

## O OSOBLIWOŚCI NAPRĘŻEŃ W ZAGADNIENIU SKRĘCANIA STEMPLEM PIERŚCIENIOWYM

JAN KOKOT, ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

W przypadku skręcania półprzestrzeni sprężystej, gdy naprężenia kontaktowe są styczne do powierzchni w kształcie pierścienia, zagadnienie jest uogólnieniem znanego zadania Reissnera-Sagoci'ego [6, 8, 10, 11], dotyczącego kontaktu na powierzchni koła.

Zastosowanie metody transformacji całkowych Hankela do rozwiązania osiowo symetrycznych zagadnień z powierzchnią kontaktu w kształcie pierścienia stało się możliwe dopiero po ukazaniu się pierwszych prac dotyczących potrójnych równań całkowych z jądrem Hankela (COOKE [3, 4], WILLIAMS [14, 15]). Metoda rozwiązywania potrójnych równań całkowych opiera się zwykle na konsekwentnym zastosowaniu operatorów ERDĚLYI'EGO-KOBERA i COOKE'A [5, 12, 13]. Układ potrójnych równań całkowych w przestrzeni transformacji Hankela, odpowiadający między innymi zagadnieniom kontaktowym skręcania półprzestrzeni pierścieniem daje się sprowadzić metodą rozwiązań próbnych Sneddon'a do układu dwu równań całkowych, albo do jednego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju, które można rozwiązać numerycznie. Rozwiązanie podane przez Cooke'a posiada ciekawą własność, a mianowicie jeżeli  $(a, b)$  oznacza odcinek mierzony wzdłuż szerokości pierścienia, to z postaci rozwiązania można znaleźć, przez rozwinięcie asymptotyczne, osobliwość naprężeń na brzegu zewnętrznym pierścienia dla  $r \rightarrow b^-$ . BORODACZEW, w niedawnych pracach [1, 2] posłużył się również metodą rozwiązań próbnych, jednak jego rozwiązanie posiada postać pozwalającą znaleźć osobliwość naprężeń z innego rozwinięcia asymptotycznego, tym razem dla  $r \rightarrow a^+$ . W pracy wykorzystamy oba podstawienia do przypadku szczególnego, w którym przedyskutujemy osobliwości, gdy półprzestrzeń sprężysta jest skręcana pierścieniem, a następnie prostą metodę pozwalającą z dużą dokładnością wyznaczyć rozkład naprężeń kontaktowych.

### 2. Równania podstawowe

Weźmy pod uwagę osiowo symetryczne zagadnienie skręcania półprzestrzeni sztywnym, płaskim stemplem pierścieniowym. Zakładamy, że półprzestrzeń jest jednorodnym ośrodkiem sprężystym. Ze względu na osiową symetrię zagadnienia wszystkie składowe stanu naprężenia i odkształcenia będziemy rozpatrywać w walcowym układzie współrzędnych  $(r, \varphi, z)$ . Wtedy układ równań przemieszczeniowych Naviera redukuje się do jed-

nego równania [7, 11], które można zapisać w następującej postaci:

$$(2.1) \quad \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] (ru_\varphi) = 0.$$

Po zastosowaniu transformacji całkowej Hankela pierwszego rzędu

$$(2.2) \quad \bar{\Phi}(\xi, z) = \mathcal{H}_1[\Phi(r, z); r \rightarrow \xi] \equiv \int_0^\infty r \Phi(r, z) J_1(r, \xi) dr,$$

równanie (2.1) redukuje się do równania różniczkowego zwyczajnego:

$$(2.3) \quad (D^2 - \xi^2) \bar{u}_\varphi(\xi, z) = 0, \quad \text{gdzie} \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ze względu na znikanie składowej przemieszczenia dla  $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow +\infty$  rozwiązanie równania (2.3) przyjmiemy w postaci

$$(2.4) \quad \bar{u}_\varphi(\xi, z) = A(\xi) \exp(-\xi z).$$

Otrzymujemy następujące wzory:

$$(2.5) \quad u_\varphi(r, z) = \mathcal{H}_1[\xi^{-1} A(\xi) \exp(-\xi z); \xi \rightarrow r],$$

$$(2.6) \quad \sigma_{\varphi z}(r, z) = -\mu \mathcal{H}_1[A(\xi) \exp(-\xi z); \xi \rightarrow r],$$

$$(2.7) \quad \sigma_{r\varphi}(r, z) = -\mu \mathcal{H}_2[A(\xi) \exp(-\xi z); \xi \rightarrow r].$$

