MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 19 (1981)

O JEDNOZNACZNOŚCI ZASADY NAJMNIEJSZEGO SKRĘPOWANIA (NAJMNIEJSZEGO PRZYMUSU) GAUSSA

N. CYGANOWA (TUŁA)

W pracy P. STÄCKELA [1] zawarty jest ścisły dowód jednoznaczności zasady Gaussa dla układów z przytrzymującymi (udierziwajuszczimi) i nieprzytrzymanymi (nieudierziwajuszczimi) holonomicznymi i liniowymi nieholonomicznymi więzami pierwszego rzędu i zbadane są przypadki osobliwe.

Przy założeniu regularności położenia układu istnieje jeden i tylko jeden układ przyspieszeń, który dla danego stanu ruchu spełnia zasadę najmniejszego skrępowania.

Rozpatrzmy dowód Stäckela dla układu z więzami przytrzymanymi. Niech układ „n" punktów materialnych jest związany „k" holonomicznymi więzami

$$f_\mu(x_i, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

z których dla prędkości w postaci wynikają warunki

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, k), \tag{2}$$

i „l" liniowymi nieholonomicznymi więzami pierwszego rzędu

$$\sum_{i=1}^{3n} \varphi_{\lambda_i}(x_i, t)\dot{x}_i + \varphi_{\lambda_0}(x_i, t) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l). \tag{3}$$

Położenie (x_i) układu nazywamy regularnym jeśli równania (2) i (3) stanowią razem układ $m = k+l$ równań liniowych względem rzutów prędkości

$$\sum_{i=1}^{3n} F_{\varrho_i}(x_i, t)\dot{x}_i + F_{\varrho 0}(x_i, t) = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

przy czym co najmniej jeden z wyznaczników m — rzędu macierzy (F_{ϱ_i}) różny jest od zera, w przeciwnym przypadku położenie nazywamy osobliwym.
Różniczkując równania (4) względem czasu otrzymujemy liniowe równania względem rzutów przyspieszenia

$$\sum_{i=1}^{3n} F_{\varrho_i}(x_i, t)\ddot{x}_i + H_\varrho(x_i, \dot{x}_i, t) = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

gdzie $H_\varrho(x_i, \dot{x}_i, t)$ są funkcjami drugiego stopnia względem $\dot{x}_i$.

Przy położeniu osobliwym przynajmniej jedno z równań (5) jest zastąpione równaniem drugiego lub wyższego stopnia względem przyspieszeń.

Z równań (5) można określić „m" składowych przyspieszeń jako liniowe funkcje pozostałych $3n-m$ składowych. Dalej, w celu określenia przyspieszenia układu punktów przy istnieniu więzów i sił rzeczywistych, przytacza się jedną z zasad mechaniki analitycznej.

Zgodnie z zasadą Gaussa przyspieszenia rzeczywiste określa się z warunku minimum skrępowania

$$Z(\ddot{x}_i) = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i}(m_i\ddot{x}_i - X_i)^2.$$

przy uwzględnieniu warunków (5) dla przyspieszeń.

Istnienie minimum funkcji Z wynika z jej dodatniej określoności. W dowodzie korzystamy z faktu, że dla regularnego położenia układu, skrępowanie charakteryzuje się jednym minimum, inaczej mówiąc, że zasada Gaussa przy tym istotnym ograniczeniu określa ruch jednoznacznie.

Niech Z określa minimum dla wartości przyspieszeń $\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i$. Wówczas spełniona jest nierówność $Z(\ddot{\xi}_i + u_i) > Z(\ddot{\xi}_i)$ dla wszystkich dostatecznie małych układów wartości u_i takich, dla których odpowiednie wartości przyspieszeń $\ddot{\xi}_i + u_i$ spełniają warunki (5), tzn. spełniających warunki

$$\sum_{i=1}^{3n} F_{\varrho_i} u_i = 0, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Z równań (6) wynika, że jeśli układ wartości u_i jest dopuszczalny, to dopuszczalny jest również układ wartości $U_i = gu_i$, gdzie g jest dowolną dodatnią lub ujemną liczbą. Z tego powodu i z równości

$$Z(\ddot{\xi}_i + U_i) = Z(\ddot{\xi}_i) + \sum_{i=1}^{3n} m_i U_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3n} (m_i\ddot{\xi}_i - X_i)U_i, \tag{7}$$

wynika, że

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i\ddot{\xi}_i - X_i)u_i = 0, \tag{8}$$

dla dostatecznie małych dopuszczalnych wartości u_i. Oczywiście równanie (8) spełnione będzie również dla dowolnych dopuszczalnych wartości u_i.

