

BUDOWA GRANICZNYCH KRZYWYCH ZNISZCZENIA W OPARCIU O KONCEPCJĘ
PARAMETRU USZKODZENIA¹,

MARCIN CHRZANOWSKI, JERZY MADEJ (KRAKÓW)

Wykaz oznaczeń

- n — stała materiałowa,
 n_0 — stała materiałowa,
 t — czas,
 t^* — czas zniszczenia,
 t^* — czas zniszczenia w jednoosiowym stanie naprężenia,
 A — stała materiałowa,
 A_0 — stała materiałowa,
 A_p — pierwotne pole powierzchni próbki,
 A_s — pole powierzchni szczelin powstałych w próbce,
 A_r — pole powierzchni przenoszącej naprężenia w przekroju próbki,
 R — naprężenie porównawcze,
 S_1, S_2 — bezwymiarowe naprężenia główne,
 S — bezwymiarowa intensywność naprężeń,
 α — parametr w równaniu (4.1a),
 β — parametr w równaniu (3.1),
 ω — parametr uszkodzeń,
 τ — bezwymiarowy czas,
 τ^* — bezwymiarowy czas zniszczenia,
 σ_1, σ_2 — naprężenia główne,
 σ_j — dodatnie, największe naprężenie główne,
 σ_t — intensywność naprężeń,
 σ_e — naprężenie ekwiwalentne wg Sdobyriewa,
 σ_{t0} — wartości intensywności naprężenia, przy której zniszczenie nastąpi w czasie $t = 0$,
 ψ — parametr ciągłości.

1. Wstęp

Charakterystyczną cechą zniszczenia elementów konstrukcji w wielu wypadkach (pełzanie, zmęczenie) jest to, że następuje ono w wyniku kumulacji uszkodzeń w ciągu

¹) Praca niniejsza wykonana została w ramach Problemu Międzyresortowego I-23, koordynowanego przez IPPT PAN

całego okresu eksploatacji. Makroskopowo obserwowane pęknięcie jest więc efektem końcowym procesu nukleacji i narastania mikrouszkodzeń. Drugim etapem procesu zniszczenia jest propagacja jednej (lub wielu) dominującej szczeliny, prowadząca do wyczerpania nośności elementu. Czas trwania tego etapu we wspomnianych powyżej wypadkach jest jednak pomijalnie mały w porównaniu z etapem pierwszym [8], [12], którego znaczenie jest podstawowe.

Dla opisu okresu kumulacji mikroskopowych uszkodzeń przy pełzaniu KACZANOW [5] wprowadził parametr, którego zmiana obrazuje proces uszkodzeń w materiale. Dla jednoosiowego rozciągania parametr ten może być interpretowany [11] jako stosunek pola efektywnie pracującej powierzchni przekroju poprzecznego próbki, do jej pierwotnego pola:

$$(1.1) \quad \omega = \frac{A_p - A_r}{A_p},$$

gdzie: A_p — pierwotne pole powierzchni

$A_r = A_p - A_s$ — pole powierzchni przenoszącej naprężenia w przekroju

A_s — pole powierzchni szczelin

ω — parametr uszkodzeń.

Zamiast parametru ω wygodniej jest czasami wprowadzić tzw. parametr ciągłości materiału

$$(1.2) \quad \psi = 1 - \omega,$$

którego zmiany w czasie, w jednoosiowym stanie naprężenia podał Kaczanow w postaci:

$$(1.3) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma}{\psi} \right)^n,$$

gdzie A , n — stałe materiałowe.

Odpowiednie równanie dla parametru uszkodzeń będzie miało postać:

$$(1.4) \quad \frac{d\omega}{dt} = A \left(\frac{\sigma}{1 - \omega} \right)^n.$$

To fenomenologiczne podejście znalazło szerokie potwierdzenie doświadczalne. Ponadto pozwala ono na opisanie całego procesu akumulacji uszkodzeń, a nie tylko efektu końcowego — zniszczenia. W niniejszej pracy zajęto się zbadaniem możliwości zastosowania tego parametru dla opisu zniszczenia w płaskim stanie naprężenia.

2. Transformacja krzywych granicznych

W przypadku materiałów polikrystalicznych i w jednoosiowym stanie naprężenia, zmiana wielkości działającego obciążenia powoduje zarówno zmianę czasu do zniszczenia jak i jego charakter. Dla małych wielkości obciążeń, a w konsekwencji dużych czasów do do zniszczenia, pęknięcia mają charakter międzykrystaliczny, a przełom jest rozdzielczy. W drugim skrajnym przypadku dużych wielkości obciążeń zniszczenie ma charakter wewnątrzkrystaliczny i zachodzi na skutek poślizgów w płaszczyznach przebiegających przez poszczególne ziarna (bloki kryształów).

W przestrzennym stanie naprężenia znajduje to swoje odbicie w zachowaniu się materiału zgodnie z różnymi kryteriami wyężeńiowymi. I tak dla przypadku dużych czasów do zniszczenia, decydujące znaczenie ma wielkość największego naprężenia głównego, a więc najadekwatniejszą jest hipoteza Clebscha-Rankine'a (zmodyfikowaną hipoteza Galileusza). Dla zniszczenia wewnątrzkrystalicznego decydujący jest mechanizm poślizgowy, zbliżony do tego jaki obserwuje się przy płynięciu plastycznym. Stąd powszechnie stosowanym jest tu kryterium Hubera-Misesa-Hencky'ego (lub — dla swej prostoty — kryterium Tresci).

