

O PEWNYM MATEMATYCZNYM MODELU PROCESU KOLMATACJI WYMIAROWEJ
W SZCZELINACH I JEGO ZASTOSOWANIU

KRZYSZTOF CIEŚLICKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Spośród wielu różnorodnych metod pomiaru zawartości zanieczyszczeń stałych w cieczach coraz więcej uwagi poświęca się metodom kolmatacyjnym. Wykorzystują one zjawisko kolmatacji wymiarowej tzn. zatrzymywania cząstek zawiesiny przepływającej przez przegrodę porowatą wskutek różnic wymiarowych cząstek i porów. W kolmatomierzu — przyrządzie pomiarowym — rolę ośrodka porowatego spełnia szczelina o sztywnych i nieprzepuszczalnych ściankach i o wysokości zbliżonej do wymiarów występujących w cieczy cząstek. U podstaw pomiaru metodą kolmatacyjną liczby i składu granulometrycznego cząstek leży związek pomiędzy parametrami hydrodynamicznymi przepływu zawiesiny (spadek ciśnienia, natężenie przepływu), a parametrami charakteryzującymi rozkład wymiarowy cząstek. Dotychczas, ze względu na złożoność zjawisk, nie podano ścisłego modelu analitycznego wiążącego te wielkości. W istniejącym modelu, prezentowanym w pracach [1, 2] uproszczono opis matematyczny procesu kolmatacji

- przypisując szczelinie posiadanie cech idealnego filtra dolno-przepustowego o niezmiennej w czasie charakterystyce filtrowania (tzn. szczelina zatrzymuje tylko cząstki większe od wysokości szczeliny);
- całkowitemu zatkaniu szczeliny przyporządkowując stałą liczbę cząstek zatrzymanych, równą ilorazowi szerokości szczeliny — L_0 przez jej wysokość — h (L_0/h), niezależnie od rozkładu wymiarowego cząstek.

Dzięki tak sformułowanym założeniom uzyskano nieskomplikowaną zależność łączącą intensywność zatrzymywania cząstek z ilością cząstek już zatrzymanych. Ma ona postać [2]:

$$(1) \quad \frac{dP(t)}{dt} = K \cdot z_h [A - P(t)],$$

gdzie: $P(t)$ — liczba cząstek większych od wysokości h szczeliny w chwili t

z_h — koncentracja cząstek większych od wysokości h szczeliny w cieczy doprowadzonej do jej wejścia

A — graniczna „pojemność” szczeliny równa ilorazowi L_0/h

K — stała zależna od geometrii szczeliny i warunków przepływu zawiesiny

i jest analogiczna z zależnością opisującą w ujęciu fenomenologicznym kinetykę procesu kolmatacji w ośrodkach porowatych [6]. Pomiedzy zadaniami kolmatomierza, a założeniami modelu na którym pomiar się opiera uwidacznia się pewna niekonsekwencja. Otóż

celem pomiaru jest określenie m.in. rozkładu granulometrycznego cząstek zdyspergowanych w cieczy, z drugiej strony model nie ujmuje parametru charakteryzującego ten rozkład. Prosta struktura analitycznego wzoru (1) okupiona została zmniejszeniem wierności opisu zaznaczającym się wyraźnie w przypadkach, gdy do szczeliny napływają cząstki znacznie większe od wysokości szczeliny oraz w końcowych fazach procesu (tzn. gdy w szczelinie znajduje się już dużo cząstek zatrzymanych). Zastosowanie zależności (1) dla potrzeb opisu kinetyki kolmatacji w ośrodkach porowatych także nie oparło się próbie kolejnych, dokładniejszych eksperymentów i została ona zmieniona [7]. Okazało się bowiem, że intensywność zatrzymywania cząstek w porach $\frac{\partial P(t)}{\partial t}$ nie jest, jak zakładano liniowo opadająca, początkowo rośnie, aż do osiągnięcia pewnego maksimum. Przy czym dalsze malenie wynika ze zmniejszającej się intensywności dopływu cząstek związanej z malejącą przepuszczalnością ośrodka.

W znanych pracach brak jest prostych modeli uwzględniających wpływ rozkładu wymiarowego cząstek zawiesiny na przebieg procesu i uzasadniających zmienną w czasie efektywność procesu kolmatacji zachodzącego w szczelinach. Problem ten rozważano w pracy [3], gdzie w wyniku otrzymano stochastyczny proces markowowski jako model zależności odpowiednich parametrów fizycznych od czasu. Jednak jego stopień skomplikowania znacznie utrudnia uzyskanie dostatecznie przejrzystych rozwiązań.

W niniejszej pracy przedstawiono model, który jest znacznie prostszy a przy tym uwzględnia mechanizm odpowiedzialny za zmienność charakterystyk filtrowania szczeliny oraz parametry rozkładu wymiarowego cząstek.