Nieznana funkcję  $A(\xi)$  wyznaczmy z warunku brzegowego, który w przypadku skręcania osiowo symetrycznego ma postać następującą

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi z}(r, 0) &= 0, & \text{dla } r &\in (0, a) \cup (b, +\infty), \\ u_\varphi(r, 0) &= \delta r, & \text{dla } r &\in (a, b), \end{aligned}$$

gdzie  $\delta$  jest kątem skręcania.

Warunek brzegowy (2.8) prowadzi do poniższego układu potrójnych równań całkowych na  $A(\xi)$ :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_1[A(\xi); \xi \rightarrow r] &= 0, & \text{dla } r &\in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ \mathcal{H}_1[\xi^{-1} A(\xi); \xi \rightarrow r] &= \delta r, & \text{dla } r &\in (a, b). \end{aligned}$$

Całkowity moment skręcający, działający na stempel, dany jest wzorem

$$(2.10) \quad M = -2\pi \int_a^b r^2 \sigma_{\varphi z}(r, 0) dr = +2\pi\mu \int_a^b r^2 \mathcal{H}_1[A(\xi); \xi \rightarrow r] dr.$$

Przyjmujemy następującą zasadę oznaczania funkcji, gdzie wskaźniki będą zawsze się odnosiły do tych samych obszarów, np.:

$$(2.11) \quad f(r) = \begin{cases} f_1(r), & \text{dla } r \in [0, a), \\ f_2(r), & \text{dla } r \in (a, b), \\ f_3(r), & \text{dla } r \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Obecnie, wykorzystując operatory Hankela [12]:

$$(2.12) \quad S_{\eta, \alpha} f(x) = 2^\alpha x^{-\alpha} \int_0^\infty t^{1-\alpha} J_{2\eta+\alpha}(xt) f(t) dt,$$

układ równań całkowych (2.9) zapiszemy w postaci następującej:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} S_{1/2,0} A(r) &= 0, & r \in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ S_{0,1} A(r) &= f_2(r) = 2, & r \in (a, b). \end{aligned}$$

### 3. Dwie postacie rozwiązania układu potrójnych równań całkowych (2.13)

Dla każdej z postaci rozwiązania układu równań całkowych (2.13) skonstruujemy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju. Pierwsze rozwiązanie pozwoli na wyznaczenie osobliwości naprężeń stycznych  $\sigma_{\eta z}(r, 0)$  przy  $r \rightarrow a^+$ , drugie zaś przy  $r \rightarrow b^-$ . Posłużymy się operatorami całkowymi Erdélyi'ego-Kobera [5, 12] i operatorami częściowego (frakcyjnego) całkowania Cooke'a [5], a mianowicie:

$$(3.1) \quad ({}^b_a I_{\eta, \alpha}) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^{-2\alpha-2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (x^2-u^2)^{\alpha-1} u^{2\eta+1} f(u) du, & \alpha > 0, \\ f(x), & \alpha = 0, \\ \frac{x^{-2\alpha-2\eta-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^b (x^2-u^2)^{\alpha} u^{2\eta+1} f(u) du, & \alpha \in (-1, 0), \end{cases}$$

$$(3.2) \quad ({}^d_c K_{\eta, \alpha}) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_c^d (u^2-x^2)^{\alpha-1} u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du, & \alpha > 0, \\ f(x), & \alpha = 0, \\ -\frac{x^{2\eta-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_c^d (u^2-x^2)^{\alpha} u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du, & \alpha \in (-1, 0). \end{cases}$$

Zauważmy, że  ${}_0 I_{\eta, \alpha} \equiv I_{\eta, \alpha}$ , oraz  ${}^{+\infty}_x K_{\eta, \alpha} \equiv K_{\eta, \alpha}$ .