Należy podkreślić, że powyższy podział jest czysto umowny i rzeczywiste zachowanie się materiałów jest wynikiem równoczesnego występowania obu typów zniszczenia. Ponadto przewaga jednego z powyższych typów zależy zarówno od temperatury, jak i od budowy krystalicznej materiału. W praktyce dąży się do jak najdalej idącej idealizacji, dzięki której klasyfikuje się materiały, które w najczęściej spotykanym zakresie temperatur zachowują się bądź jak czułe na największe naprężenie główne, bądź na wielkość stycznego naprężenia oktaedrycznego. Klasyfikację taką wprowadził m.in. Hayhurst [4], nazywając materiały pierwszej grupy materiałami typu $\Delta-\Delta$, drugiej typu $\Phi-\Phi$. Do klasy $\Delta-\Delta$ należą takie metale jak miedź, brąz i stale w bardzo wysokich temperaturach. Typowym reprezentantem klasy $\Phi-\Phi$ jest aluminium.

Jednak dla wielu materiałów, ważnych ze względu na swoje powszechne zastosowanie (stale stopowe), obserwować można opisaną powyżej zmianę charakteru zniszczenia i w konsekwencji transformację krzywych granicznych wraz ze zmianą czasu do zniszczenia.

Istnieją dwie możliwości opisu pośrednich krzywych granicznych. Pierwsza z nich to posługiwanie się różnymi hipotezami wyężeńiowymi, dla różnych czasów zniszczenia. Jest to jednak z praktycznego punktu widzenia możliwe tylko dla znalezienia pewnych oszacowań czasu do zniszczenia. Dla danego obciążenia nie jest bowiem znany z góry czas zniszczenia, a więc i postać szukanej krzywej granicznej, a w konsekwencji postać hipotezy wyężeńiowej, którą należy zastosować, aby ten czas poprawnie wyznaczyć.

Druga możliwość opisu transformacji krzywych granicznych, to dobór takiego prawa rozwoju uszkodzeń, aby w przypadkach granicznych tj. dla bardzo małych, lub bardzo dużych czasów do zniszczenia otrzymać odpowiednio hipotezy Hubera i Galileusza-Clebscha-Rankine'a. W przypadkach pośrednich wielkości obciążeń prawo takie powinno opisywać krzywe graniczne zawarte pomiędzy krzywymi odpowiadającymi powyższym dwóm hipotezom wyężeńiowym.

Niezależnie od powyższych możliwości należy podjąć decyzję co do reprezentacji uszkodzeń w przestrzennym stanie naprężenia. Najogólniejszym jest tu przyjęcie, że uszkodzenia reprezentowane są przez pewien tensor. Koncepcję taką zaproponował RABOTNOW [14], a pewną interpretację fizyczną składowych tego tensora podali KACZANOW jr. i WAKULENKO [16]. Według tej teorii zakłada się, że w każdej płaszczyźnie powstawanie i rozwój mikrouszkodzeń następuje w trzech kierunkach wzajemnie ortogonalnych. Prawo zmiany parametru uszkodzeń w tensorowej reprezentacji ma postać układu sześciu równań różniczkowych dla sześciu składowych tensora uszkodzeń, w których prędkości uszkodzeń są funkcją niezmienników tensora naprężeń rzeczywistych.

Zarówno ze względu na trudności matematyczne w skonstruowaniu praktycznie przy-

datnych rozwiązań, jak i na brak odpowiedniego materiału doświadczalnego koncepcja ta nie znalazła szerszego zastosowania w odniesieniu do zniszczenia metali przy pełzaniu, choć z powodzeniem była już stosowana do niektórych zagadnień mechaniki pękania skał [2].

Do prostszych związków prowadzi koncepcja operowania zamiast tensorem uszkodzeń trzema parametrami opisującymi uszkodzenia w płaszczyznach naprężeń głównych. W dalszym ciągu w przypadku tej teorii, zaproponowanej przez KACZANOWA [6], operować będziemy umowną nazwą „wektorowa reprezentacja uszkodzeń”.

Wreszcie najprostszą koncepcją jest operowanie — również i w przypadku przestrzennego stanu naprężenia — skalarną reprezentacją parametru uszkodzeń, który może więc być rozumiany jako ślad tensora uszkodzeń. Propozycja taka zaproponowana została przez SDOBYRIEWA [15] i dzięki swej prostocie znalazła szerokie zastosowanie (np. [17]).

W niniejszej pracy zbadano skalarną i wektorową reprezentację uszkodzeń z punktu widzenia możliwości ich zastosowania do opisu omówionego powyżej zjawiska transformacji krzywych granicznych.

3. Skalarna reprezentacja parametru uszkodzeń

Aby rozważyć możliwe postacie krzywych izochronicznych (krzywych jednakowego czasu zniszczenia) przy pełzaniu wg skalarnej reprezentacji parametru uszkodzeń posłużono się prawem Kaczanowa uogólnionym na przestrzenny stan naprężenia przez Sdobyriewa w postaci

$$(3.1) \quad \dot{\omega} = A \left(\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right)^n,$$

gdzie

$$\text{gdzie} \quad \sigma_e = \beta \sigma_1 + (1-\beta) \sigma_2 \quad 0 \leq \beta \leq 1,$$

σ_1 — intensywność tensora naprężenia.

Granicznym wartościom parametru β odpowiadać będą hipotezy Clebscha-Rankine'a i Hubera-Misesa. W pierwszym rzędzie zbadano więc, jak przedstawia się współpraca naprężeń głównych w zakresie rozwoju uszkodzeń dla poszczególnych wartości współczynnika β przy ustalonym czasie zniszczenia t^* , tzn. jaką postać mają krzywe izochroniczne dla różnych współczynników β .

