

METODY BADAŃ POZNAWCZYCH I TECHNICZNE PROBLEMY ELEKTROMECHANIKI

WŁADYSŁAW KOLEK (KRAKÓW)

Elektromechanika — w fazie powstawania, dotychczasowej rozbudowy jak też w perspektywie przyszłego jej rozwoju — wykazuje szczególnie znamienne powiązania z Mechaniką. Cała metodyka tej dyscypliny opiera się zasadniczo na zdobyczach Mechaniki Teoretycznej, będącej zresztą podstawą dla wszelkich nauk stosowanych jako podstawowych dyscyplin techniki. Niniejszy artykuł ilustruje powyższą tezę i formułuje pewne jej implikacje.

1. Wstęp

Pozycja Elektromechaniki na tle metod Mechaniki Teoretycznej. Zbiór teorii matematycznych interpretowanych jako sformułowania praw fizyki, jej podstawowych zasad zachowania, stanowiących treściowe aksjomaty tych interpretacji w zastosowaniu do opisu ruchu materii, wchodzi w zakres dyscypliny naukowej: mechaniki teoretycznej. W tej dyscyplinie mają swoje wspólne źródło wszelkie nauki stosowane jak mechanika, elektrotechnika, chemia, ciepłotechnika i ich podstawowe dyscypliny teoretyczne.

Elektromechanikę określamy jako dyscyplinę formułującą modele matematyczne makroskopowego ruchu ładunku elektrycznego związanego z ośrodkiem materialnym, którego makroskopowe fragmenty pozostają względem siebie w ruchu z małymi, w stosunku do prędkości światła prędkościami. Aby określić pozycję tej dyscypliny w tabeli zawierającej klasyfikację metod mechaniki teoretycznej, warto z fizyki przypomnieć dwie obserwacje dotyczące oddziaływań pomiędzy cząsteczkami zawierającymi masę i ładunek elektryczny.

Podstawę dla ilościowego opisu obserwacji tych oddziaływań stanowi zasada zachowania ładunku oraz szczególna zasada względności Einsteina będące konsekwencją Zasady Niezmienniczości Galileusza. W obydwu rodzajach oddziaływania (grawitacyjnych i elektromagnetycznych) zależność sił od odległości jest taka sama. Stosunek tych sił jest zależny od stosunku iloczynów ładunków do iloczynów mas oddziaływujących na siebie cząstek. Rys. 1 ilustruje proporcje sił oddziaływania grawitacyjnego i elektromagnetycznego w przy-

$$F_e = k_e \cdot \frac{Q_e^2}{r^2}$$

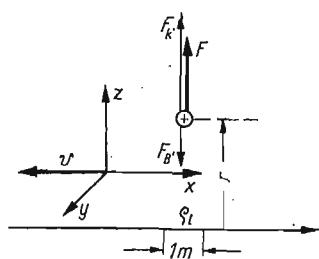
$$F_g = k_g \cdot \frac{m_e^2}{r^2}$$

$$F_e : F_g = \frac{k_e}{k_g} \left(\frac{Q_e}{m_e} \right)^2 = 4.17 \cdot 10^{42}$$

Rys. 1.

padku dwóch elementarnych cząsteczek: elektronów. W przypadku protonów stosunek ten zmniejszy się ok. $4 \cdot 10^6$ krotnie. Wynika stąd poglądowy wniosek, że nawet nieznaczne naruszenie równowagi ładunków związanych z materią wywołuje obserwowalne efekty w postaci sił oddziaływania elektromagnetycznego. To naruszenie równowagi może mieć charakter globalny — jako jego skutki obserwujemy wówczas makroskopowe siły oddziaływania elektromagnetycznego pomiędzy makroskopowymi ciałami naładowanymi — lub też może mieć charakter lokalny — obserwujemy wówczas wewnętrzne, strukturalne własności mechaniczne ośrodka materialnego w wyniku sił oddziaływania elektromagnetycznego pomiędzy bliskimi sobie cząsteczkami materii.

Rys. 2. ilustruje efekt ujawnienia się relatywistycznego skutku zmiany układu współrzędnych obserwatora mierzącego siłę oddziaływania pomiędzy ładunkami elektrycznymi



$$F = Q[K + v \times B]$$

$$v=0 \quad K = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_l}{r} \quad B=0$$

$$F_k = QK \quad F_b = 0 \quad F = F_k$$

$$v \neq 0 \quad K' = K \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad F_k' = F_k \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad F' = F \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$F_b' = F' - F_k' = -F_k' \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Rys. 2.

pozostającymi względem siebie w spoczynku. Skrócenie relatywistyczne naładowanego przewodnika prowadzi do zwiększenia gęstości liniowej ładunku. Obserwacja siły oddziaływania w ruchomym układzie współrzędnych wymaga opisu uwzględniającego relatywistyczny efekt Zasady Zachowania Ładunku. W warunkach bardzo silnych oddziaływań elektromagnetycznych ten relatywistyczny efekt ujawnia się już przy prędkościach 1 mm/s (rzędu prędkości średniej ruchu swobodnych elektronów przy przepływie prądu przez przewodnik). Wprowadzenie pojęcia pola magnetycznego jako dodatkowego fenomenu towarzyszącego przepływowi prądu elektrycznego pozwoliło zastąpić w ten sposób relatywistyczny opis zjawiska i zapisać wzór na siły oddziaływania elektromagnetycznego na ładunek w postaci Lorentza $\vec{F} = Q[\vec{K} + \vec{v} \times \vec{B}]$. Równania Maxwella rozróżniające i wiążące pomiędzy sobą dwa aspekty pola elektromagnetycznego: pole elektryczne (K) oraz magnetyczne (B) można uważać za model kryjący w sobie relatywistyczny aspekt elektromagnetyzmu (to, jakie przyjąć wartości składowych K oraz B tego pola, zależy wyłącznie od pozycji obserwatora, od jego prędkości względem układu współrzędnych). Tak więc u podstaw modelu matematycznego Elektromechaniki tkwią postulaty klasycznej

(niekwantowej) mechaniki relatywistycznej, jednak wprowadzenie do postulatów niezależnych definicji pola elektrycznego i magnetycznego oraz ładunku Q i prądu $i = \frac{dQ}{dt}$ pozwala w opisie makroskopowym ruchu materialnych obiektów (z dostatecznie małymi prędkościami) posługiwać się klasyczną mechaniką newtonowską.