Założymy, że skrępowanie osiąga minimum również dla wartości przyspieszeń $\ddot{x}_i = \ddot{\eta}_i$. Różnice $\ddot{\eta}_i - \ddot{\xi}_i$, jak łatwo zauważyć, spełniają warunki (6) i mogą być przyjęte za dopuszczalne wartości wielkości u_i, tzn. można przyjąć $\ddot{\eta}_i = \ddot{\xi}_i + u_i$. Wówczas z równania (7) wynika, że $Z(\ddot{\eta}_i) > Z(\ddot{\xi}_i)$. Zatem, założenie istnienia dwóch minimów skrępowania doprowadziło do sprzeczności.

Jednoznaczność zasady Gaussa zostaje naruszona przy osobliwym położeniu układu. Jeden taki osobliwy przypadek bada dokładnie Stäckel.

Punkt materialny o masie jednostkowej porusza się po powierzchni stożka

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \tag{9}$$

Z równania więzów (9) wynikają warunki

$$(10) \qquad x\dot{x}+y\dot{y}-z\dot{z} = 0, \quad x\ddot{x}+y\ddot{y}-z\ddot{z}+\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{z}^2 = 0,$$

$$(11) \qquad x\delta x+y\delta y-z\delta z = 0,$$

które są spełnione przez prędkości, przyspieszenia i wirtualne przesunięcia punktu.

Niech w chwili t punkt materialny znajduje się w stanie spoczynku na górze stożka. W tym osobliwym położeniu równanie (11), określające wirtualne przemieszczenia, nie nakłada na nie żadnych ograniczeń, tzn. jest nieprzydatne. Wirtualne przemieszczenia dla osobliwego położenia należy określić oddzielnie. Określając jako takie, które przeprowadzają punkt materialny z danego położenia w drugie położenie zgodne z więzami, otrzymujemy warunek

$$(12) \qquad (\delta x)^2+(\delta y)^2-(\delta z)^2 = 0.$$

Warunek (10) dla przyspieszeń w położeniu osobliwym również jest nieprzydatny. Łatwo zauważyć, że dla rzutów przyspieszeń na górze stożka powinien być spełniony warunek

$$(13) \qquad \ddot{x}^2+\ddot{y}^2-\ddot{z}^2 = 0,$$

gdyż punkt materialny może oczywiście pozostawać tylko wtedy na górze stożka, gdy na początku ruchu wektor przyspieszenia leży na jego powierzchni.

Zasada przemieszczeń wirtualnych łącznie z zasadą d'Alamberta tutaj oczywiście jest nieważna, ponieważ warunek (12) dla przemieszczeń wirtualnych jest nieliniowy. Jednakże zasada najmniejszego skrępowania daje możliwość określenia ruchu aczkolwiek niejednoznacznie.

Znajdziemy minimum skrępowania $Z = (\ddot{x}-X)^2+(\ddot{y}-Y)^2+(\ddot{z}-Z)^2$ przy warunku (13). Otrzymamy dwa rozwiązania, co również jasno wynika z przedstawienia geometrycznego. Skrępowanie Z geometrycznie oznacza odległość między dwoma punktami $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ i (X, Y, Z), a określenie minimum skrępowania przy uwzględnieniu warunku (13) sprowadza się do znalezienia najmniejszej odległości punktu (X, Y, Z) od powierzchni stożka. Rozwiązanie dadzą dwa punkty na powierzchni stożka. Odcinki od wierzchołka stożka do obydwu punktów dają wielkość i kierunek poszukiwanego przyspieszenia. Odcinki te leżą na prostych otrzymanych przy przecięciu powierzchni płaszczyzną, przechodzącą przez oś stożka i wektor siły.