Wprowadźmy operatory

$$(3.3) \quad ({}^x_{c,a} L_{\eta, \alpha}) f(x) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} x^{-2\eta} (x^2-c^2)^{-\alpha} \int_a^b (c^2-t^2)^{\alpha} (x^2-t^2)^{-1} t^{2\eta+1} f(t) dt,$$

dla  $a < b < c < x$ , oraz

$$(3.4) \quad ({}^x_{d,a} M_{\eta, \alpha}) f(x) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} x^{2\eta+2\alpha} (d^2-x^2)^{-\alpha} \int_a^b (t^2-d^2)^{\alpha} (t^2-x^2)^{-1} t^{-2\alpha-2\eta+1} \times \\ \times f(t) dt, \quad \text{dla } x < d < a < b.$$

W dalszym ciągu pracy wykorzystamy reguły „składania” operatorów [12]:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} S_{\eta+\alpha, \beta} S_{\eta, \alpha} &= I_{\eta, \alpha+\beta}, & S_{\eta, \alpha} S_{\eta, \alpha+\beta} &= K_{\eta, \alpha+\beta}, \\ I_{\eta, \alpha}^{-1} &= I_{\eta+\alpha, -\alpha}, & K_{\eta, \alpha}^{-1} &= K_{\eta+\alpha, -\alpha}, \end{aligned}$$

oraz

$$(3.6) \quad \begin{aligned} ({}^d_c I_{\eta, \alpha}^{-1}) ({}^x_c I_{\eta, \alpha}) &= -({}^x_d; {}^d_c L_{\eta, \alpha}), \quad x > d > c, \\ ({}^e_d K_{\eta, \alpha}^{-1}) ({}^e_x K_{\eta, \alpha}) &= -({}^e_x; {}^e_d M_{\eta, \alpha}), \quad x < d < e. \end{aligned}$$

Założmy obecnie, że poszukiwana funkcja  $A(\xi)$  w równaniach (2.13) ma postać [2]:

$$(3.7) \quad A(r) = S_{1, -1/2} H(r).$$

Po podstawieniu do układu równań (2.13), otrzymamy:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} I_{1, -1/2} H(r) &= 0, \quad r \in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ K_{0, 1/2} H(r) &= f_2(r), \quad r \in (a, b). \end{aligned}$$

Zastosowanie własności i wykorzystanie wzorów (3.1) - (3.6) pozwala nam sprowadzić układ równań (3.8) do układu równań całkowych Fredholma na funkcję  $H(r)$ :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} H_1(x) &= 0, \quad x \in [0, a), \\ H_2(x) &= ({}^b_x K_{1/2, -1/2}) f_2(x) - ({}^b_x; {}^{+\infty}_b M_{0, 1/2}) H_3(x), \quad x \in (a, b), \\ H_3(x) &= -({}^x_b; {}^b_a L_{1, -1/2}) H_2(x), \quad x \in (b, +\infty). \end{aligned}$$

Z drugiego i trzeciego równania układu (3.9) możemy wyrugować  $H_3(x)$  i w ten sposób otrzymamy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju na poszukiwaną funkcję  $H_2(x)$ :

$$(3.10) \quad H_2(x) = ({}^b_x K_{1/2, -1/2}) f_2(x) + ({}^b_x; {}^{+\infty}_b M_{0, 1/2}) ({}^x_b; {}^b_a L_{1, -1/2}) H_2(x) \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Równanie powyższe można zapisać w równoważnej postaci

$$(3.11) \quad H_2(x) = \varphi(x) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_a^b K_a(x, y) H_2(y) dy,$$

gdzie:  $\varphi(x) = ({}^b_x K_{1/2, -1/2}) f_2(x)$ ,

$$(3.12) \quad K_a(x, y) = \frac{xy^3}{\sqrt{(b^2-x^2)(b^2-y^2)}} \int_b^{+\infty} \frac{t^2-b^2}{t^2(t^2-x^2)(t^2-y^2)} dt.$$