Taka sytuacja określa związki pomiędzy postawą metodyczną Elektromechaniki oraz Mechaniki Teoretycznej i innych pokrewnych jej dyscyplin.

2. Równania Maxwella a podstawowy model Mechaniki Analitycznej

Przed około 110 laty Maxwell zbudował syntezę elektrodynamiki jako nauki doświadczalnej, ale wkrótce potem (w ciągu kilku dziesiątków lat) okazało się, że jest ona wyprowadzalna z wcześniejszych (o kilkadziesiąt lat przed sformułowaniem Maxwella) sformułowań Mechaniki Analitycznej opisującej oddziaływania pomiędzy cząstkami (punktami) materialnymi w próżni. Potrzebne tu były tylko: pojęcie ładunku elektrycznego, oddziaływania między ładunkami w próżni odwrotnie proporcjonalnego do kwadratu odległości, Zasada Zachowania Ładunku, Zasada Zachowania Energii oraz model mechaniki relatywistycznej. Najbardziej zwięzłą i przejrzystą postać uzyskuje model matematyczny zapisany w notacji wektorowej w postaci różniczkowej wzgl. całkowej

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \operatorname{div} K = \frac{1}{\epsilon_0} \varrho & \oint_{\Sigma} K d\sigma &= \frac{1}{\epsilon_0} Q \\
 & \operatorname{div} B = 0 & \oint_{\Sigma} B d\sigma &= 0 \\
 & \operatorname{rot} K = -\frac{\partial B}{\partial t} & \oint_{\Gamma} K ds &= -\frac{\partial \psi_B}{\partial t} \\
 & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} B = j + \epsilon_0 \frac{\partial K}{\partial t} & \frac{1}{\mu_0} \oint_{\Gamma} B ds &= i + \epsilon_0 \frac{\partial \psi_K}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Model ten, uzupełniony wzorem Lorentza na siłę oddziaływania pola na ładunek

$$(2) \quad F = Q[K + v \times B]$$

oraz równaniem ruchu punktu materialnego o masie m związanej z ładunkiem Q

$$(3) \quad F = m \frac{dv}{dt}$$

pozwała rozwiązać każdy problem (w skali makroskopowej) mechaniki analitycznej oddziaływania ładunku związanego z cząstką materialną w przestrzeni pustej. Ziarnista struktura materii i to zarówno masy jak i ładunku czyni model wyrażony równaniami (1, 2, 3) bezużytecznym dla opisu oddziaływań w ośrodku materialnym. Koniecznym jest uzupełnienie tego modelu opisem własności materii oddziaływującej z polem tj. jej polaryzowalności pod wpływem pola K , magnesowalności pod wpływem pola B oraz zdolności przewodzenia prądu elektrycznego. Jedynie przypisanie materii cech ciągłości, jednorodności

i izotropowości pozwoliło Maxwellowi własności polaryzowalności i magnesowalności materii opisać przy pomocy współczynników liczbowych ε , μ oraz przy wprowadzeniu nowych wektorów $D = \varepsilon\varepsilon_0 K$ oraz $H = \frac{1}{\mu\mu_0} B$ zapisać pole w tak wyidealizowanej materii w postaci symetrycznych wzorów o analogicznej postaci jak (1):

$$(4) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} D &= \varrho & \oint_{\Sigma} D d\sigma &= Q \\ \operatorname{div} B &= 0 & \oint_{\Sigma} B d\sigma &= 0 \\ \operatorname{rot} K &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \oint_{\Gamma} K ds &= -\frac{\partial \psi_B}{\partial t} \\ \operatorname{rot} H &= j + \frac{\partial D}{\partial t} & \oint_{\Gamma} H ds &= i + \frac{\partial \psi_D}{\partial t}. \end{aligned}$$

Podstawowym modelem dla opisu zjawisk elektromagnetycznych jest model polowy Maxwella, ale technika mając do dyspozycji metody Mechaniki Analitycznej szybko doprowadziła do dyskretyzacji równań Maxwella i zastąpienia modelu polowego modelem obwodowym obowiązującym w Mechanice Analitycznej.

Całkowa postać równań Maxwella wskazuje drogę do dyskretyzacji opisu pola elektromagnetycznego w obiektach materialnych. Wyodrębniając w obiekcie przewodniki tj. te części obiektu w obrębie (wewnątrz) których może następować przepływ swobodnego ładunku, lub na których powierzchni może się swobodny ładunek gromadzić, określamy odpowiednio całki skalaru gęstości ϱ :

$$\text{ładunki} \quad \int \varrho dV = Q,$$

$$\text{prądy} \quad \int \varrho \vec{v} d\sigma = \int \vec{j} d\sigma = i = \frac{dQ}{dt}.$$

Przechodząc od wektorów K , B określających lokalnie pole w punktach przestrzeni do ich skalarnych całek wzdłuż wyróżnionych przez przewodniki torów lub powierzchni określamy odpowiednio elektryczne napięcie

$$u_{ab} = \int_a^b \vec{K} d\vec{s}$$

$$\text{magnetyczne strumienie sprzężone } \psi_B = \int \vec{B} d\vec{\sigma}$$

otrzymujemy zapis związków pomiędzy tymi całkami w postaci liniowej

$$Q = Cu$$

$$\psi = Li$$

stanowiący równocześnie podstawę dla definicji pojemności C oraz indukcyjności L jako globalnych atrybutów obiektu. Wartości liczbowe tych atrybutów wynikają z geometrii obiektu oraz własności materiałowych (polaryzowalności i magnesowalności). Uwzględ-

niając, że przepływ prądu przez przewodnik jest uwarunkowany istnieniem pola elektrycznego $j = \gamma K$ (prawo Ohma), zapiszemy tę zależność w postaci całkowej

$$u = Ri \quad (\text{prawo Ohma}).$$

Rezultatem tak przeprowadzonej operacji dyskretyzacji jest równanie różniczkowe zwyczajne stanowiące globalny opis obiektu o wyróżnionej zamkniętej strudze prądu „i” przy pomocy jego globalnych parametrów R , L , C , obiektu zwanego prostym (pojedynczym) obwodem elektrycznym:

$$(5) \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = u$$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} (Q - Q_0) = u.$$

