gdzie użyto oznaczeń

$$(4.13) \quad A^k = \int_0^{L_R} (v')^k d\xi \quad \text{dla} \quad k = 2, 4, 6.$$

5. Opis algorytmu rozwiązywania przybliżonego układu równań

Do całkowania układu (4.9) zastosujemy metodę różnic skończonych. Celem uzyskania maksymalnej dokładności obliczeń węzły siatki będziemy starali się umieszczać wewnątrz obszaru określoności zadania, jak najbliżej charakterystyk [4]. Z tego względu przy ustalonym kroku zmiennej geometrycznej $\Delta\xi$ użyjemy zmiennego kroku czasowego

$$(5.1) \quad \Delta\tau_{m+1} = \alpha_m \tau_m, \quad \alpha_m = \sqrt{\frac{(1+n_{m-1})(1+\nu n_m)}{(1+n_m)(1+\nu n_{m-1})}},$$

przy czym dla rozpoczęcia całkowania przyjmiemy $\Delta\tau_0$ odpowiadające (4.7)₂

$$(5.1a) \quad \Delta\tau_0 = \sqrt{\mu} \Delta\xi, \quad \alpha_0 = 1.$$

Zmienny krok całkowania $\Delta\tau_m$ uwzględniono we wzorze różnicowym na drugą pochodną czasową

$$(5.2) \quad \ddot{v}_{i,m} \approx \frac{v_{m+1} - (1+\alpha_m)v_m + \alpha_m v_{m-1}}{\alpha_m(1+\alpha_m)\Delta\tau_m^2/2} \Big|_i,$$

gdzie indeks $l = 0, 1, 2, \dots, L_R$ numeruje zmienną przestrzenną ξ , a indeks $m = 0, 1, 2, \dots, M$ czas τ .

Po podstawieniu (5.2), wobec wzoru różnicowego na pochodną wprzód można przekształcić równania (4.9)₁ i (4.9)₂ do postaci

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v_{m+1,l} &= -\alpha_m v_{m-1,l} + \beta_m v_{m,l} + \gamma_m (v_{m,l-1} + v_{m,l+1}) + \eta_m (\Delta\xi + \Delta u_{m,l}) p_{m,l}, \\ u_{m,l+1} &= u_{m,l} + \Delta u_{m,l}, \\ \Delta u_{i,m} &= \sqrt{(1+\nu n)^2 \Delta\xi^2 - (v_{i+1} - v_i)^2} \Big|_m - \Delta\xi, \end{aligned}$$

gdzie obok (5.1)₂ użyto nowych oznaczeń

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \beta_m &= 1 + \alpha_m - 2\gamma_m, \quad \gamma_m = \frac{1+n_m}{1+\nu n_m} \eta_m, \\ \eta_m &= \frac{\Delta\tau_m^2}{2\mu\Delta\xi^2} \alpha_m (1+\alpha_m). \end{aligned}$$

Również całki A_k we wzorze iteracyjnym (4.12) obliczane będą w sposób przybliżony

$$(5.5) \quad A_k \approx \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{l=0}^{L_R-1} (v_{l+1} - v_l)^k, \quad k = 2, 4, 6.$$

Warunki graniczne sformułujemy też w zapisie różnicowym. Korzystając z centralnej różnicy skończonej warunki początkowe (4.10) przedstawimy w postaci

$$(5.6) \quad v_{0,l} = 0, \quad v_{-1,l} = v_{1,l},$$

a po podstawieniu ich do (5.3)₁ i uwzględnieniu $\alpha_0 = 1$ otrzymujemy

$$(5.6a) \quad v_{1,l} = \frac{\Delta\tau_0^2}{2\mu} p_{0,l}.$$

Warunki brzegowe (4.11) napiszemy przy użyciu indeksów l i m

$$(5.7) \quad x_{m,0} = 0, \quad v_{m,L_r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, L_R.$$

Wzory różnicowe (5.3) umożliwiają przedłużanie rozwiązania wzdłuż linii $\xi_l = \text{const}$. Przy znanych wartościach dyskretnych zbiorów $\{v\}_{m-1}$, $\{v\}_m$, $\{u\}_m$, $\{p\}_m$ i n_m można z równania (5.3)₁ obliczyć v_l dla nowego czasu τ_{m+1} , uwzględniając przy tym warunki brzegowe (5.7)₂. Następnie obliczamy iteracyjnie siłę n_{m+1} według (4.12) i $\{u\}_{m+1}$ według (5.3)₂.