Po obliczeniu całki w (3.12) i przejściu do współrzędnych bezwymiarowych równanie (3.11) zapiszemy w postaci następującej

$$(3.13) \quad \frac{1-x^2}{x^4} \chi(x) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_\varepsilon^1 \bar{K}_a(x, y) \chi(y) dy, \quad x \in (\varepsilon, 1),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon &= a/b, \quad \chi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu\delta b^2} \frac{x^3}{\sqrt{b^2-x^2}} H_2(x), \\ b^2 \bar{K}_a(x, y) &= \frac{1}{2(x^2-y^2)} \left[ \frac{1-y^2}{y^3} \ln \frac{1+y}{1-y} - \frac{1-x^2}{x^3} \ln \frac{1+x}{1-x} \right] - \frac{1}{x^2 y^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ zarówno jądro równania całkowego (3.13)  $\bar{K}_a(x, y)$  jak i funkcja swobodna  $x^4/(1-x^2)$  są klasy  $L^2(\varepsilon, 1)$ , to zgodnie ze znanym twierdzeniem teorii równań całkowych,

rozwiązanie równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju (3.13)  $\chi(x)$  jest jedyne i również należy do klasy  $L^2(\varepsilon, 1)$ . Składową styczną naprężenia  $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$  wyrazimy przez funkcję  $\chi(x)$  w sposób następujący

$$(3.14) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) = \frac{2\mu\delta b^3}{\pi r^2} \frac{d}{dr} \int_{\varepsilon}^{r/b} \left[ \frac{1-y^2}{\left(\frac{r^2}{b^2} - y^2\right)} \right]^{1/2} \chi(y) dy.$$

Wykorzystując powyższy związek przepisemy wzór na moment skręcający, wyrażając go również przez funkcję  $\chi(x)$ :

$$(3.15) \quad M = -4\mu b^3 \delta \int_{\varepsilon}^1 \chi(y) dy = -4\mu b^3 \delta \gamma_a^{-1}.$$

Równanie powyższe możemy również potraktować jako związek pomiędzy momentem skręcającym i kątem skręcenia, gdzie

$$(3.16) \quad \gamma_a^{-1} = \int_{\varepsilon}^1 \chi(y) dy.$$

Ze związku (3.14), po podstawieniu (3.16), otrzymamy następujące wyrażenie asymptotyczne dla  $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ , przy  $r \rightarrow a^+$ :

$$(3.17) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) = -\frac{M\gamma_a \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\sqrt{2} a^2 b \sqrt{\varepsilon} \pi} \left( \frac{r}{b} - \varepsilon \right)^{-1/2} \chi(\varepsilon).$$

W przypadku, gdy stempel ma podstawę kołową ( $a = 0$ ), otrzymamy dokładne rozwiązanie równania (3.13), (które prowadzi do dobrze znanego wyniku na rozkład naprężeń kontaktowych):

$$(3.18) \quad \chi(x) = \frac{x}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[ (1+x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x \right].$$

Stosując analogiczną metodę postępowania otrzymamy wyrażenie pozwalające na ustalenie charakteru osobliwości naprężeń kontaktowych dla  $r \rightarrow b^-$ . W tym celu przyjmujemy następującą postać [4] poszukiwanej funkcji  $A(r)$  występującej w równaniu (2.13):

$$(3.19) \quad A(r) = S_{1/2, -1/2} h(r).$$

Po podstawieniu otrzymujemy układ potrójnych równań całkowych

$$(3.20) \quad \begin{aligned} K_{1/2, -1/2} h(r) &= 0, & r \in [0, a) \cup (b, +\infty), \\ I_{1/2, 1/2} h(r) &= f_2(r), & r \in (a, b). \end{aligned}$$

Wykorzystując następnie, jak poprzednio, definicje i własności podane pod (3.1) - (3.6), dostaniemy

$$(3.21) \quad \begin{aligned} h_1(x) &= -\left( {}_a^x M_{1/2, -1/2} \right) h_2(x), & x \in [0, a), \\ h_2(x) &= \left( {}_a^x I_{1, -1/2} \right) f_2(x) - \left( {}_a^x L_{1/2, 1/2} \right) h_1(x), & x \in (a, b), \\ h_3(x) &= 0, & x \in (b, +\infty). \end{aligned}$$

Po podstawieniu za  $h_1(x)$  z pierwszego równania do drugiego otrzymamy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju ze względu na  $h_2(x)$ :

$$(3.22) \quad h_2(x) = ({}^x I_{1, -1/2}) f_2(x) + ({}^x; a; {}^g L_{1/2, 1/2}) ({}^a; b; M_{1/2, -1/2}) h_2(x).$$