Powyższe równanie różniczkowe zwyczajne liniowe o stałych współczynnikach jest klasycznym równaniem w Mechanice Analitycznej opisującym ruch punktu materialnego

Bardzo wiele technicznych zagadnień elektrodynamiki znajdowało swoje rozwiązania w oparciu o obwodowe równania postaci (5) tj. w oparciu o podstawowy model Mechaniki Analitycznej ruchu punktu wzgl. układu punktów materialnych. Przechodzenie do modelu ruchu układu punktów materialnych było konsekwencją opisu złożonych obwodów elektrycznych, gdy mianowicie w rozpatrywanym obiekcie zostają wyróżnione odrębne lub ze sobą sprzężone zamknięte strugi prądowe w liczbie $n > 1$. Sprzężenie ze sobą poszczególnych strug prądowych następuje przez pole elektryczne lub magnetyczne, czemu odpowiadają pojęcia wzajemnych indukcyjności L_{jk} wzgl. pojemności C_{jk}

$$\psi_k = \sum_{j=1}^n L_{jk} i_j$$

$$Q_k = \sum_{j=1}^n C_{jk} u_j.$$

Innym rodzajem sprzężenia jest galwaniczne połączenie ze sobą częściowych odcinków strug prądowych wspólnymi przewodnikami, w których płyną wówczas odpowiednio sumy lub różnice prądów sprzęgających się strug prądowych.

Interpretacja teorii równań różniczkowych liniowych ze stałymi współczynnikami w elektrotechnice nazywana teorią obwodów liniowych została bardzo starannie i doszczętnie wyeksploatowana i zużytkowana dla rozwiązywania wielu technicznych problemów elektrotechniki stosowanej. Szczegółowe metody obliczeniowe opracowane w ramach tej teorii mogą być lub są z dużym pożytkiem stosowane nie tylko w problemach mechaniki analitycznej i elektrotechniki ale również w bardzo wielu innych więcej lub mniej pokrewnych dziedzinach: sieciach wodnych, gazowych, transporcie, układach sterowania i regulacji itp. Również w elektromechanice posługiwanie się takim modelem na długo okazywało się wystarczającym w bardzo wielu technicznych problemach. Ta utrzymująca się dominacja metod opartych o liniowy model zdyskretyzowanego pola elektromagnetycznego przyniosła też ujemne skutki: daleko posunięta rutyna technika w analizowaniu zjawisk oparta o liniowy model obwodowy osłabiała jego krytycyzm w ocenie granic technicznej użyteczności modelu.

3. Pojęcia energii — Analogie elektromechaniczne

Dalsza energiczna eksploatacja przez elektryków metod mechaniki analitycznej następowała w oparciu o wprowadzone w mechanice teoretycznej pojęcia energii postaci mechanicznej tj. związanej z ruchem materii. Sprzyjała temu okoliczność, że w mechanice analitycznej rozróżnia się dwa rodzaje energii: energię kinetyczną E_k związaną z pędem i prędkością

$$E_k = \int v dp$$

oraz energię potencjalną związaną z siłą i położeniem

$$E_p = \int F dx.$$

Przy nieliniowych funkcjach pędu $p(v)$ oraz siły $F(x)$ wprowadzenie pojęcia koenergii

$$E'_k = \int p dv = pv - \int v dp$$

$$E'_p = \int x dF = Fx - \int F dx$$

pozwała używać tych wielkości zamiennie rozpatrując stan energetyczny określony jednoznacznie przez współrzędne (zmiennie) stanu p , F , $\dot{x}$, x oraz ilość zmagazynowanej energii.

W elektrotechnice rozróżnia się również dwa rodzaje energii: energię pola magnetycznego związaną ze strumieniem i prądem

$$E_m = \int i d\psi$$

oraz energię pola elektrycznego E_e związaną z potencjałem i ładunkiem

$$E_e = \int u dQ.$$

Przy nieliniowych funkcjach strumienia $\psi(i)$ lub potencjału $u(Q)$ również i w elektrotechnice może się okazać użytecznym posługiwanie się odpowiednio pojęciem koenergii.

Paralelizm pojęć energii w mechanice i elektromagnetyźmie narzuca koncepcję analogii elektromechanicznych tj. przyjęcia odpowiedniości pomiędzy współrzędnymi oraz zmiennymi stanu w opisie ruchu punktów materialnych oraz pola elektromagnetycznego.

Wybór jednej z dwu możliwości ustalenia odpowiedniości jest tutaj jednakowo uprawniony. Tradycje elektromechaniki z techniczną realizacją układów głównie wykorzystujących magazynowanie energii w polu magnetycznym skłaniają do przyjęcia analogii:

Mechanika	— Elektryka	Symbol wspólny Elektromechaniki
energia potencjalna (położenia) — en.	pola elektrycznego	E_{pot}
energia kinetyczna (ruchu) — en.	pola magnetycznego	E_{kin}
położenie, kąt x, φ	ładunek Q	q
prędkości $\dot{x}, \dot{\varphi}$	natężenie prądu $\dot{Q} = i$	$\dot{q}$
siły, momenty $F, \mathfrak{M}$	napięcie u	F
pęd, kręt p, Θ	strumień skojarzony ψ	p