Jako porównawczy przyjęto czas zniszczenia dla jednoosiowego stanu naprężenia \bar{t}^* . Następnie dokładając naprężenie σ_2 zmieniano σ_1 tak, by uzyskać ten sam czas zniszczenia \bar{t}^* .

Próby te przeprowadzono dla różnych wartości współczynnika β otrzymując za każdym razem odpowiednie krzywe graniczne.

Powyższe zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego, zwyczajnego typu (3.1) z warunkiem brzegowym na funkcję $\omega(t)$ w postaci:

$$(3.2) \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t^*) = 1,$$

przy dodatkowym warunku, aby dla różnych σ_2 zmieniając σ_1 uzyskać ten sam czas zniszczenia \bar{t}^* .

Rozdzielając zmienne w (3.1):

$$(3.3) \quad \int_0^{\omega} (1-\omega)^n d\omega = \int_0^t A\sigma_e^n dt.$$

i wykonując całkowanie otrzymujemy czas do zniszczenia

$$(3.4) \quad t^* = \frac{1}{A\sigma_e^n(1+n)}.$$

Przyjmując $\beta = 0$ mamy:

$$(3.5) \quad \sigma_e = \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}.$$

Wprowadzając bezwymiarowe naprężenia

$$(3.6) \quad S_1 = \frac{\sigma_1}{R},$$

$$S_2 = \frac{\sigma_2}{R},$$

$$(3.7) \quad S_i = \frac{\sigma_i}{R} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2},$$

mamy zatem:

$$(3.8) \quad t^* = \frac{1}{A(1+n)R^n (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_1 S_2})^n}.$$

W jednoosiowym stanie naprężenia tj. gdy $S_1 = 1$ i $S_2 = 0$ czas zniszczenia wyraża się wzorem:

$$(3.9) \quad \bar{t}^* = \frac{1}{A(1+n)R^n}.$$

Wprowadzając bezwymiarowy czas

$$(3.10) \quad \tau = \frac{t}{t^*} = t \cdot AR^n(1+n),$$

mamy:

$$(3.11) \quad \tau^* = \frac{t^*}{t^*} = \frac{1}{(\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2})^n}.$$

W dalszym ciągu poszukiwać będziemy takich wartości S_1 i S_2 aby spełniony był warunek $\tau^* = 1$. Stąd:

$$(3.12) \quad S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2 = 1.$$

Jest to równanie elipsy Hubera-Misesa.

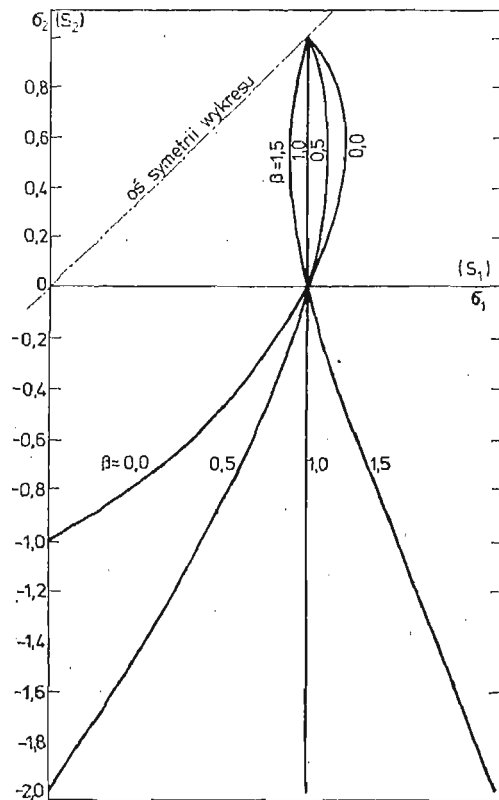
Dla $\beta \neq 0$ otrzymujemy:

$$(3.13) \quad \tau^* = \frac{1}{\beta S_1 + (1-\beta) (\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2})^n}.$$

W dalszym ciągu zbadamy jak przy danych β przedstawia się współpraca naprężeń σ_1 i σ_2 w zakresie rozwoju zniszczenia, czyli dla jakich S_1 i S_2 $\tau^* = 1$. Stąd:

$$(3.14) \quad \beta S_1 + (1 - \beta) (\sqrt{S_1^2 + S_2^2} - S_1 S_2)^n = 1.$$

Na rys. 1. pokazano przykładowo krzywe graniczne dla $n = 1$ i $\beta = 0,5, 1,0$ a także dla $\beta = 1,5$ (tzn. $\sigma_c = 1,5 \sigma_1 - 0,5 \sigma_1$). W tym ostatnim przypadku otrzymuje się krzywą graniczną opisującą wzmocnienie materiału przy $\sigma_2 < 0$, co nie znajduje potwierdzenia doświadczalnego.



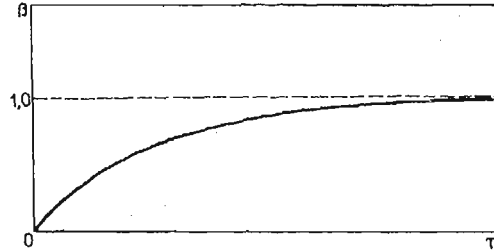
Rys. 1

Skonstruowane krzywe nie dotyczą III-ej ćwiartki układu σ_1, σ_2 , gdyż zgodnie z sugestią Kaczanowa propagacja uszkodzeń w płaskim stanie naprężenia zachodzi tylko wtedy gdy przynajmniej jedno z naprężeń głównych jest dodatnie (krzywe zniszczenia są otwarte).