Po przejściu do zmiennych bezwymiarowych równanie (3.22) sprowadzi się do postaci

$$(3.23) \quad (x^2 - \varepsilon^2) \eta(x) = (2x^2 - \varepsilon^2) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{\varepsilon}^1 K_b(x, y) \eta(y) dy,$$

gdzie

$$\bar{K}_b(x, y) = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \left[ x(x^2 - \varepsilon^2) \ln \frac{x + \varepsilon}{x - \varepsilon} - y(y^2 - \varepsilon^2) \ln \frac{y + \varepsilon}{y - \varepsilon} \right] - \frac{\varepsilon}{b},$$

$$\eta(x) \equiv \frac{\sqrt{\pi} x}{2\mu\delta \sqrt{x^2 - \varepsilon^2}} h_2(bx).$$

Podobnie jak w przypadku równania całkowego (3.13) również tutaj możemy stwierdzić, że rozwiązanie równania całkowego (3.23) jest klasy  $L^2(\varepsilon, 1)$ . Obecnie wyrażenie na naprężenia kontaktowe  $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$  dadzą się zapisać następująco:

$$(3.24) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) = \frac{M\gamma_b}{2\pi b^2} \frac{d}{dr} \int_{\varepsilon}^1 \left[ \frac{y^2 - \varepsilon^2}{y^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2} \right]^{1/2} \eta(y) dy,$$

gdzie

$$\gamma_b^{-1} = \int_{\varepsilon}^1 (2y^2 - \varepsilon^2) \eta(y) dy.$$

Ponieważ rozwiązanie równania całkowego (3.23) jest klasy  $L^2(\varepsilon, 1)$  możemy dokonać przejścia asymptotycznego we wzorze (3.24), podobnie jak poprzednio w (3.17). Wyrażenie asymptotyczne dla  $r \rightarrow b^-$  przyjmie postać następującą

$$(3.25) \quad \sigma_{\varphi z} = - \frac{M\gamma_b \sqrt{1 - \varepsilon^2} \eta(1)}{2 \sqrt{2} \pi b^3} (1 - r/b)^{-1/2}.$$

Dla kołowej podstawy stempla ( $a = 0$ ) otrzymujemy dokładne rozwiązanie równania (3.23), wtedy  $\eta(x) = 2$ .

#### 4. Rozwiązania przybliżone

Na podstawie dotychczasowych rozwiązań określiliśmy osłabiwości składowej stycznej naprężeń kontaktowych występujących na krańcach obszaru kontaktu. Na brzegach pierścienia składowa obwodowa wektora przemieszczenia, aczkolwiek ciągła, nie posiada pochodnej. Dla  $r \in (a, b)$  funkcja  $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$  jest dodatnia, klasy  $C^1$ . Rozkład naprężeń kontaktowych otrzymamy dopiero po rozwiązaniu odpowiednich równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju, również wtedy będziemy w stanie wyznaczyć pozostałe

niezerowe składowe tensora naprężenia, wektor przemieszczenia oraz współczynniki  $\chi(\varepsilon)$  i  $\eta(1)$  występujące w wyrażeniach asymptotycznych (3.17) i (3.25).

Naszym celem nie jest powtórzenie tu znanych metod rozwiązań lecz pokazanie jak w łatwy sposób można wyznaczyć rozkład naprężeń kontaktowych bez konieczności rozwiązywania równania całkowego zagadnienia. Wykorzystując wyrażenia asymptotyczne zapiszemy  $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$  w postaci:

$$(4.1) \quad \sigma_{\varphi z}(r, 0) \cong -\frac{2\mu\delta}{\pi} \sqrt{b^2 - a^2} \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} (r^2 - a^2)^{-1/2} \chi(\varepsilon), & r \in (a, a + \Delta), \\ f(r), & r \in (a + \Delta, b - \Delta), \\ \frac{r}{b} (b^2 - r^2)^{-1/2} \eta(1), & r \in (b - \Delta, b), \end{cases}$$

gdzie  $\Delta = (b - a)/n$ ,  $n > 2$ ,  $f(r)$  jest regularną funkcją dodatnią.