Rozpatrzony sposób określenia przyspieszeń jest nieprzydatny tylko w tym przypadku, gdy wektor siły znajduje się na osi stożka. W każdym bądź razie jest jasne, że w przypadku położenia osobliwego można stosować tylko zasadę Gaussa.

Jeśli idzie o niejednoznaczność w przypadku osobliwym, Stäckel zauważa: „Nieprawidłowe było by odrzucenie zasady mechaniki z tego powodu, że przy znanych warunkach przyspieszenie jest niejednoznacznie określone. Przyczyna może tkwić w postawieniu zadania. Ruch zachodzący w pobliżu wierzchołka stożka nie może być mechanicznie określony. Tutaj przyjęta jest niedopuszczalna idealizacja" [1, s. 10]. Przykład Stäckela rozpatruje także Nordheim traktując go bardziej szczegółowo [2, s. 66]. Z przykładu widać, że dla położenia osobliwego zasada wirtualnych przemieszczeń wspólnie z zasadą d'Alamberta nie są równoważne zasadzie Gaussa, zasada Gaussa daje możliwość określenia przyspieszenia, chociaż nie jednoznacznie, natomiast pierwsza z wymienionych zasad nie może być w ogóle zastosowana. Wynika stąd, że dla osobliwego położenia zasady najmniejszego skrępowania nie można otrzymać z zasady dopuszczalnych przemieszczeń i zasady d'Alamberta. Zasadę Gaussa dla położenia osobliwego przyjmuje się jako aksjomat.

Jednoznaczność zasady Gaussa dla więzów nieprzytrzymanych udowadnia się analogicznie.
Niech oprócz holonomicznych i nieholonomicznych więzów (1) i (3), nałożonych na układ, działają dodatkowo holonomiczne i nieholonomiczne nieprzytrzymane więzy

$$g_{\mu'}(x_i, t) \geqslant (\mu' = 1, 2, \ldots, k'), \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} \psi_{\lambda'_i}(x_i, t)x_i + \psi_{\lambda'_0}(x_i, t) \geqslant 0, \quad (\lambda' = 1, 2, \ldots, l') \tag{15}$$

Założymy, że dla danego stanu ruchu w chwili t współrzędne prędkości spełniają s równań

$$\sum_{i=1}^{3n} v_{\sigma_i}(x_i, t)\dot{x}_i + v_{\sigma_0}(x_i, t) = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, s; \ s = k'+l'), \tag{16}$$

wywodzących się z więzów (14) i (15).

Położenie (x) układu w chwili t nazywamy regularnym, jeśli przy pomocy równań (16) i (4) $m+s$ rzutów prędkości może być przedstawionych jako liniowe funkcje pozostałych $3n-m-s$ rzutów prędkości. Rzuty przyspieszeń spełniają (5) i warunki

$$\sum_{i=1}^{3n} v_{\sigma_i}(x_i, t)\ddot{x}_i + K_\sigma(x_i, \dot{x}_i, t) \geqslant 0, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, s), \tag{17}$$

odpowiadające równościom (16), które są spełnione przez prędkości punktów w rozpatrywanej chwili ruchu.

Twierdzenie o jednoznaczności zasady Gaussa dla nieprzytrzymanych więzów ma miejsce także przy założeniu regularności położenia. W przestrzeni euklidesowej R_{3n} wielkości $\ddot{x}_i$, skrępowanie Z dla części przestrzeni, zawierającej punkty $\ddot{x}_i$, spełniające wspomniane warunki (5) i (17), jest ciągła funkcją punktu, dodatnio określoną i dlatego osiąga przynajmniej w jednym punkcie wartość minimalną.