Jak wynika z powyższych rozważań skalarna reprezentacja parametru uszkodzeń w postaci (3.1) daje możliwość opisu izochronicznych krzywych zniszczenia typu Galileusza i Hubera, a także krzywych pośrednich między tymi dwoma krzywymi granicznymi.

Zgodnie z uwagami z rozdz. 1, rozważana koncepcja nie daje jednak możliwości opisu transformacji izochronicznych krzywych zniszczenia. Aby to uzyskać musiałoby być

$\beta = \beta(t^*)$. Jakościowy charakter tej krzywej powinien być zgodny z pokazanym na rys. 2., jednak autorem nie są znane wyniki badań doświadczalnych potwierdzających ilościowo przebieg zależności $\beta(t^*)$.



Rys. 2

Skalarna reprezentacja parametru uszkodzeń może jednak być wykorzystana do opisu transformacji krzywych granicznych, jeśli przyjąć odpowiednie prawo propagacji uszkodzeń. W oparciu o [1], możliwość taką przedstawiono w pracy [10].

Założymy, że równanie kinetyki uszkodzeń ma postać:

$$(3.15) \quad \frac{d\omega}{dt} = f\left(\frac{\sigma_1}{1-\omega}\right) \frac{d\sigma_1}{dt} + g\left(\frac{\sigma_j}{1-\omega}\right),$$

gdzie:

ω — parametr uszkodzenia ($0 \leq \omega \leq 1$), σ_1 — intensywność naprężeń, σ_j — dodatnie, większe z dwu naprężeń głównych ($j = 1, 2$), t — czas.

Pierwszy składnik w prawej części wzoru dotyczy uszkodzeń niezależnych od czasu, drugi określa rozwój uszkodzeń związanych z procesami reologicznymi.

Dla procesów niezależnych od czasu o zniszczeniu decyduje wielkość działającego obciążenia, zatem zmiany parametru uszkodzeń opisuje tylko pierwszy człon tj. $f\left(\frac{\sigma_1}{1-\omega}\right)$. Dla bardzo dużych czasów zniszczenia o przyroście uszkodzeń decyduje druga z funkcji $g\left(\frac{\sigma_j}{1-\omega}\right)$, a wpływ pierwszej jest pomijalnie mały.

W oparciu o powyższe równanie kinetyki uszkodzeń, uwzględniające efekty zarówno natychmiastowe jak i zależne od czasu, zbadano możliwość transformacji krzywych izochronicznych w płaszczyźnie naprężeń głównych σ_1 i σ_2 dla różnych czasów zniszczenia.

W tym celu przyjęto do rozważań szczególną, potęgową postać funkcji f i g w formie:

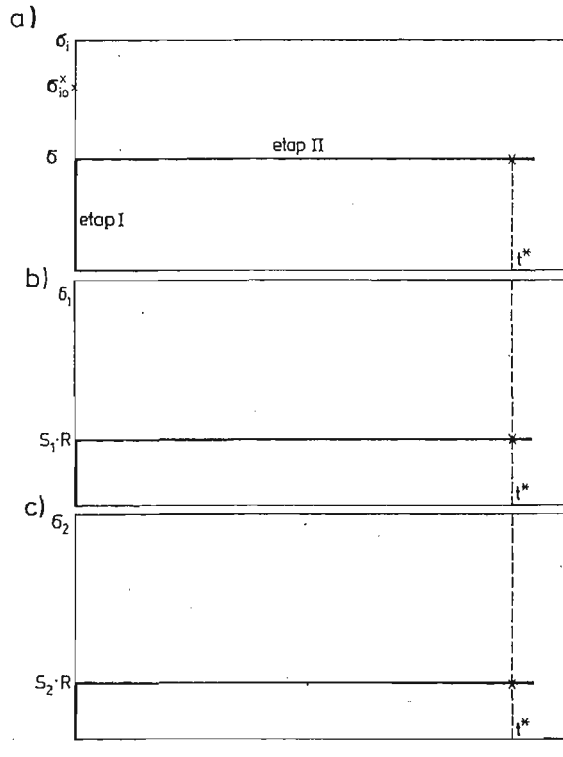
$$(3.16) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A_0 \left(\frac{\sigma_1}{\psi}\right)^{n_0} \frac{d\sigma_1}{dt} - A \left(\frac{\sigma_1}{\psi}\right)^n,$$

gdzie: ψ — parametr ciągłości ($1 \geq \psi \geq 0$)

σ_1 — intensywność naprężeń,

A_0, A, n_0, n — stałe materiałowe.

Przyjęto program obciążenia pokazany na rys. 3, według którego obciążenie działa w dwóch etapach.



Rys. 3

Dla wyznaczenia dowolnego punktu krzywej izochronicznej przyjęto program pokazany na rysunku 3a. Stałość intensywności naprężeń w drugim etapie jest przy tym zapewniona dzięki przyjęciu stałości zarówno σ_1 jak i σ_2 (Rys. 3b, 3c). Pary σ_1, σ_2 dobierano tak, aby dla każdej był spełniony warunek:

$$t^* = \text{const.}$$

Dzięki założeniu o natychmiastowym wzroście obciążenia do wartości σ_{i0} w etapie I do głosu nie dochodzą uszkodzenia reologiczne, których rozwój opisuje drugi składnik sumy w prawej stronie wzoru (3.16). W tym etapie całkowano więc równanie uproszczone (por. równanie (3.17)) wyznaczając wartość parametru ψ_0 , która stanowi warunek początkowy dla równania opisującego uszkodzenia w etapie II. Wobec założonego w etapie II $\sigma_i = \text{const.}$ jest $d\sigma_i/dt = 0$ i w konsekwencji całkować należy równanie (3.16) z pominięciem pierwszego składnika (por. równanie (3.20)).