Aby rozpocząć obliczenia liczymy $v_{-1,l}$ według (5.6a), natomiast pozostałe wartości przyjmujemy, jak dla lin znajdujących się w spoczynku

$$(5.8) \quad \{v\}_{-1} = \frac{\Delta\xi^2}{2} \{p\}_0, \quad \{v\}_0 = \{u\}_0 = \{0\}, \quad n_0 = 0.$$

Przy korzystaniu ze wzoru iteracyjnego (4.12) jako pierwsze przybliżenie siły n_m przyjmujemy wartość obliczoną ze wzoru ekstrapolacyjnego

$$(5.9) \quad n_{m+1}^0 = 3(n_m - n_{m-1}) + n_{m-2}, \quad n_{-2} = n_{-1} = n_0 = 0.$$

Istotnym punktem algorytmu jest liczenie oddziaływań elektrodynamicznych $p_{m,l}$. Wartości tych oddziaływań można obliczyć przez zastosowanie wzoru kwadraturowego do obliczenia całki (2.10); w ułożonym algorytmie zastosowano wzór trapezowy

$$(5.10) \quad p_l = k(\tau) \left[\sum_{i=1}^{L_R-1} \Delta G_i + \frac{1}{2} (\Delta G_0 + \Delta G_{L_R}) \right],$$

gdzie dla skrócenia zapisu użyto

$$(5.11) \quad \Delta G_i = \frac{1}{r_1^3} [(v_l - v_i) \Delta x_i - (x_l - x_i) \Delta v_i] + \frac{1}{r_2^3} [(1 - v_l - v_i) \Delta x_i - (x_l - x_i) \Delta v_i],$$

$$r_1 = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (v_l - v_i)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (1 - v_l - v_i)^2},$$

$$\Delta w_i = \frac{1}{2} (w_{i+1} - w_{i-1}), \quad \Delta w_0 = w_1 - w_0, \quad \Delta w_{L_R} = w_{L_R} - w_{L_R-1}$$

dla $w = x, v$.

Obliczenia intensywności obciążenia p_l należy wykonać dla $l = 0, 1, \dots, L_R$, a więc $L_R + 1$ razy, aby wypełnić cały zbiór $\{p\}_m$. Obliczenie to jest najbardziej czasochłonne. Ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń można je skrócić. Skorzystamy w tym celu z własności funkcji ΔG_i , której wartości szybko maleją w miarę oddalania się od punktu l (występują mnożniki r_j^{-3}). Dlatego sumę występującą w (5.10) rozdzielimy na dwie części, które odpowiadają sumowaniu «na lewo» (wskaźnik i maleje) i «na prawo» od punktu l

$$(5.12) \quad \sum_i \Delta G_i \approx \sum_{i=l}^{i^-} \Delta G_i + \sum_{i=l+1}^{i^+} \Delta G_i.$$

Wartości i^- oraz i^+ są ustalane w trakcie obliczania, tak aby błąd powstały przez odrzucenie pewnej liczby wyrazów sumy w (5.10) nie przekraczał z góry danej wartości $2b_p$. Sumowanie «w lewo» i «na prawo» prowadzimy aż do spełnienia nierówności

$$(5.13) \quad b_p \sum_{i=l}^{i^-} \Delta G_i - i \Delta G_i > 0, \quad i^- \geq 1,$$

$$b_p \sum_{i=l+1}^{i^+} \Delta G_i - (L_R - i) \Delta G_i > 0, \quad i^+ \leq L_R - 1.$$