Założenie regularności położenia nie jest w tym przypadku konieczne, jest ono istotne dla dowodu jednoznaczności zasady. Niech wartość minimalna skrępowania jest osiągnięta dla wartości przyspieszeń $\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i$, stąd dla wszystkich dostatecznie małych dopuszczalnych wartości układów (u_i) ma miejsce nierówność

$$Z(\ddot{\xi}_i + u_i) > Z(\ddot{\xi}_i).$$

Ponieważ

$$Z(\ddot{\xi}_i + u_i) = Z(\ddot{\xi}_i) + \sum_{i=1}^{3n} m_i u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i)u_i,$$

wynika stąd, że dla dostatecznie małych dopuszczalnych układów wartości u_i spełniony jest warunek

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{\xi}_i - X_i)u_i \geqslant 0, \tag{18}$$

W przypadku regularnego położenia układu można pokazać, że warunek (18) spełniony jest także przy dowolnych dopuszczalnych układach wartości u_i. I rzeczywiście, wartości $\ddot{\xi}_i$ spełniają warunek (17), tzn.

$$\sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i}\ddot{\xi}_i+K_\sigma \geqslant 0.$$

Wartości wielkości u_i są dopuszczalne, jeśli odpowiadające im wartości przyspieszeń $\ddot{\xi}_i+u_i$ spełniają warunki (17), tzn. dla dopuszczalnych układów wartości u_i spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i}\ddot{\xi}_i+\sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i}u_i+K_\sigma \geqslant 0. \tag{19}$$

Łatwo udowodnić, że jeśli układ wartości u_i jest dopuszczalny, to dopuszczalny jest także układ wartości Θu_i, gdzie $0 < \Theta < 1$. Jeżeli układ u_i jest dopuszczalny, to spełnia on związek (19), ale wówczas, jak łatwo zauważyć, spełniony jest związek

$$\sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i}\ddot{\xi}_i+\Theta\sum_{i=1}^{3n} V_{\sigma_i}u_i+K_\sigma \geqslant 0. \tag{20}$$

Wielkości Θ można przyjąć na tyle małe, że warunek (18) będzie spełniony dla wielkości Θu_i, tzn. będzie spełniona nierówność

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i\ddot{\xi}_i-X_i)\Theta u_i \geqslant 0$$

z której wynika dla $\Theta > 0$ spełnienie nierówności

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i\ddot{\xi}_i-X_i)u_i \geqslant 0,$$

dla dowolnych dopuszczalnych wartości u_i.

Przy pomocy tej nierówności łatwo można teraz udowodnić jednoznaczność zasady Gaussa, przeprowadzając rozważania analogiczne do tych, przy których pomocy dowodziło się jednoznaczność zasady dla więzów przytrzymanych.

W pracy P. Stäckela podano również geometryczny dowód jednoznaczności zasady Gaussa.

Podstawiając

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}}(m_i\ddot{x}_i-X_i),$$

skrępowanie

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i}(m_i\ddot{x}_i-X_i)^2 = \sum_{i=1}^{3n} y_i^2$$

można traktować jako kwadrat odległości punktu $3n$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej R_{3n} od początku układu współrzędnych. Warunki (5), które spełnione są przez rzuty przyspieszeń w przypadku więzów przytrzymanych (1) i (3) zapiszą się w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{m_i}} F_{\varrho_i} y_i + \overline{H}_\varrho = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, m). \tag{21}$$

Warunki (21) wydzielają w przestrzeni euklidesowej R_{3n} podprzestrzeń euklidesową R_{3n-m}. Zasada najmniejszego skrępowania wymaga wyznaczenia punktu tej podprzestrzeni, znajdującego się najbliżej początku układu współrzędnych.

Z teorii wielowymiarowych przestrzeni euklidesowych wiadomo, że szukana najmniejsza odległość jest prostopadłą z początku układu współrzędnych do podprzestrzeni R_{3n-m}, oraz że istnieje jedna i tylko jedna taka prostopadła.

Wykorzystując geometryczną interpretację, Sätckel rozpatruje potem określenie przyspieszeń przy pomocy zasady najmniejszego skrępowania w przypadku ogólnym, gdy występują wśród więzów nieprzytrzymane więzy.

Przy założeniu regularności położenia układu mają miejsce liniowe związki pomiędzy wielkościami y_i, odpowiadające równaniom (5)

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{\varrho_i} y_i + A_{\varrho_0} = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, m) \tag{22}$$

i nierówności

$$\sum_{i=1}^{3n} B_{\sigma_i} y_i + B_{\sigma_0} \geqslant 0, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s), \tag{23}$$

odpowiadające warunkom (17).