Dla pierwszego etapu równanie kinetyki uszkodzeń ma więc postać:

$$(3.17) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A_0 \left(\frac{\sigma_i}{\psi} \right)^{n_0} \frac{d\sigma_i}{dt}.$$

Rozdzielając zmienne i całkując to równanie przy warunkach początkowych $\sigma_i = 0$ i $\psi = 1$ dla $t = 0$ otrzymujemy wartość parametru ciągłości ψ_0 dla intensywności naprężeń σ_{i0} :

$$(3.18) \quad \psi_0 = (1 - A_0 \sigma_{i0}^{n_0+1})^{\frac{1}{n_0+1}}$$

Oznaczając przez R wartość σ_{i0} dla której nastąpi zniszczenie natychmiastowe w jednoosiowym stanie naprężenia, otrzymamy następującą interpretację stałej materiałowej A_0 :

$$(3.19) \quad A_0 = \frac{1}{R^{n_0+1}}.$$

Rozwiązując równanie (3.16) dla $t > 0$ (tzn. gdy $d\sigma_i/dt = 0$):

$$(3.20) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_1}{\psi} \right)^n,$$

przy warunkach

$$(3.21) \quad \psi_0 \geq \psi \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

otrzymujemy:

$$(3.22) \quad \psi = [\psi_0^{n+1} - A(n+1)\sigma_1^n t] \frac{1}{n+1}.$$

Podstawiając tu za ψ_0 wyrażenie (3.18) otrzymujemy:

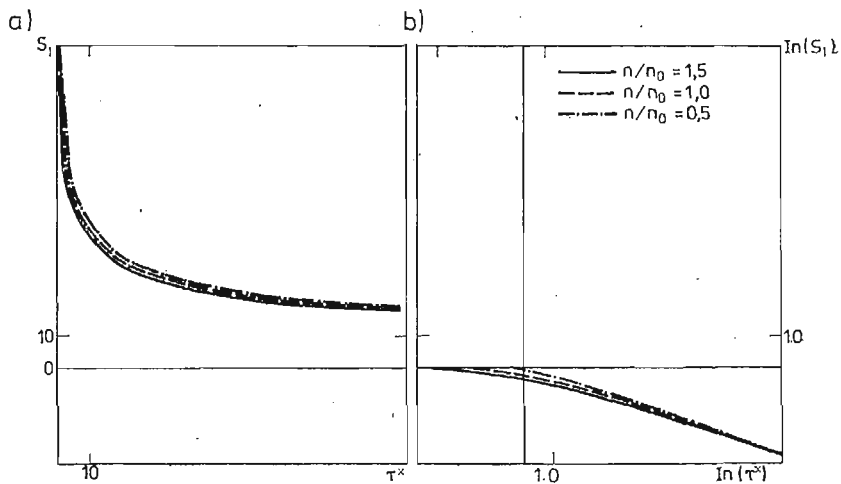
$$(3.23) \quad \psi = \left[(1 - A_0 \sigma_{i0}^{n_0+1}) \frac{n+1}{n_0+1} - A(n+1)\sigma_1^n t \right] \frac{1}{n+1}.$$

Po podstawieniu wielkości bezwymiarowych określonych przez (3.6) i (3.10) oraz oznaczając $\sigma_{i0} = S_{i0} \cdot R$ równanie (3.23) przyjmuje postać:

$$(3.24) \quad \psi = \left\{ \left[1 - \frac{1}{R^{n_0+1}} (RS_{i0})^{n_0+1} \right] \frac{n_0+1}{n+1} - (S_1 R)^n \tau \frac{1}{R^n} \right\} \frac{1}{n+1},$$

a po dokonaniu redukcji:

$$(3.25) \quad \psi = \left[(1 - S_{i0}^{n_0+1}) \frac{n_0+1}{n+1} - S_1^n \tau \right] \frac{1}{n+1}.$$



Rys. 4

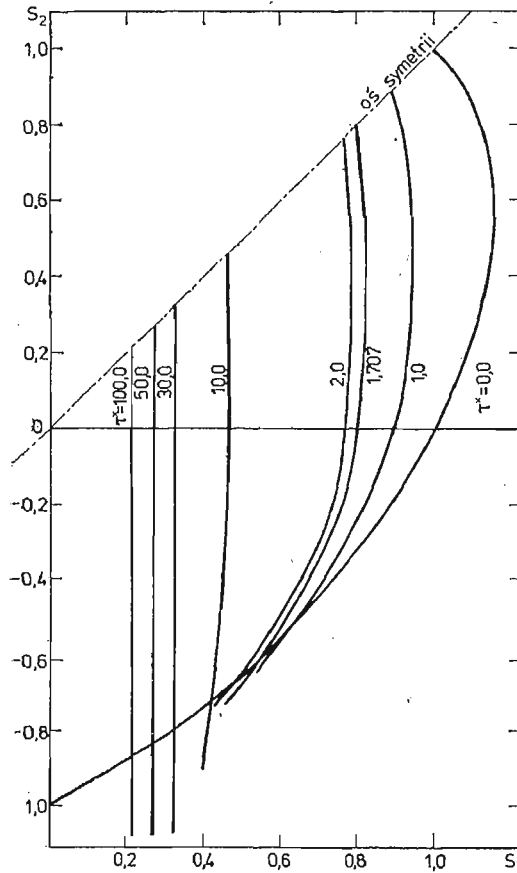
Dla $\psi = 0$ czas zniszczenia $\tau = \tau^*$ wyznaczamy z (3.25):