Gdyby funkcja  $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$  była dokładnym rozwiązaniem naszego zagadnienia, to wtedy  $u_{\varphi}(r, 0)$ , obliczona z transformaty Hankela (2.5), dla  $r \in (a, b)$ , przyjąłaby oczywiście postać zgodną z warunkiem brzegowym (2.8)<sub>2</sub>:

$$(4.2) \quad u_{\varphi}(r, 0) = r\delta, \quad r \in (a, b).$$

Jako pierwsze przybliżenie, dostatecznie dokładne dla szerokich pierścieni możemy przyjąć, że współczynnik  $\eta(1)$  dla  $r \rightarrow b^-$  jest taki sam jak w przypadku kontaktu na powierzchni koła, t.zn.  $\eta(1) = 2$ . Wtedy współczynnik  $\chi\left(\frac{a}{b}\right)$  we wzorze na naprężenia styczne  $\sigma_{\varphi z}(r, 0)$ , dla  $r \rightarrow a^+$ , można obliczyć z warunku na moment skręcający (2.10). Przyjmiemy obecnie, że trzeci przedział we wzorze (4.1) został przedłużony w ten sposób, że obejmuje drugi. Mamy więc dla pierwszego przedziału  $r \in (a, a + (b - a)/n)$ , a dla trzeciego  $r \in (a + (b - a)/n, b)$ ; drugi przedział znika. Jak widać z rysunku 1 przybliżenie takie ma sens dla dużego zakresu szerokości pierścieni. Celem obliczenia  $\chi\left(\frac{a}{b}\right)$  wykorzystamy wzór na moment skręcający w postaci

$$(4.3) \quad M = 4\mu\delta \sqrt{b^2 - a^2} \left[ b^2 a^{-2} \chi \frac{a}{b} \int_a^{a + \frac{b-a}{n}} r^2 (r^2 - a^2)^{-1/2} dr + \frac{\eta(1)}{b} \int_{a + \frac{b-a}{n}}^b r^3 (b^2 - r^2)^{-1/2} dr \right],$$

Jeżeli przyjmiemy podział odcinka  $(b - a)$  na pewną całkowitą liczbę  $m$  części to na ogół okaże się, że wartość naprężeń na granicy przedziałów doznaje skoku. Na drodze prób możemy znaleźć takie (niecałkowite)  $n$ , że skok będzie mniejszy od pewnego z góry zadanego, małego  $\varepsilon$ , a funkcja naprężeń praktycznie ciągła. Metodą prób otrzymaliśmy następującą tabelkę, dla różnych szerokości pierścienia kontaktu, gdzie  $1/n$  jest stosunkiem długości pierwszego przedziału do szerokości pierścienia:

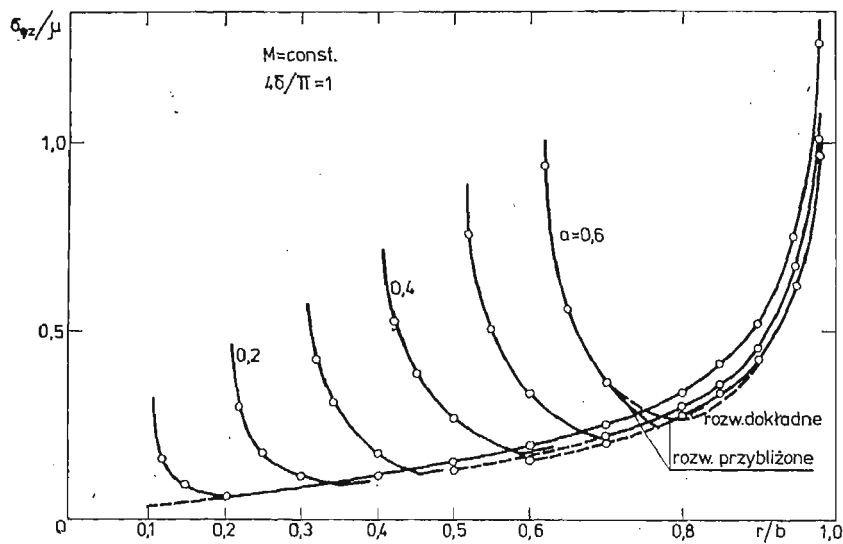
|       |       |       |       |       |      |      |
|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $a/b$ | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5  | 0,6  |
| $n$   | 9,5   | 6,3   | 4,8   | 3,5   | 2,75 | 2,5  |
| $1/n$ | 0,105 | 0,159 | 0,208 | 0,286 | 0,36 | 0,40 |