Podprogram liczenia sił p_l ułożono tak, że najpierw się liczy sumę w (5.10) i jeśli $i^- > 1$, to nie oblicza się ΔG_0 oraz pomija się ΔG_{L_R} w przypadku $i^+ < L_R - 1$. Aby uniknąć osobliwości w (5.11) przyjęto $r_1 = 1$ dla $i = l$, co oznacza, że punkt nie może elektrodynamicznie oddziaływać sam na siebie.

W wyniku ruchu przewody będą zbliżały się do siebie i zachodzi możliwość ich zetknięcia się. W takim przypadku oddziaływania elektrodynamiczne «sklejające» obydwa przewody wzajemnie się równoważą, co należy uwzględnić przez przyjęcie

$$(5.14) \quad p_{iz} = 0 \quad \text{dla} \quad v_{iz} = \frac{1}{2}(1-d)$$

i wpisanie tych wartości we wszystkich punktach l_z , w których $v_{m+1, iz} \geq (1-d)/2$.

Na koniec opiszemy jeszcze jedną poprawkę, która w istotny sposób polepszyła zbieżność i stabilność algorytmu. Podczas obliczeń sprawdza się czy obliczoną wzorem (4.12) wartość $n_{m+1} = n_{m+1}^{\dagger}$ spełnia nierówność

$$(5.15) \quad n_{m+1}^{\dagger} - n_m < 0.$$

Jeśli nierówność nie jest spełniona, to oblicza się nową wartość α_m przyjmując w (5.1)₂ odpowiednio $n_m = n_{m+1}^{\dagger}$ i powtarza się obliczenie $\{v\}_{m+1}$ przy niezmiennych wartościach $\{v\}_m$, $\{x\}_m$, $\{p\}_m$.

Takie postępowanie jest równoznaczne ze skracaniem długości kroku czasowego $\Delta \tau_m$, tak aby nie wyjść z obszaru istnienia rozwiązania.

6. Przykłady liczbowe

Algorytm zaproponowany w rozdziale zaprogramowano w języku ALGOL-1204. Wykonano dwa przykłady obliczeniowe, które pozwoliły nie tylko sprawdzić i ulepszyć algorytm, ale też wyciągnąć pewne wnioski co do dalszej przydatności proponowanej metody.

W obydwu przykładach przyjęto dane odpowiadające wartościom występującym w realnych konstrukcjach wsporczych. Dla prądu zwarcia przyjęto

$$I = 44 \text{ kA}, \quad T_a = 0,03 \text{ s}, \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

Liny scharakteryzowano następującymi parametrami:

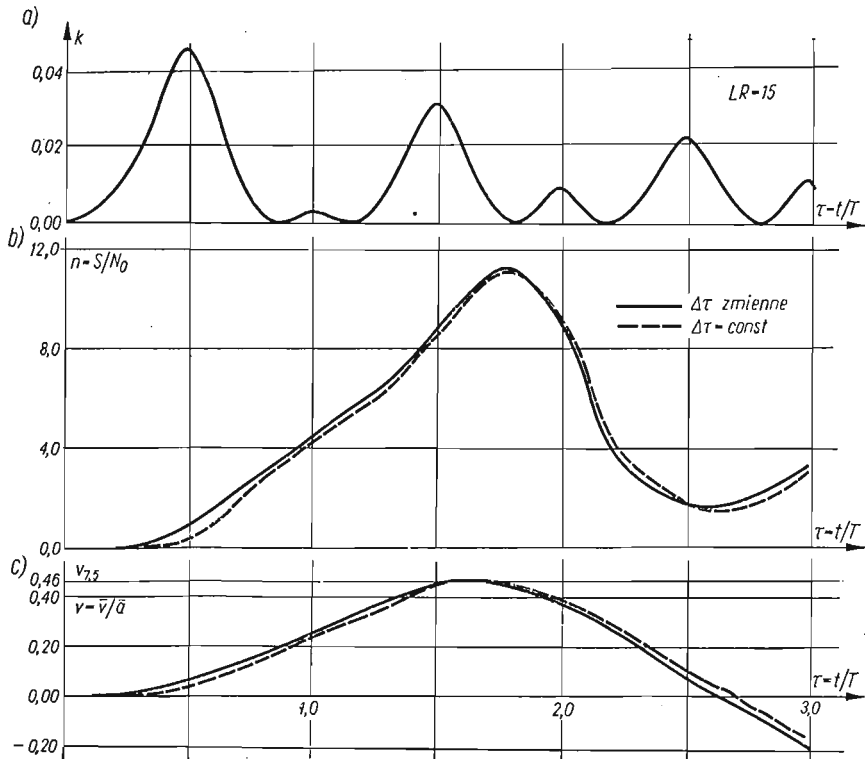
$$\bar{d} = 31,5 \text{ mm}, \quad F = 587 \text{ mm}^2, \quad \rho_0 = 1,97 \text{ kG/m}, \quad E = 7750 \text{ kG/mm}^2.$$

Przyjęto też jednakowy wstępny naciąg i rozstaw odstępników

$$N_0 = 1000 \text{ kG}, \quad \bar{a} = 40 \text{ cm}.$$

Jako pierwszy przykład obliczono jednoprzęsłową wiązkę o stosunku długości lin do długości odstępника jak 15:1, a więc $L_R = L_1 = 15$.

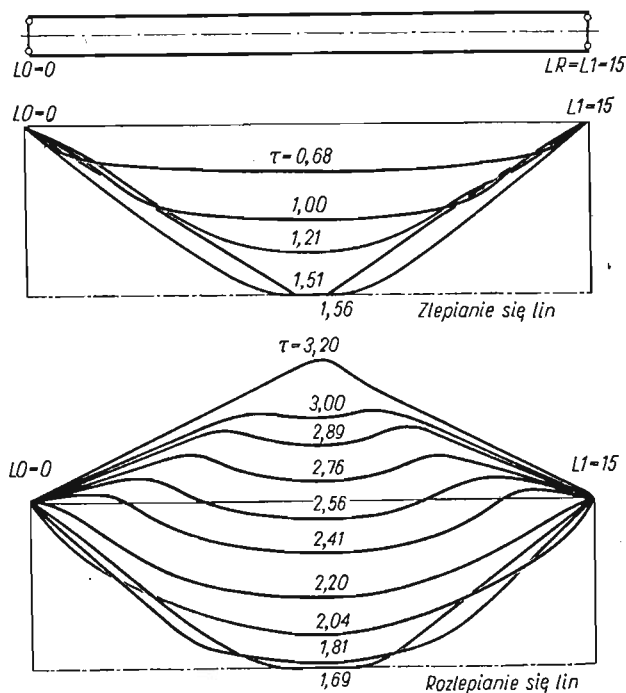
Do obliczeń przyjęto $\Delta\xi = 0,25$ i $\tau_0 = 0,05$. Najpierw wykonano obliczenia przy stałym kroku czasowym $\Delta\tau = 0,02$ i po 160 krokach osiągnięto czas $\tau_M = 3,25$. Obliczenia