$$(3.26) \quad \tau^* = \frac{1}{S_1^n} [1 - S_1^{n_0+1}]^{\frac{n+1}{n_0+1}}$$

Na rys. 4a pokazano przebieg zależności $\tau^* = \tau^*(S_1)$ dla jednoosiowego stanu naprężenia ($S_1 = S_1$) przyjmując $n = 3$ i $n/n_0 = 0,5, 1, 1,5$. Na rys. 4b pokazano ten sam wykres w skali dwulogarytmicznej, częściej stosowanej dla przedstawienia tej zależności.

Dla opisu transformacji krzywych granicznych poszukiwać będziemy krzywych $S_1(S_2)$ opisanych związkami (3.26) przyjmując różne wartości τ^* .

Obliczenia przeprowadzono dla $n_0 = 6$, $n = 3$ oraz $\tau^* = 0, 1, 1,707, 2, 10, 30, 50, 100$ dla $S_1 > 0$ (I i IV ćwiartka), a uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5

Jak widać na podstawie uzyskanych wyników równanie kinetyki uszkodzeń w postaci (3.16) może być stosowane do opisu transformacji krzywych granicznych związanych z poziomem działających obciążeń. Otrzymane krzywe graniczne leżą pomiędzy skrajnymi przypadkami otwartego wieloboku Galileusza i elipsy Hubera.

4. Wektorowa reprezentacja parametru uszkodzeń

Analogiczne rozważania dotyczące postaci krzywych granicznych przeprowadzono dla wektorowej reprezentacji parametru uszkodzeń. Posłużono się tu równaniami kinetyki uszkodzeń przy pełzaniu dla przestrzennego stanu naprężenia zaproponowanymi przez KACZANOWA [7].

W jednoosiowym stanie naprężenia zgodnie z koncepcją KACZANOWA [7] kumulacja uszkodzeń ma charakter przestrzenny. Rozwój mikropęknięć w kierunku naprężenia σ_1 opisuje wzór:

$$(4.1) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n,$$

zaś w kierunkach prostopadłych do kierunku σ_1 zachodzą związki:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= \alpha \frac{d\psi_1}{dt}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= \alpha \frac{d\psi_2}{dt}, \end{aligned}$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$.

Dla $\alpha = 0$ zniszczenie ma charakter kierunkowy (tj. postępuje tylko w kierunku prostopadłym do σ_1) zaś przy $\alpha = 1$ jest równomierne w całej objętości.

Odpowiednie prawo rozwoju uszkodzeń w przestrzennym stanie naprężenia zaproponował KACZANOW [5] w postaci:

$$(4.2) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -A \left\{ \left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n + \alpha \left[\left(\frac{\sigma_2}{\psi_2} \right)^n + \left(\frac{\sigma_3}{\psi_3} \right)^n \right] \right\}.$$

Dla kierunków 2 i 3 analogiczne równania otrzymuje się przez cykliczną zmianę wskaźników tj.

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_2}{dt} &= -A \left\{ \left(\frac{\sigma_2}{\psi_2} \right)^n + \alpha \left[\left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n + \left(\frac{\sigma_3}{\psi_3} \right)^n \right] \right\}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= -A \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\psi_3} \right)^n + \alpha \left[\left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} \right)^n + \left(\frac{\sigma_2}{\psi_2} \right)^n \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dla płaskiego stanu naprężenia zagadnienia wyznaczenia izochronicznych krzywych granicznych, odpowiadających różnym wartościom współczynnika α , sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych typu (4.2) z warunkami brzegowymi na funkcję $\psi_i(t)$ w postaci:

$$(4.3) \quad \psi_i(0) = 1, \quad \psi_i(t^*) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

przy dodatkowym warunku, aby dla różnych par σ_1, σ_2 uzyskać ten sam czas zniszczenia t^* .

Używając zmiennych bezwymiarowych wprowadzonych w rozdz. 3 układ równań (4.2) w postaci:

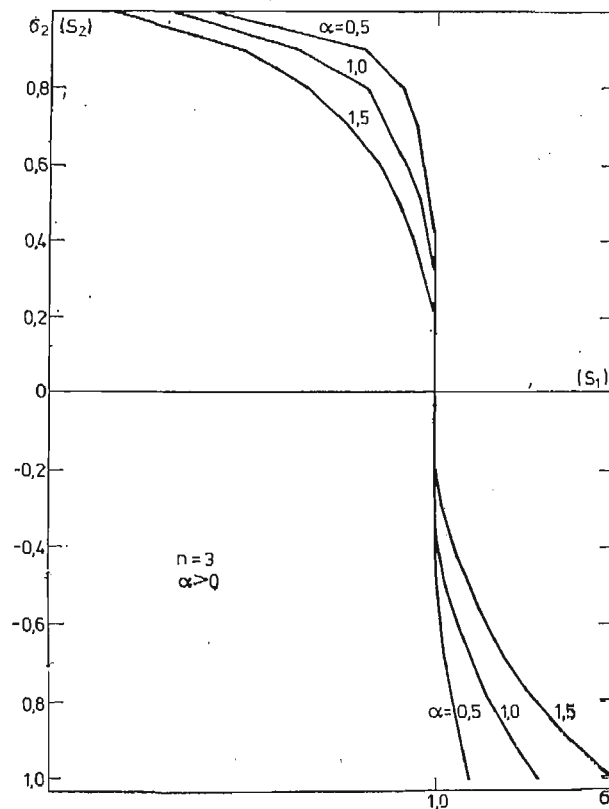
$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = -\frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{S_1}{\psi_1} \right)^n + \alpha \left(\frac{S_2}{\psi_2} \right)^n \right],$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_2}{d\tau} &= -\frac{1}{n+1} \left[\left(\frac{S_2}{\psi_2} \right)^n + \alpha \left(\frac{S_1}{\psi_1} \right)^n \right], \\ \frac{d\psi_3}{d\tau} &= -\frac{\alpha}{n+1} \left[\left(\frac{S_1}{\psi_1} \right)^n + \left(\frac{S_2}{\psi_2} \right)^n \right], \end{aligned}$$