Ponieważ jednak tylko jedna z wielkości  $M$ , lub  $\delta$  jest znana z warunków zadania, założymy, że w przybliżeniu, dla dostatecznie szerokich pierścieni związek między momentem skręcającym i kątem skręcenia jest taki sam jak w przypadku kontaktu na powierzchni koła:

$$(4.4) \quad M = \frac{16}{3} b^3 \mu \delta.$$

Miarą popełnionego błędu będzie różnica między przemieszczeniem  $u_\varphi(r, 0)$   $r \in (a, b)$  obliczonym dla rozkładu naprężeń danych wzorem przybliżonym i wynikającym z warunku brzegowego (2.8)<sub>2</sub>.

Na rysunku 1 przedstawiliśmy rozkłady naprężeń dla różnych szerokości  $(b-a)$  pierścieni kontaktu, od  $0,4b$  do  $0,9b$ . Dla porównania, w przypadku o najmniejszej szerokości



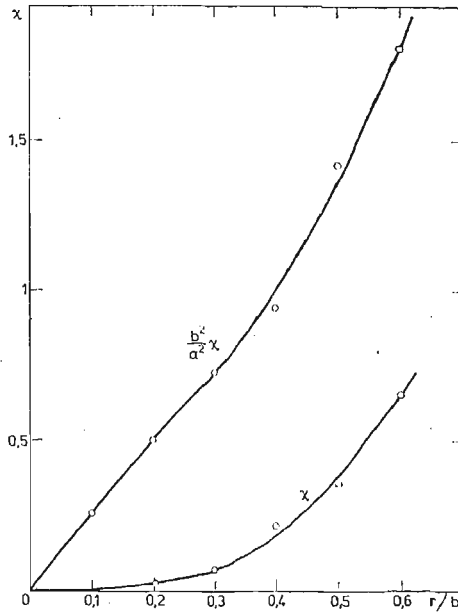
Rys. 1

$0.4b$  wrysowaliśmy również krzywą odpowiadającą rozwiązaniu otrzymanemu z rozwiązania numerycznego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju, według metody Cooke'a. Widać, że redystrybucja naprężeń jest nieznaczna i tym mniejsza im szerszy jest pierścień kontaktu. Rysunek 2 przedstawia wartości  $\chi(a/b)$  i  $b^2 a^{-2} \chi(a/b)$  w zależności od szerokości pierścienia. Warto zauważyć, że dla wąskiego pierścienia wartość  $b^2 a^{-2} \chi(a/b) \approx 1,8$  i jest bliska współczynnikowi osobliwości na promieniu zewnętrznym dla przypadku kontaktu na powierzchni koła. Punkty oznaczają odpowiednie wartości pierwszego przybliżenia.

W drugim przybliżeniu odstawimy od założenia upraszczającego, że  $\eta(1) = 2$  czyli, że  $\eta(1)$  jest taki sam jak dla kontaktu na powierzchni koła. Brakujący warunek, (lub warunki) otrzymamy ze spełnienia warunku brzegowego w punkcie, ewentualnie w kilku punktach. Jeżeli założymy, że  $\sigma_{\varphi_z}(r, 0)$  jest znane, wtedy otrzymamy ze wzoru (2.6)

$$-\mu A(\xi) = \int_a^b r \sigma_{\varphi_z}(r, 0) J_1(\xi r) dr,$$





Rys. 2

skąd, dla  $z = 0$ , mamy

$$(4.5) \quad u_\varphi(r, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_a^b t \sigma_{\varphi z}(t, 0) dt \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi t) d\xi,$$

gdzie

$$(4.6) \quad \frac{\pi}{2} \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi t) d\xi = \begin{cases} \frac{1}{r} \left[ K\left(\frac{r}{t}\right) - E\left(\frac{r}{t}\right) \right], & t > r, \\ \frac{1}{t} \left[ K\left(\frac{t}{r}\right) - E\left(\frac{t}{r}\right) \right], & r > t. \end{cases}$$