W ten sposób tworzy się wspólny język symboli a nawet nazw i wyrażeń mechaniki i elektryki mający swoje oparcie i uzasadnienie we wspólnym modelu mechaniki teoretycznej, czemu daje wyraz ostatnia kolumna powyższej tabeli. Model ten to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Jako równanie zwyczajne ma swoją interpretację w mechanice w opisie ruchu układu punktów materialnych lub układu ciał sztywnych, w elektryce natomiast w obwodach o elementach R , L , C lub w sieciach elektrycznych złożonych z przewodników prądu, kondensatorów i cewek jako magazynów energii pola elektrycznego i magnetycznego. W świetle tak przyjętych analogii jako słownika symboli, nazw i wyrażeń mechaniki i elektryki widoczne są duże korzyści dla rozwiązywania technicznych problemów zarówno mechaniki jak i elektryki. Duża praktyczna przydatność mierniczej techniki elektrycznej — pomiarów i rejestracji napięcia — łatwość produkowania elementów R , L , C oraz ich zestawienia w układy sieciowe jak również osiągnięcia techniki w zakresie produkowania stabilnych wzmacniaczy o dużym wzmocnieniu — pozwalają szeroko i wydajnie wykorzystywać analogie elektromechaniczne dla rozwiązywania bardzo wielu i różnorodnych problemów technicznych z rozmaitych dziedzin techniki mających swój model matematyczny w postaci równań różniczkowych zwyczajnych a nawet równań różniczkowych cząstkowych (technika obliczeniowa z zastosowaniem maszyn analogowych).

Również elektromechanika korzysta z analogii elektromechanicznych w oparciu o podstawowy model mechaniki analitycznej. Należy tu jednak równocześnie podkreślić, że równanie (5) nie przedstawia modelu układu elektromechanicznego. Równanie (5) można tylko alternatywnie odczytywać już to w języku elektryki, już też w języku mechaniki, elektromechanika natomiast zaczyna się dopiero wówczas gdy w układzie pojawia się co najmniej jeden magazyn, którego poziom energetyczny zależy zarówno od współrzędnej mechanicznej jak i elektrycznej. W przyjętej poprzednio konwencji analogii elektromechanicznych typowy układ elektromechaniczny — „maszyna elektryczna” — zawiera taki magazyn w postaci cewek elektrycznych magazynujących kinetyczną energię pola magnetycznego, której poziom jest zależny od „pędu” φ oraz współrzędnych położenia cewek lub innych ruchomych elementów obwodu magnetycznego:

$$p_k(\dot{q}_j, \dot{q}_k, q_l) = \psi_k(i_j, i_k, \varphi),$$

$$E_{kin} = \int \dot{q}_k dp_k = \int i_k d\varphi_k.$$

4. Model układu elektromechanicznego

Prawem fizyki stanowiącym postulat dla interpretacji teorii matematycznej w modelu układu elektromechanicznego jest — jak zwykle w technice — Zasada Zachowania Energii. Układ elektromechaniczny stanowi zespół magazynów energii mechanicznej (kinetycznej, potencjalnej) i energii pola (magnetycznego, elektrycznego) w liczbie co najmniej dwu a w tym jeden energii mechanicznej oraz jeden energii pola, przy czym w co najmniej jednym magazynie poziom energii zależy zarówno od współrzędnej mechanicznej jak i elektrycznej. Wyrażenie na energię spełniającego takie warunki układu elektromechanicznego zrealizowanego przy pomocy cewek magazynujących energię w polu magnetycznym ma zatem postać:

$$\mathcal{E}(\dot{q}_i, q_i) = \sum E_{kin}(\dot{q}_k, \dot{q}_j, q_i) + \sum E_{pot}(q_i).$$

Wzorem mechaniki analitycznej również w elektromechanice okazuje się pożytecznym posługiwanie się zamiennymi pojęciami: energii $\mathcal{E}(\dot{q}, q)$ jako funkcji położenia i prędkości, energii $\mathcal{H}(p, q)$ jako funkcji pędów i położenia (postać Hamiltona), potencjału kinetycznego $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ jako funkcji położenia i prędkości przy znanych relacjach

$$\mathcal{L} = E'_{kin} - E_{pot} = p\dot{q} - \mathcal{H}$$

$$\mathcal{E} = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} = \mathcal{H}$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}.$$

Model matematyczny odosobnionego układu elektromechanicznego stanowiący sformułowanie Zasady Zachowania Energii przyjmuje odpowiednio zamienne postaci:

$$(6a) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} \cdot \ddot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = 0,$$

$$(6b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0,$$

$$(6c) \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}.$$

Treścią procesu energetycznego przebiegającego w układzie elektromechanicznym jest możliwość przemiany energii z jednej postaci w drugą. Aby proces ten był stacjonarnym i mógł służyć potrzebom techniki układ jest połączony z otoczeniem, z którym dokonuje wymiany energii kanałami mocy mechanicznej (iloczyn siły i prędkości ruchu postępowego względnie iloczyn momentu i prędkości ruchu obrotowego) oraz elektrycznej (iloczyn napięcia i prądu), ogólnie kanałami mocy dopływającej do układu z zewnątrz wyrażonej jako iloczyn uogólnionej siły i uogólnionej prędkości

$$F_{zk} \dot{q}_k.$$

W przypadku gdy otoczenie stanowią jedynie źródła tj. siły będące jedynie funkcjami czasu $F_{zk}(t)$, mówimy o sztywnym zasilaniu, siły te pojawiają się wówczas po prawej stronie odpowiednich równań sił (6a), (6b) wzgl. (6c):

$$(6a)' \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = F_{zk},$$

$$(6b)' \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = F_{zk},$$

$$(6c)' \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} + F_{zk}.$$

W przypadku elastycznego zasilania, gdy w otoczeniu znajdują się również magazyny energetyczne zależne od współrzędnych układu, wyrażenia $\mathcal{E}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ zwiększają się odpowiednio o składniki określające poziomy energetyczne tych magazynów otoczenia.