naależy rozwiązać przy warunkach (4.3), oraz przy warunku dodatkowym, aby dla różnych S_2 tak zmienić S_1 by uzyskać czas zniszczenia taki jak dla jednoosiowego stanu naprężenia (tj. dla $\tau^* = 1$, $S_2 = 0$, $S_1 = 1$).

Powyższe zagadnienie sprowadza się zatem do wielokrotnego rozwiązywania układu równań różniczkowych (4.4) przy warunku (4.3) i wielokrotnego „wstrzeliwania się” wartością S_1 tak aby przy ustalonym S_2 zniszczenie nastąpiło w czasie $\tau^* = 1$.

Z uwagi na brak możliwości rozwiązań drogą analityczną, przy rozwiązywaniu zadania zastosowano przybliżone metody numeryczne (metoda Rungego-Kutty trzeciego rzędu do rozwiązywania układu równań różniczkowych, oraz metodę Newtona do poszukiwania żądanej wartości naprężenia S_1 [9]).

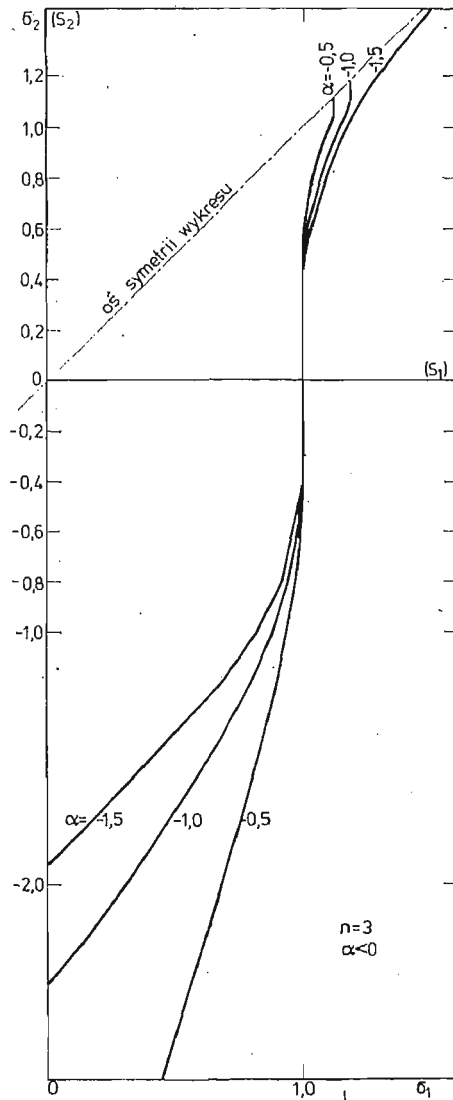


Rys. 6

Na rys. 6 pokazano postacie krzywych granicznych dla $n = 3$ i $\alpha > 0$. O ile ich przebieg w pierwszej ćwiartce może być niekiedy potwierdzony doświadczalnie [13], o tyle umoc-

nienie w IV ćwiartce nie jest obserwowane. Zbadano więc postać krzywych granicznych dla $\alpha < 0$, przyjmując jak poprzednio $n = 3$ lecz $\alpha = -0.5, -1.0$ i -1.5 . Uzyskane krzywe pokazano na rys. 7. Mają one charakter zbliżony do granicznych krzywych wg teorii największego wydłużenia de Saint-Venanta. Takie zachowanie się materiałów nie jest potwierdzone doświadczeniami jeśli chodzi o I ćwiartkę, natomiast jest zgodne z wynikami doświadczeń w ćwiartce IV-ej.

Układ równań (4.2) nie opisuje transformacji i dobór odpowiedniego prawa kinetyki uszkodzeń umożliwiający opis tego efektu jest celem dalszych prac autorów.



Rys. 7

5. Uwagi końcowe

Rozważone możliwości opisu kinetyki uszkodzeń w płaskim stanie naprężenia wskazują na konieczność stosowania rozszerzonego prawa uszkodzeń (3.15) dla opisu transformacji, izochronicznych krzywych granicznych. Dotyczy to zarówno skalarnej, jak i wektorowej reprezentacji parametru uszkodzeń. Wybór tej reprezentacji podyktowany musi być zgodnością uzyskanych krzywych granicznych z doświadczalnymi. W skalarnej reprezentacji parametru uszkodzeń możliwe jest jedynie wykorzystanie istniejących hipotez wyteżeniowych poprzez dobór odpowiedniego określenia naprężenia σ_e w (3.1).