Podstawiając  $r = b$  w warunku brzegowym (2.8)<sub>2</sub>, otrzymamy dodatkowy warunek

$$(4.7) \quad \pi \mu b \delta = -2 \int_a^b \sigma_{\varphi z}(t, 0) \left[ K\left(\frac{t}{b}\right) - E\left(\frac{t}{b}\right) \right] dt.$$

Z kolei zamiast warunku (4.4) możemy wziąć następujący:

$$(4.8) \quad \pi \mu a^2 \delta = -2 \int_a^b \sigma_{\varphi z}(t, 0) \left[ K\left(\frac{a}{t}\right) - E\left(\frac{a}{t}\right) \right] t dt.$$

Współczynniki  $\chi(\varepsilon)$  oraz  $\eta(1)$  wyznaczmy, po obliczeniu całek, z równań algebraicznych (4.7) i (4.8), a następnie kąt obrotu z równania (4.3). Obliczenia ułatwia wykorzystanie wzoru:

$$K(k) - E(k) = k^2 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx, \quad k < 1,$$

który umożliwia obliczenie jednej z całek w całce podwójnej i numeryczne scałkowanie pozostałych.

Potraktujmy równanie (4.7) jako test pierwszego przybliżenia i przyjmijmy np. dla  $a/b = 0,5$ , że zgodnie z pierwszym przybliżeniem  $(b^2/a^2)\chi(\varepsilon) = 1,42$  (Rys. 2). Po podstawieniu i obliczeniu całek otrzymamy  $\eta(1) \approx 1,58$ , a więc wartość mniejsza od 2, co było do przewidzenia.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Н. М. БОРОДАЧЕВ, *О характере особенностей напряжений под кольцевым штампом*, Прикл. Мат. и Мех., 40 (1976), 2, 372.
2. Н. М. БОРОДАЧЕВ, *Об одном классе решений тройных интегральных уравнений*, Прикл. Мат. и Мех., 40 (1976), 4, 655.
3. J. C. COOKE, *Triple integral equations*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 16 (1963), 193.
4. J. C. COOKE, *The solution of triple integral equations in operational form*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 18 (1965), 57.
5. A. ERDÉLYI, I. N. SNEDDON, *Fractional integration and dual integral equations*, Canad. J. Math. 14 (1962), 685.
6. E. REISSNER, H. F. SAGOCI, *Forced torsional oscillations of an elastic half-space*, Int. J. Appl. Physics, 15 (1944), 652.
7. W. B. RUDNICKII, *Praca doktorska*, Instytut Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 1971.
8. I. N. SNEDDON, *Note on boundary value problem of Reissner and Sagoci*, J. Appl. Physics 18 (1947), 130.
9. I. N. SNEDDON, *Fractional integration and dual integral equations*, North Carolina State College, PSR-6, 1962.
10. I. N. SNEDDON, *The use of transform methods in elasticity*, II, North Carolina State Univ., PSR-24/5, 1965.
11. I. N. SNEDDON, *The Reissner-Sagoci problem*, Proc. Glasgow Math. Assoc., 7 (1966).
12. I. N. SNEDDON, *Mixed boundary value problems of potential theory*, Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1966.
13. I. N. SNEDDON, *The use of operators of fractional integration in applied mathematics*, IPPT PAN, PWN Warszawa-Poznań, 1979.
14. W. E. WILLIAMS, *Note on the electrostatic problem for a circular annulus*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 16 (1963), 2.
15. W. E. WILLIAMS, *Integral equation formulation of some three part boundary value problems*, Proc. Edinb. Math. Soc. Ser. 2, 13 (1963), 4.

#### Резюме

#### ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ С КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТЮ КОНТАКТА

Применяя решения Кука и Бородавчева получены особенности напряжений на внутреннем и наружном радиусах кольца контакта в задаче о кручении. Предложен простой метод приближенного решения задачи, приведены примеры.

## S u m m a r y

## ON STRESS SINGULARITIES IN TORSION BY AN ANNULUS

Using the forms of solutions proposed by Cooke and Borodachev we discuss the stress singularities in the torsion, on outer and inner radii of the contact annulus. Next a simple method of approximate solution is considered and verified on examples.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI  
INSTYTUT MECHANIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 grudnia 1979 roku*

---