Szczególnym rodzajem wymiany energii pomiędzy układem elektromechanicznym i otoczeniem jest dyssypacja energii tj. oddawanie energii do otoczenia w wyniku nieuporządkowanego mikroskopowego ruchu materii wewnątrz układu przy wzrastającym nieuporządkowaniu. W termodynamice uwzględnia się ten proces w modelu matematycznym przy pomocy pojęcia entropii wprowadzającej to pojęcie do wyrażenia Zasady Zachowania Energii w postaci I Zasady Termodynamiki oraz dołączenia sformułowania II Zasady Termodynamiki. W elektromechanice dyssypacja energii związana jest z mikroskopowym nieuporządkowanym ruchem cząstek materii towarzyszącym makroskopowemu (uporządkowanemu) ruchowi mechanicznemu (zjawisko tarcia) oraz makroskopowemu (uporządkowanemu) przepływowi prądu w przewodnikach (zjawisko Joule'a. Uwzględnienie dyssypacji w modelu elektromechaniki odbywa się tu przy pomocy pojęcia uogólnionej siły tłumienia F_D oraz odpływu do otoczenia mocy $F_{Dk}\dot{q}_k$ po kanale tej uogólnionej prędkości, z którą jest związana dyssypacja. Równania (6) modyfikują się zatem do postaci:

$$(6a)'' \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = -F_{Dk} + F_{zk}$$

$$(6b)'' \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -F_{Dk} + F_{zk}$$

$$(6c)'' \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} - F_{Dk} + F_{zk}.$$

Równania (6) a, b oraz c stanowią względem siebie równoważne i zamienne modele. Użycie tej lub innej postaci może być dyktowane względami na przyzwyczajenia, pogłębienie interpretacji lub wygodę rozwiązywania równań. Formuła b pozwala interpretować model z pozycji Hamiltona Zasady Najmniejszego Działania oraz użytkować pożyteczne czasem metody rachunku wariacyjnego (m.in. bezpośrednie metody poszukiwania ekstremum funkcjonu). Formuła c najchętniej używana w przypadku poszukiwania rozwiązań metodami obliczeń cyfrowych.

Postać równań (6) jako matematycznego modelu ruchu układu punktów materialnych w mechanice analitycznej jest warunkowana niezależnością współrzędnych układu. Przyjmując z mechaniki analitycznej metodykę konstruowania i użytkowania modelu dla celów technicznych elektromechanika musi oczywiście przejąć również cały bagaż problemów więzów oraz stopni swobody.

Jeśli chodzi o więzy po stronie współrzędnych mechanicznych, to jest to na ogół problem prosty, a w wielu przypadkach nawet wogóle nie istnieje, gdy mianowicie obiekt ma tylko jeden stopień swobody mechanicznej (np. silnik elektryczny wykonujący pracę mechaniczną za pośrednictwem sztywnego przeniesienia). Po stronie elektrycznej maszyny bezkomutatorowe w konwencjonalnym wykonaniu pracujące w układach bez sterowania dostarczają również prostych równań więzów holonomicznych. Są to łatwo całkowalne

równania węzłowe Kirchhoffa bilansujące prądy gałęzi w łączących je węzłach. W takich prostych układach elektromechanicznych na model matematyczny układu składa się odpowiednia liczba równań „elektrycznych” tj. równań (6) odpowiadających różniczkowaniu po współrzędnej elektrycznej (w liczbie równej liczbie niezależnych oczek obwodu elektrycznego) oraz równania „mechaniczne” odpowiadające różniczkowaniu po współrzędnej mechanicznej (w liczbie równej liczbie stopni swobody ruchu mechanicznego). Pewną komplikację stanowią więzy elektromechaniczne, jakich dostarcza ślizgający się po uzwojeniu względnie dokonujący przełączeń styk wędrujący po uzwojeniu w wyniku ruchu cewek względem zasilającej je z zewnątrz sieci elektrycznej. W pewnych warunkach symetrii zasilania oraz wewnętrznej symetrii ruchomych uzwojeń te nieholonomiczne więzy można sprowadzić do postaci prostych więzów holonomicznych zależnych jedynie od czasu.

Innego rodzaju trudność powstaje, gdy w wyniku włączania w szereg z poszczególnymi fragmentami uzwojenia czy nawet cewkami maszyny elektrycznej lub innego rodzaju przetwornika diod a zwłaszcza diod sterowanych więzy nabierają charakteru nierówności (słabych nierówności) jako więzy jednostronne.

5. Dwuliniowość i inne źródła nieliniowości modelu i ich konsekwencje

Z poprzednich rozważań wynika, że model układu elektromechanicznego nie jest prostym zesumowaniem modelu mechaniki i obwodu elektrycznego: nie jest to wynik nałożenia na obwód elektryczny o liczbie s_{el} stopni swobody układu mechanicznego o liczbie s_{mech} stopni swobody, lecz układ elektromechaniczny o liczbie $s = s_{el} + s_{mech}$ stopni swobody, którego modelem jest układ s równań różniczkowych o liczbie s niezależnych funkcji — zmiennych stanu. W równaniach elektrycznych występują również niewiadome zmienne mechaniczne i wzajemnie. Jest to wynikiem istnienia magazynów, których energia zależy zarówno od współrzędnych elektrycznych jak i mechanicznych.

Energia poszczególnych magazynów wyraża się formą kwadratową odpowiednich współrzędnych względnie zmiennych stanu. Stąd też uogólniona siła jako pochodna energii względem współrzędnej $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} \text{ wzgl. } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right)$ w przypadku liniowego magazynu o energii zależnej zarówno od współrzędnej elektrycznej jak i mechanicznej jest dwuliniową formą względem tych współrzędnych lub też dwuliniową formą jest odpowiedni składnik pochodnej odpowiedniego pędu względem czasu:

$$p_k = C(q_i) \dot{q}_k$$

$$\mathcal{H}_k = \frac{1}{2} p_k C^{-1}(q_i) p_j$$

$$(7a) \quad \dot{p}_k = C(q_i) \ddot{q}_k + \frac{\partial C(q_i)}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_i$$

$$(7b) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} p_k \frac{\partial C^{-1}(q_i)}{\partial q_i} p_j$$