Rys. 7

powtórzono według ulepszanego algorytmu, który uwzględniał zmienny krok czasowy $\Delta\tau_m = \alpha_m \cdot \Delta\tau_{m-1}$ i jego poprawianie w zależności od spełniania nierówności (5.15). Obliczenia uległy przyspieszeniu, gdyż po 100 krokach osiągnięto czas $\tau_M = 3,28$. Czas obliczeń w obydwu przypadkach był prawie jednakowy i wynosił około 71 s.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 7. Na kolejnych wykresach pokazano przebieg współczynnika prądu $k(\tau)$, przewyższenie wstępnego naciągu $n(\tau)$ i przemieszczenie w środku rozpiętości $v_{7,5}(\tau)$. Wyniki uzyskane przy zmiennym kroku praktycznie nie różnią się od wyników dla stałego $\Delta\tau$. Dla czasu $\tau = 1,56$ następuje zetknięcie się lin, a z niewielkim przesunięciem (dla $\tau = 1,81$) występuje ekstremum siły w linii $n = S/N_0 \approx 11$. Dla czasu $\tau \approx 2,7$ występuje lokalne minimum $n = 1,4$, odpowiadające przechodzeniu środka przez położenie wyjściowe $v_{7,6} = 0$.



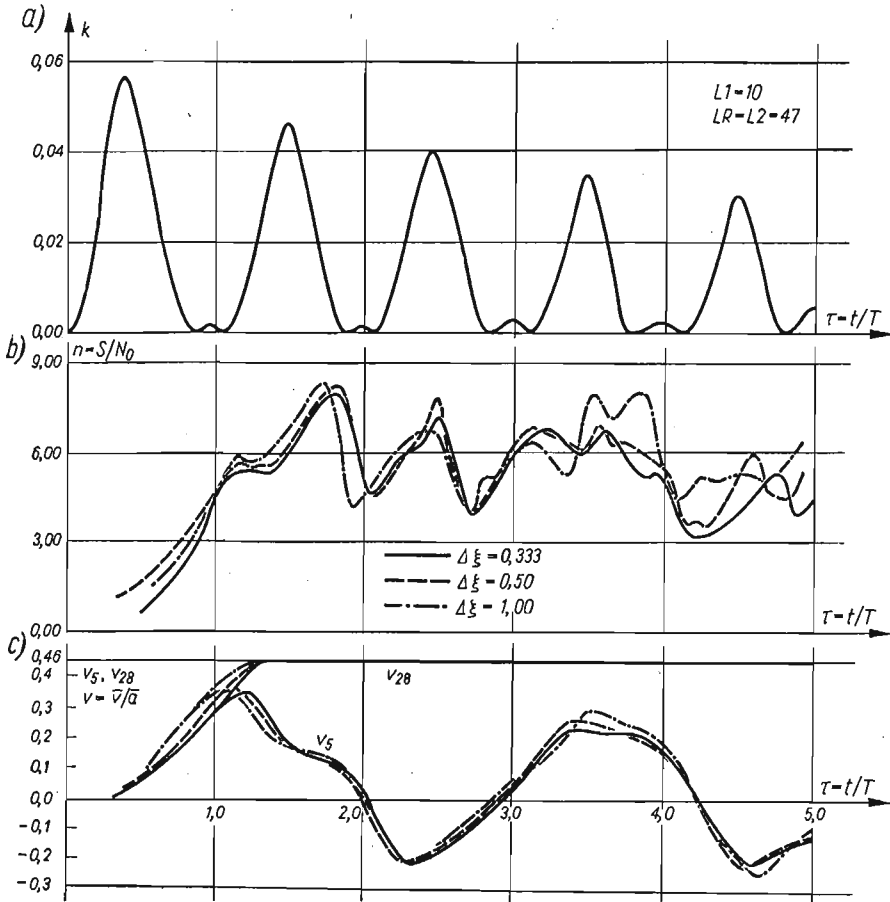
Rys. 8

Na kolejnych wykresach na rys. 8 pokazano konfigurację lin dla rosnącego czasu τ . Po zbliżeniu i «zlepianiu» się lin następuje ich oddalanie się, przy czym pojawiają się formy z większą liczbą przegięć.

Jako drugi przykład obliczono wiązkę o dwóch, znacznie różniących się długościach przęseł. Stosunek długości pierwszego do drugiego przęśla wynosi jak 10:37, tzn. $L_1 = 10$, $L_R = L_2 = 47$. Pozostałe dane przyjęto jak w przykładzie pierwszym za wyjątkiem $T_a = 0,1$ s.