Większą możliwość daje wektorowa reprezentacja. Rozważony układ równań różniczkowych (4.4) prowadzi do krzywych granicznych, które zbliżone są do doświadczalnych dla $\alpha > 0$ jeśli $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 > 0$, oraz dla $\alpha < 0$ jeśli $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 < 0$. Przyjęcie α dodatniego lub ujemnego dla dowolnych wartości σ_1 i σ_2 daje krzywe znacznie odbiegające od typowych wyników doświadczeń. Koniecznym jest więc poszukiwanie innego opisu kinetyki uszkodzeń, dającego zarazem możliwość opisu transformacji krzywych granicznych.

Użyte w niniejszej pracy równania kinetyki uszkodzeń są ważne jeśli przynajmniej jedno z naprężeń głównych jest dodatnie. Stąd dla rozważanego płaskiego stanu naprężenia nie ma możliwości zbudowania krzywych granicznych dla ujemnych wartości σ_1 i σ_2 . W przestrzennym stanie naprężenia, w zależności od kształtu powierzchni granicznej może ona przeciąć płaszczyznę σ_1 , σ_2 także i dla ujemnych ich wartości.

Literatura cytowana w tekście

1. M. CHRZANOWSKI, *Use of the damage concept in describing creep fatigue interaction under prescribed stress*, Inst. J. Mech. Sci. Vol. 18 pp. 69-73. Pergamon Press 1976.
2. A. DRAGON, *On phenomenological description of rock-like materials with account for kinetics of brittle fracture*, Arch. Mech. Stos., 28, 1, 13-1976.
3. D. R. HAYHURST, *Creep rupture under multi-axial states of stress*, J. Mech. Phys. Solids. 1972, Vol. 20 pp 381 to 390
4. D. R. HAYHURST, *Creep fracture of Materials and Structures. Lectures at Summer School on Fracture Mechanics Applied to Structural Analysis* Kraków, September 1977.
5. Л. М. КАЧАНОВ, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изд. А. Н СССР ОН, 1958.
6. Л. М. КАЧАНОВ, *Ползучесть и длительная прочность*, Труды Всесоюз. Совещ. по теории расчетов на ползучесть и длит. прочность 15-18 мая 1962, Новосибирск.
7. Л. М. КАЧАНОВ, *Некоторые вопросы разрушения в условиях ползучести*. Тр. Всес. Совещ. по расч. на ползуч. и прочн. Изд. Сиб. Отд. А. Н. СССР, 1963.
8. Л. М. КАЧАНОВ, *Время разрушения в условиях ползучести*, Проблемы механики сплошной среды, Изд. А. Н. СССР, Москва 1961.
9. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, Wyd. Nauk. Techn. W-wa 1974.
10. J. MADEJ, M. CHRZANOWSKI, *Transformacja izochronicznych krzywych zniszczenia w warunkach pelzania*, IPPT PAN Polska Konf. Mech. Ciała Stałego. Porąbka Kozubnik 3—11.IX.1978.
11. F. K. G. ODQVIST, J. HULT, *Some aspects of creep rupture*, Archiv for Fysik, 3525, January 1961.
12. St. PIECHNIK, M. CHRZANOWSKI, *Time of total creep rupture of a beam under combined tension bending*, Inst. J. Solids Structures 1970, Vol. 6, pp. 453 to 477.
13. Г. С. ПИСАБЕНКО, А. А. ЛЕБЕДЕВ, *Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложной напряженно-состоянии*, Изд. наук Думка, Киев 1969.
14. Y. N. RABOTNOW, *Creep rupture Applied Mechanics Proceedings of the twelfth International Congress of Applied Mechanics* Stanford University 1968.

15. В. Р. СДОБЫРЕВ, *Критерии длительной прогности для некоторых эластопрогных сплавов*. Изд. А. Н. СССР Мех. и машин. 6, 1959.
16. А. А. БАКУЛЕНКО, Л. М. КАЧАНОВ, *Континуальная теория сред с трещинами*, Мех. Тв. Тела, 4, 1971.
17. M. ŻYCZKOWSKI, J. SKRZYPEK, *Stationary creep and creep rupture of thick-walled tube under combined loading*, Proc. IUTAM Symp. Creep in Structures, Gothenburg 1970, Springer — V. 1972.

Р е з ю м е

ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ КРИВЫХ РАЗРУШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРА ПОВРЕЖДЕНИЙ

В работе рассматривается возможность построения изохронных кривых разрушения в условиях ползучести используя параметр повреждений введенный Л. М. Качановым [3]. Особенное внимание посвящено обсуждению применимости скалярной и векторной интерпретации параметра повреждений к описанию трансформации изохронных кривых в зависимости от величины времени до разрушения. Показано, что для этого необходимо введение обобщенного уравнения кинетики повреждений содержащего также член соответствующий повреждениям независимым от времени.

Лучшие результаты, получены для векторной репрезентации повреждений чем для скалярной, не соответствуют вполне экспериментальным данным и вопрос должен в дальнейшем быть исследован используя более сложные уравнения кинетики повреждений.

S u m m a r y

THE CONSTRUCTION OF FAILURE LIMIT CURVES BY MEANS OF A DAMAGE

A possibility to employ Kachanov's damage parameter [3] in constructing isochronous failure limit curves in creep conditions is evaluated. A scalar and vector representation of damages are verified to be used in revealing a phenomenon of changing a shape of these curves with time to rupture. It is shown that in this case it is necessary to use an extended law of damage kinetics containing a term responsible for time independent deterioration.

The results are better when vector representation of damages has been used, however further improvements to fit more accurately experimental results are necessary.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1978 roku.