W elektrycznym równaniu (równaniu napięciowym) pojawia się składnik typu (7a) jako napięcie rotacji (w przypadku maszyny wirującej):

$$\begin{aligned}\psi &= L(\varphi)i = L(\varphi)\dot{Q} \\ \dot{\psi} &= L(\varphi)\ddot{Q} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \dot{\varphi}\dot{Q} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} \dot{\varphi}\dot{Q} &\stackrel{\text{def}}{=} e_{rot}\end{aligned}$$

W mechanicznym równaniu (równaniu momentów) pojawia się składnik typu (7b) jako moment elektromechaniczny:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \sum_k \sum_j \frac{1}{2} \psi_k \frac{\partial L^{-1}(\varphi)}{\partial \varphi} \psi_j$$

Dwie wyżej opisane cechy są znamienne dla matematycznego modelu w elektromechanice: sprzężenie wzajemne pomiędzy równaniami „elektrycznymi” (napięcie) i „mechanicznymi” (momentów wzgl. sił) oraz występowanie — w przypadku liniowych magazynów — dwuliniowych form w tych równaniach (napięcie rotacji oraz momenty elektromechaniczne). Pierwsza z nich wskazuje, że w ogólnym przypadku nie jest możliwe rozbijanie układu na „część elektryczną” i „część mechaniczną” celem oddzielnego rozwiązywania równań i odrębnego wnioskowania o elektrycznych i mechanicznych własnościach układu. Druga cecha nakazuje się liczyć z tym, że model jest nieliniowym i w najlepszym przypadku sprowadza się do występowania dwuliniowych form w równaniach różniczkowych. Nawyki nabyte dzięki rutynie przy analizowaniu liniowych obwodów elektrycznych mogą się tu stać dla elektryka przeszkodą we właściwym spojrzeniu na problemy elektromechaniki.

Tak więc struktura modelu w elektromechanice prowadzi do nieliniowości równań. Innym źródłem nieliniowości modelu staje się uwzględnienie własności materii. Własności materii mogą wpłynąć na odstępstwa od liniowości takich charakterystyk, jak: zależność sił tłumienia od prędkości (uogólnionych), sił sprężystości od przesunięć (odkształceń), pędu od prędkości — praktycznie bierze się tu pod uwagę jedynie zależność $\psi(i)$.

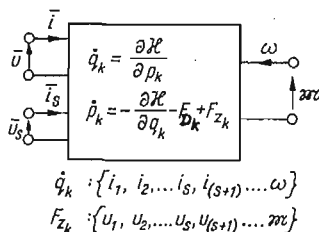
Jeżeli pierwsze spośród wymienionych źródeł nieliniowości (sprężystość, tłumienie elektryczne, tłumienie mechaniczne) w przypadku możliwości wyrażenia charakterystyk przez funkcje analityczne przynoszą jedynie mniej lub więcej znaczne utrudnienia w rozwiązywaniu równań, to nieliniowość magnetyczna przynosi o wiele większe trudności, a nawet jakościowo nowe problemy. Wynika to stąd, że pierwsze są funkcjami jednej zmiennej, podczas gdy strumienie ψ są funkcjami na ogół wielu zmiennych i odstępstwa od liniowości dotyczą nie poszczególnych zmiennych, lecz ich liniowych kombinacji. Superpozycja pól magnetycznych od poszczególnych cewek sprzężonych stanowiąca podstawę dla wyrażenia energii przez formę kwadratową upada a z nią upada możliwość określenia zmagazynowanej w polu magnetycznym energii za pomocą strumieni skojarzonych lub prądów poszczególnych cewek. Dla rozwiązywania technicznych problemów elektromechaniki rezygnuje się z uwzględniania nieliniowości obwodu magnetycznego, posługując się uśrednioną charakterystyką $\psi(i)$ zlinearyzowaną. Jeżeli odstępstwa od średniej są znaczne, można uśrednianie charakterystyk ograniczać do skończonych przedziałów

czasu tak, aby prowadziło to do ograniczania wahań funkcji $\psi(i)$ wokół prostej uśrednionej. Poszukiwanie skutecznych metod przybliżonych rozwiązywania równań elektromechaniki uwzględniających nieliniowość obwodu magnetycznego jest też przedmiotem prac badawczych w tym zakresie. Jest to poszukiwanie kompromisu pomiędzy skutecznością a kosztami obliczeń.

6. Współczesne problemy techniczne i ich implikacje w elektromechanice

O problemach technicznych elektromechaniki i jej współczesnym rozwoju decyduje rozwój potrzeb, jakim ona służy. Zapotrzebowanie pracy mechanicznej wzrasta wraz z rozwojem transportu (w najszerszym znaczeniu tego pojęcia), wraz z ilościowym i jakościowym wzrostem operacji towarzyszącym wciąż udoskonalanym oraz nowym procesom technologicznym w przemyśle, rzemiośle i domowej gospodarce. Wzrasta więc ciągle różnorodność i złożoność napędów elektrycznych tj. układów pozwalających energię elektryczną tak wygodną w przesyśle i rozdziale przetwarzać na pracę mechaniczną bezpośrednio w miejscu jej technologicznego spożycia. W nowoczesnym napędzie odbywa się ta dostawa energii bez potrzeby dalszego jej przekształcania lub co najwyżej przy zastosowaniu możliwie prostych i ekonomicznych urządzeń mechanicznego przekształcania celem dostosowania parametrów doprowadzanej mocy do potrzeb procesu technologicznego. Pierwotnie prosty pojedynczy napęd elektryczny rozwija się w system współpracujących ze sobą i wspólnie sterowanych przetworników elektromechanicznych. Złożoność procesu technologicznego pociąga za sobą złożoność systemu elektrycznego zasilania i sterowania.