W tym zadaniu skorzystano wyłącznie z programu automatycznie korygującego krok czasowy $\Delta\tau$. Obliczenia wykonano dla różnych kroków przestrzennych $\Delta\xi = 1,0; 0,5; 0,333$, aby zbadać zbieżność metody.

Na rys. 9 naniesiono najbardziej charakterystyczne wykresy. Widać, że wyniki otrzymane dla kroków całkowania $\Delta\xi = 0,5$ i $0,333$ niewiele się różnią. Widać ponadto, że zlepianiu ulegają tylko liny dłuższego przęśla, po czym siła przewyższenia wstępnego naciągu osiąga ekstremalną wartość około $8 N_0$.



Rys. 9

Praktycznym spostrzeżeniem jest dobra zgodność wyników dla niższych τ , przy porównaniu z obliczeniami dla $\Delta \xi = 1,0$; przy większych wartościach τ dłuższy krok $\Delta \xi$ daje raczej wyższe wartości n .

Przemieszczenia punktów leżących w połowie długości obydwu pręseł pokazano na rys. 9c. W szczególności występuje ruch lin krótszego pręśla wokół pierwotnego położenia równowagi. Część środkowa dłuższego pręśla pozostaje stale zlepiona. Efekty te jakościowo zgadzają się ze zjawiskami obserwowanymi podczas próbnych zwarc [3].

7. Uwagi końcowe

Otrzymane wyniki obliczeń świadczą na korzyść proponowanej metody i algorytmu. Jeśli wyniki jakościowo zgadzają się z niektórymi zjawiskami obserwowanymi w rzeczywistych stacjach rozdzielczych, to pod względem ilościowym są one niezadowolające. Na przykład przewyższenia wstępnego naciągu są około 1—1,5-krotnie za wysokie w porównaniu ze średnimi wartościami rejestrowanymi podczas próbnych zwarc [3].

Na wynikach mogła przede wszystkim zaważyć idealizacja badanego modelu. Zarówno wstępny zwis i przestrzenny ruch lin, jak też przede wszystkim podatność podpór [12] mogą mieć istotny wpływ na wyniki.

W tym kierunku, a więc w kierunku osłabienia założeń i wzbogacenia analizowanego modelu, idą dalsze prace.

Podziękowanie

Praca stanowi część opracowania wykonanego w Instytucie Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej pod kierunkiem prof. R. CIESIELSKIEGO na zlecenie Oddziału Krakowskiego «Energoprojektu». Praca była również częściowo subsydiowana przez Oddział Krakowski PAN.

Autorzy pragną podziękować Panu prof. ROMANOWI CIESIELSKIEMU za cenne uwagi i sugestie przy rozwiązywaniu problemu.

Pragniemy również podziękować Panu doc. JANUSZOWI ORKISZOWI za pomoc przy doborze metody rozwiązywania, a mgr inż. S. ŚWIERCZEWSKIEMU z Instytutu Gazownictwa w Krakowie za wykonanie programu w języku ALGOL-1204 i obliczeń testujących.