Równania (22) wyznaczają w przestrzeni euklidesowej R_{3n} podprzestrzeń euklidesową R_{3n-m}, a nierówności (23) wyznaczają w tej ostatniej jednospójny wypukły obszar S_N, ograniczony podprzestrzeniami euklidesowymi $N-1$, $N-2, \dots, 2$, 1 — wymiarowymi, przy czym $N = 3n-m$. Określenie przyspieszeń przy pomocy zasady najmniejszego skrępowania sprowadza się zatem do zadania geometrycznego:

Przez liniowe równania i nierówności wyznaczony został obszar w przestrzeni euklidesowej. Należy określić najmniejszą jej odległość od danego punktu przestrzeni. Przy wyznaczaniu najmniejszej odległości to, że istnieje tylko jedna taka najmniejsza odległość wykazano analitycznie; spotykamy dwa takie przypadki.

Dany jest punkt O, początek układu współrzędnych, może należeć do obszaru S_N włącznie z granicą, wówczas najmniejsza odległość dotyczy samego punktu O. Punkt O może leżeć na zewnątrz obszaru S.
Niech OT — prostopadła do podprzestrzeni R_N, do której należy S_N, wówczas OT — jest najmniejszą odległością punktów R_N od O.

Jeśli punkt T należy do obszaru S_N, to OT także jest szukaną najmniejszą odległością.

W tym przypadku punkt T leży na granicy obszaru S_N i przestrzeni R_{3n}. Jeśli punkt T nie należy do obszaru S_N to minimum odległości występuje dla pewnego punktu A, różnego od T. Punkt A leży na granicy obszaru S_N i podprzestrzeni R_N.

Zagadnienie jednoznaczności zasady najmniejszego skrępowania zostało dalej rozwinięte i zbadane przez A. PRZEBORSKIEGO [3].

W odróżnieniu od badań Stäckela, który ograniczał się do idealnych holonomicznych i liniowych nieholonomicznych więzów pierwszego rzędu, Przeborski przeprowadził badanie zasady Gaussa dla najbardziej ogólnego przypadku holonimicznych i nieholonomicznych więzów z tarciem. A. Przeborski sformułował zasadę Gaussa w postaci obejmującej wszystkie przypadki fizycznej realizacji więzów:

„Przy każdej fizycznej realizacji więzów, w każdym momencie czasu, w którym położenie układu jest regularne, ruch układu odbywa się w taki sposób, że odpowiadające wymuszenie osiąga wartość minimalną przy założeniu, że przyspieszenie spełnia warunki, nałożone więzami analitycznymi" [3, s. 285]. W „Wykładach" Przeborskiego spotykamy się z prawidłowym rozpatrzeniem zasady najmniejszego skrępowania z uwzględnieniem regularności układu.

Literatura cytowana w tekście

1. P. STÄCKEL, *Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges Heidelberg*, 1919.
2. L. NORDHEIM, *Die Prinzipe der Dynamik.-Handbuch der Physic*, V. 5, Leipzig, 1927.
3. A. PRZEBORSKI, *Wykłady mechaniki teoretycznej*, t. 2. Warszawa, 1935.

Резюме

ОБ ОДНОЗНЕЧНОСТИ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ГАУССА

Немецкому ученому П. Штекелю принадлежит исследование однозначности принципа Гаусса для систем с удерживающими и неудерживающими идеальными голономными и линейными неголономными связями первого порядка. Для регулярного положения системы принцип Гаусса определяет движение однозначно, в сингулярном случае — неоднозначно. Дальнейшее развитие этот вопрос получил в исследовании А. Пшеборского. Пшеборский провел исследование принципа Гаусса для самого общего случая голономных и неголономных связей с трением.

Summary

ON UNIQUENESS OF GAUSS' LEAST CONSTRAINT PRINCIPLE

A German scholer P. Stäckel has investigated the uniqueness of Gauss' principle for a system with restrained and nonrestrained ideal holonomic and linear nonholonomic constraints of the first order. For a regular position of a system the Gauss' principle determines the motion uniquely, while in a singular case non-uniquely. The subsquent development of the problem can be traced in A. Przeborski's papers who has investigated Gauss' principle for the most general case of holonomic and nonholonomic constraints with friction.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1980 roku.