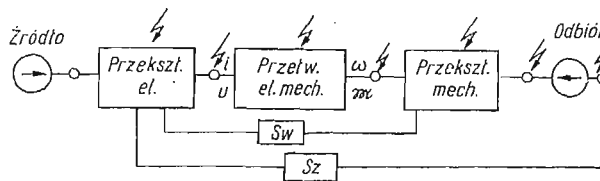
Rys. 3. przedstawia schematycznie (w postaci wielobiegunnika) model przetwornika elektromechanicznego z zapisem równań w postaci (6c). Pochodna $\dot{q}_k$ mierzalna na wejściu



Rys. 3.

mechanicznym (na sprzęgle) jest prędkością ω , uogólniona siła F_{zk} — momentem obrotowym $\mathcal{M}$. Odpowiednio na wejściu elektrycznym oznaczono część pochodnych $\dot{q}_k$ jako prądy wektora zasilania $\vec{i}$, część zaś jako prądy wektora sterowania $\vec{i}_s$ i analogicznie F_{zk} jako wektor napięcia zasilania energią $\vec{u}$ oraz napięcia sterowania $\vec{u}_s$. Przetwornik elektromechaniczny o tak przedstawionym modelu jest głównym elementem systemu elektromechanicznego (rys. 4), na którego całość składają się: źródło dostarczające energię do systemu za pośrednictwem urządzeń elektrycznych przesyłających, rozdzielających i przekształcających energię elektryczną, urządzenie mechaniczne przekształcające uzyskaną z przetwornika

energię mechaniczną i dostarczając bezpośrednio na miejsce procesu technologicznego pracę oraz układy sprzężeń zwrotnych wewnętrznych (S_w) pomiędzy zmiennymi stanu wewnątrz systemu jak również sprzężeń zewnętrznych (S_z) pomiędzy wskaźnikami oceny jakości produktu i parametrami sterowania. Model samego przetwornika znacznie się teraz wzbogaca i komplikuje nowymi równaniami więzów sterowania. Mogą to być więzy holonomiczne zmniejszające liczbę stopni swobody, jednak na ogół trzeba się liczyć, że sterowanie w układzie zamkniętym (od sprzężeń zwrotnych) wnosi do modelu dalsze równania różniczkowe i stawia jako podstawowy problem stabilności rozwiązań. Dla



Rys. 4.

praktycznych potrzeb techniki orzekanie tylko o istnieniu, jednoznaczności i stabilności rozwiązań nie jest na ogół wystarczającym. Rozważania w elektromechanice na temat kryteriów i metod „technicznej stabilności” wymagają powiązania z analizą warunków eksploatacji, sposobów zabezpieczenia oraz niezawodności pracy całego systemu oraz poszczególnych jego elementów.

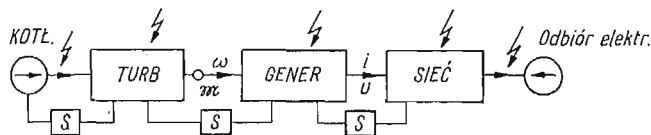
Sterowanie przy pomocy sprzężeń zwrotnych od wskaźników jakości produktu stwarza w elektromechanice szeroki problem optymalizacji układu napędowego jak również optymalizacji konstrukcji głównego jego składnika, przetwornika elektromechanicznego. Przy ciągle wzrastających żądaniach technicznych wzrostu wydajności procesów technologicznych w zagadnieniach optymalizacji wysuwa się na czoło dynamika procesu elektromechanicznego przetwarzania energii.

Już przy analizie modelu elementarnego przetwornika — równanie (6) — oczywistym stwierdzeniem była niemożliwość rozbicia modelu i rozwiązywania „równań elektrycznych” w wyodrębnieniu od „równania mechanicznego”. Tym bardziej obecnie przy dalszym powiązaniu pomiędzy zmiennymi i parametrami mechanicznymi i elektrycznymi przez sprzężenia zwrotne ewentualne próby rozcinania systemu na „część mechaniczną” i „elektryczną” byłyby oczywistym nieporozumieniem.

Na schemacie systemu (rys. 4) symbole zamieszczone nad węzłami oraz poszczególnymi elementami systemu przypominają, że funkcje zmiennych na wejściach jak również parametry systemu ulegają stochastycznym zakłóceniom. Uwzględnienie tej okoliczności nie zmienia deterministycznego charakteru modelu elektromechaniki, natomiast ma swoje implikacje we współczesnej technice pomiarów, w problemach identyfikacji elementów systemu elektromechanicznego, w metodyce oceny stabilności i niezawodności pracy systemu.

Nieustanny wzrost zapotrzebowania energii elektrycznej ma również swoje implikacje we współczesnej elektromechanice związanej z wytwarzaniem energii elektrycznej. Jak dotąd niemal wyłączną techniką jej wytwarzania jest przetwarzanie elektromechanicz-

ne w turbo i hydrogeneratorach. Dlatego też okresowi podwojenia zużycia energii elektrycznej towarzyszy też podobny okres podwojenia mocy jednostkowej turbogenerators. Projektowanie, produkcja i eksploatacja współczesnych turbogeneratorów największych mocy (w skali krajowej rzędu 500 MW, w skali światowej ponad 1000 MW) stawia współczesnej elektromechanice nowe problemy teoretyczne z zakresu konstrukcji przetworników oraz z zakresu eksploatacji systemów wielkich mocy. Konstruowanie przetwornika energii o tak dużej mocy jednostkowej jest związane z koniecznością doprowadzenia do uzwojenia bardzo dużego prądu (rzędu kilkunastu kA), przenoszenia przez wał bardzo dużego momentu (rzędu kilkunastu MNm — w stanach dynamicznych) oraz odprowadzenia z obiektu bardzo dużej mocy cieplnej (rzędu kilku MW), stanowi więc bardzo złożony problem nie tylko w sensie elektromagnetycznym ale równocześnie wytrzymałościowym i termodynamicznym. Przetwarzanie tak dużych mocy, ich przesył i doprowadzenie do wielkich



Rys. 5.

odbiorców, jakimi są wielkie zakłady przemysłowe i okręgowe sieci elektryczne, stwarza techniczną problematykę projektowania, budowy i eksploatacji wielkich systemów energetycznych (rys. 5), w których następuje analogiczne powiązanie mechanicznych i elektrycznych zmiennych stanu jak w przypadku elektromechanicznego systemu napędowego (rys. 4).