Literatura cytowana w tekście

1. A. T. ATWOOD, M. H. MILLS, D. J. DOWNS, H. M. STONE, *Dynamic Behavior of a 220 kV Dead-End Bus during Short Circuit*, Trans. AJEE (1962), 153.
2. R. CIESIELSKI, J. KAWECKI, D. MISCHKE, *Przybliżony sposób obliczania dynamicznego konstrukcji wsporczych na impulsowe działanie prądów zwarciovych*, Materiały XX Jubileuszowej Konferencji Naukowej Komisji Inżynierii PAN i Komitetu Nauki PZITB. Referaty T. III — *Konstrukcje stalowe*, Kraków 1974 — Krynica, 63-76.
3. R. CIESIELSKI, M. PIERONEK, J. BOGUSZ, *Badanie wpływów prądów zwarciovych na konstrukcje wsporcze rozdzielni wysokich napięć*. Materiały XX Jubileuszowej Konferencji Naukowej Komisji Inżynierii PAN i Komitetu Nauki PZITB. Referaty T. III — *Konstrukcje stalowe*, Kraków 1974 — Krynica, 77 - 90.
4. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer-Verlag 1955 (tłum. polskie, PWN, 1960).
5. J. HAJDUK, J. OSIECKI, *Ustroje ciągnowe: teoria i obliczanie*, WNT, Warszawa 1970.
6. R. KURDZIEL, *Działania cieplne i dynamiczne prądów zwarciovych*, PWN, Warszawa 1957.
7. R. V. MISES, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Academic Press-Publishers, New York 1958.
8. B. OLSZOWSKI, J. ORKISZ, *Dyskretny model dynamiczny przestrzennego układu przewodów wysokiego napięcia przy obciążeniach zwarciovych*, Materiały II Sympozjum Dynamiki i Stateczności, Łańcut 1972, 88-100.
9. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYŻYN, *Dynamika przewodów wysokiego napięcia przy prądach zwarciovych w świetle teorii dużych ugięć ciągną*, Materiały II Sympozjum Dynamiki i Stateczności, Łańcut, 1972 44 - 55.
10. J. REIMER, *Vypočet dynamických sil vznikajících pro skrate vo zvažkovykh vodičech*, Vedečko-techn. Informácie «Energovid», Praha 1970.
11. P. REINHARDT, *Discussionsbeitrag zur Berechnung der Kurzschlusskräfte von Zweirbündelleitern in Schaltanlagen*, Elektrik, 1971.
12. W. LINKE, *Modellerung des Schwingverhaltens von Kabelkranen unter Berücksichtigung von Steifigkeit und Masse der Stützen*, Hebezeuge und Fördermittel, 14, 6 (1974), 163 - 165.

Р е з ю м е

ДИНАМИКА ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОПРОВОДОВ ПРИ ТОКАХ
КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

Выведена основная система дифференциальных уравнений (3.9) для плоской системы двух тросов. Движение тросов происходит под влиянием электромагнитных воздействий, интенсивность которых зависит от актуальной конфигурации тросов. Систему можно свести к двум нелинейным уравнениям (3.11) гиперболического типа. Ввиду значительных сложностей интегрирования исходной системы рассматривалась приближенная задача при которой распределение усилий в тросе предполагалось в виде: $n(\xi, \tau) \equiv c(\tau)$.

Приближенная система уравнений (4.9) была решена с помощью метода конечных разностей с применением соответствующей положением характеристик сетки. Приводится алгоритм решения соответствующий расчетным возможностям ЭЦВМ Одра-1204.

Рассчитаны примеры для однопролетной и двухпролетной системы тросов, приводятся функции изменения во времени усилий в тросах $n(\tau)$ и конфигурации тросов $v(\tau)$.

S u m m a r y

DYNAMICS OF A PLANE GROUP OF CONDUCTORS UNDER SHORT-CIRCUIT
CURRENT

The fundamental system of differential equations (3.9) of a plane pair of linear conductors (cables) is derived. The cables move due to electrodynamical actions, the intensity of which depends on the actual configuration of the cables. The system can be reduced to two non-linear equations (3.11) of hyperbolic type. Since the explicit integration of the system is difficult, an approximate problem is analysed in the paper under the assumption that the distribution of axial force in each rope is equal to $n(\tau) = c(\tau)$.

The approximate set of equations system is solved by means of finite differences by applying a net adapted to the characteristics. An algorithm appropriate for the digital computer ODRA-1204 is presented.

Two numerical examples concern the one-span and two-span cable systems. The results present the distribution of axial forces in the ropes and of their configurations in time.

INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI, OŚRODEK ETO
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1975 r.