Jakkolwiek polowe równania Maxwella stanowiły wyjściową pozycję elektrotechniki, to jednak tradycja elektromechaniki poszła początkowo całkowicie w kierunku posługiwania się obwodowym modelem mechaniki analitycznej uzyskanym w drodze dyskretyzacji przestrzeni fizycznej do bezwymiarowych punktów przestrzeni zmiennych stanu. Użytkowanie równań Maxwella w ich polowej postaci sprowadzało się jedynie co najwyżej do metod obliczania globalnych parametrów zastępczego obwodu takich jak indukcyjność rozproszeniowa uzwojeń. Jednak nawet i w tych przypadkach w metodach obliczeń elektromechaniki obserwowana niechęć do analizy polowej była uzasadniona wielkimi trudnościami przyswajania analitycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych ze względu na wielką złożoność ukształtowania powierzchni, na których należy zadawać problemy brzegowe. W świetle współczesnych problemów elektromechaniki i równocześnie współczesnych możliwości, jakie daje technika obliczeniowa zaznacza się wzrastająca rola modelu polowego. Jak dotychczas wzrastające zainteresowanie użytkowaniem polowego modelu dla rozwiązywania technicznych problemów elektromechaniki dotyczy obliczania rozkładu stacjonarnych lub quasistacjonarnych pól magnetycznych przetwornika jako całości. Trudności wynikające z niekorzystnych (dla metod analitycznych) kształtów brzegów poszczególnych podobszarów, z jakich składa się pole przetwornika, znajdują tu szanse przezwyciężenia w systemach obliczeń cyfrowych zwłaszcza przy stosowaniu metod elementów skończonych. Te obliczenia — jakkolwiek angażujące bardzo

duże maszyny cyfrowe i kosztowne — okazują się opłacalnymi dla problemów projektowania bardzo dużych turbogeneratorów.

Naturalną konsekwencją zaangażowania polowego modelu w elektromechanice jest stosowanie tensorów w opisie obiektów elektromechaniki. I tu znów należy podkreślić podstawową rolę, jaką dla metod elektromechaniki odgrywa mechanika ośrodków ciągłych. W technicznych problemach elektromechaniki model polowy jest formułowany w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej zazwyczaj we współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych, przy rozpatrywaniu dwóch wektorów pola (K oraz B). Elektryczne i magnetyczne własności materii w modelu polowym przyjmującym jako założenie ciągłość materii określa pole tensorów drugiego rzędu μ , ε oraz γ przy pomocy których określone są wektory B , D oraz j jako funkcje wektorów H oraz K :

$$B^\lambda = \mu_\nu^\lambda H^\nu \quad D^\lambda = \varepsilon_\nu^\lambda K^\nu \quad j^\lambda = \gamma_\nu^\lambda K^\nu$$

(W teoretycznej elektrodynamice rozpatruje się jednolite pole elektromagnetyczne próżni w czterowymiarowej pseudoeuklidesowej przestrzeni Minkowskiego jako antysymetryczny czterotensor pola — o 6 współrzędnych: $K_x, K_y, K_z, B_x, B_y, B_z$).

7. Uwagi końcowe

Rozwój elektromechaniki jako dyscypliny, której metodyka prac badawczych jak również techniczna problematyka tak silnie są powiązane z mechaniką teoretyczną i stosowaną, pozwala na podkreślenie pewnych wniosków ogólnego charakteru.

- a) Metodyka rozwijana w pracach badawczych mechaniki i elektryki (a zwłaszcza elektromechaniki) wykazuje wspólne cechy — dotyczy to zwłaszcza pozycji wyjściowych. Wzajemne jej oddziaływanie jest dla obydwu dyscyplin pożyteczne.
- b) Projektowanie i technologia produkcji urządzeń (obejmowane tradycyjną nazwą przemysłu elektromaszynowego) to główna domena elektromechaniki, nie dającej się dzielić na dwa odrębne składniki: elektryczny i mechaniczny. Dotyczy ta uwaga również problemów projektowania i eksploatacji elektromechanicznych systemów napędowych.
- c) W świetle powyższych uwag uzasadnionym jest dążenie do bardziej zdecydowanego logicznie skonstruowanego systemu nauczania akademickiego elektromechaniki na szerokiej bazie teoretycznej mechaniki analitycznej oraz teorii pól (w tym pola elektromagnetycznego) w materii makroskopowo traktowanej jako ośrodek ciągły. Analogie elektromechaniczne stają się tutaj bardzo użytecznym i skutecznym środkiem metodycznym.
- d) Dalszy rozwój elektromechaniki będzie również uwarunkowany rozwojem metod teoretycznej mechaniki jako jej podstawowej dyscypliny.

Literatura cytowana w tekście

1. W. RUBINOWICZ, W. KRÓLIKOWSKI: *Mechanika teoretyczna*, Warszawa, PWN 1967.
2. A. PUCHAŁA: *Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych*, Warszawa, PWN 1977.

Р е з ю м е

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ

Электромеханика — в стадии формулирования, развития и будущей перспективы — сильно связана с механикой. Целая методика этой дисциплины опирается на достижениях теоретической механики, которая является основой для всех главных дисциплин механики.

S u m m a r y

METHODS OF INVESTIGATION AND TECHNICAL OF ELECTROMECHANICS

Electromechanics — at the stage of creation, development and future trends — exhibits remarkable ties with mechanics. The methods used in this discipline are based on the achievements of the theoretical mechanics which, by the way, are also fundamental for all applied disciplines of technology. The paper illustrates this thesis and formulates certain implications.

AKADEMIA GÓRNICZO HUTNICZA, KRAKÓW
INSTYTUT MASZYN I STEROWANIA
UKŁADÓW ELEKTROENERGETYCZNYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1978 r.

Referat przeglądowy wygłoszony na zjeździe z okazji XX-lecia PTMTiS