2. Matematyczny model procesu kolmatacji

Przepływ cieczy dwufazowej przez szczelinę i towarzyszący mu proces kolmatacji wymiarowej potraktowano w modelu jako przepływ cieczy jednorodnej przez obszar o zmiennej strukturze geometrycznej. W chwili początkowej struktura obszaru przepływowego jest znana i określona przez charakterystyczne wymiary szczeliny: L_0 — szerokość, h — wysokość, m — długość, spełniających relacje:

$$(2) \quad h \ll L_0, \quad m = O(h).$$

Przyjmijmy, że ciecz dwufazowa ma postać zawiesiny cząstek stałych równomiernie zdyspergowanych w jednorodnej, nieściśliwej cieczy lepkiej, a koncentracja cząstek jest na tyle mała, że ich wzajemne oddziaływanie można pominąć. Podstawą modelu jest założenie, że cząstki zatrzymane w szczelinie mogą dzielić, początkowo jednospójny, obszar szczeliny D na rozłączne segmenty — a zatem zwiększać rząd spójności tego obszaru, lub też eliminować segmenty — czyli zmniejszać rząd spójności. Podział lub eliminacja segmentów wynika z relacji wzajemnych wymiarów cząstek i segmentów i zmienia się w czasie trwania procesu. W każdej chwili przepływ cieczy odbywa się zatem przez pewien obszar będący skończoną sumą rozłącznych obszarów jednospójnych. Niech każdy z segmentów charakteryzuje pewna liczba rzeczywista x będąca realizacją zmiennej X . Podobnie, każdą cząstkę przybywającą do obszaru przepływowego opisuje jej wymiar cha-

rakterystyczny y będący realizacją zmiennej Y . Chwilowy stan szczeliny opisuje para liczb \bar{C} i \bar{L} oznaczających odpowiednio wartość średnią liczby segmentów obszaru D oraz wartość średnią sumy wymiarów segmentów. Zmienną niezależną jest średnia objętość V cieczy jaka przepływa przez szczelinę. Ponieważ cząstki fazy drugiej są równomiernie wymieszane w fazie pierwszej, to objętość cieczy, która przepłynęła przez szczelinę jednoznacznie wyznacza skład cząstek, które znalazły się w jej otoczeniu. Jeśli do obszaru D przybywa cząstka o wymiarze charakterystycznym y to jeśli przybyła do segmentu o wymiarze charakterystycznym x zachodzi jedno z następujących zdarzeń:

- cząstka ulega zatrzymaniu, zaś suma wymiarów charakterystycznych segmentów zmniejsza się o y , o ile $h \leq y < x$; jednocześnie rząd spójności obszaru szczeliny wzrasta o 1;
- cząstka ulega zatrzymaniu, zaś suma wymiarów segmentów zmniejsza się o x , o ile $x \leq y$; jednocześnie rząd spójności obszaru maleje o 1;
- cząstka nie zostaje zatrzymana, suma wymiarów segmentów nie zmienia się o ile $y < h$ i $y < x$; rząd spójności obszaru pozostaje stały.

Oznaczmy przez $P_{\bar{C}\bar{L}}(x, y)$ rozkład łączny zmiennych X, Y . Za podstawową informację o funkcjach $\bar{C}(V)$ oraz $\bar{L}(V)$ przyjmuje się w świetle przedstawionych założeń następujący układ równań różniczkowych:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{C}(V)}{dV} &= N \left[\int_{h \leq y < x} dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) - \int_{x \leq y} dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) \right], \\ \frac{d\bar{L}(V)}{dV} &= -N \left[\int_{h \leq y < x} y dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) + \int_{x \leq y} x dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y) \right], \end{aligned}$$

gdzie: N — koncentracja cząstek zawiesiny.

Występujące po prawych stronach układu równań (3) całki Riemanna-Stieltjesa względem łącznego rozkładu zmiennych X, Y mają prostą interpretację. W pierwszym równaniu określają zależny od \bar{L} i \bar{C} względny udział cząstek zawiesiny, których przybycie do obszaru wlotowego szczeliny spowoduje odpowiednio wzrost, lub zmniejszenie o jeden liczby segmentów na które szczelina była podzielona przed ich przybyciem. W drugim równaniu określają wartość średnią zmiany sumy wymiarów segmentów, pod warunkiem, że przybycie cząstki spowodowało odpowiednio wzrost lub zmniejszenie o jeden liczby segmentów szczeliny. Przyjmujemy dalej, że wymiar cząstki- y nie zależy od wymiaru charakterystycznego segmentu- x , do którego cząstka przybyła. Jest to równoznaczne z założeniem niezależności zmiennych X i Y . Wówczas rozkład łączny $P_{\bar{C}\bar{L}}(x, y)$ jest produktem dwu rozkładów $f(x)$ i $g(y)$. W niniejszej pracy przyjęto, że są to rozkłady wykładnicze o gęstościach:

$$(4) \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{\bar{C}}{L} \exp \left\{ -\frac{\bar{C}}{L} x \right\} & \text{dla } x > 0 \\ g(y) &= \kappa \exp \{ -\kappa y \} & \text{dla } y > 0 \end{aligned}$$

gdzie κ oznacza parametr rozkładu wykładniczego zmiennej Y .

Rozkład wykładniczy $g(y)$ jest jednym ze stosowanych do aproksymacji rozkładu wymiarów charakterystycznych cząstek zanieczyszczeń w cieczach roboczych układów hydraulicznych. Idea przyjęcia funkcji wykładniczej dla opisu wymiarów charakterystycznych

segmentów powstała przez analogię z asymptotycznym — wykładniczym rozkładem odległości między punktami rzucanymi równomiernie na odcinek [5]. Ze względu jednak na różny od zera wymiar cząstek, jako wartość średnią rozkładu $f(x)$ przyjęto parametr zmienny, będący ilorazem wielkości $\bar{L}(V)$ i $\bar{C}(V)$.

Przyjęcie gęstości łącznej $dP_{\bar{C}\bar{L}}(x, y)$ w postaci iloczynu funkcji na płaszczyźnie R_2^+ pozwala przedstawić odpowiednie całki Riemanna-Stieltjesa w postaci całek iterowanych:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{C}(V)}{dV} &= N\kappa \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \left[\int_h^\infty \int_y^\infty \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy \right] \\ \frac{d\bar{L}(V)}{dV} &= -N\kappa \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \left[\int_h^\infty \int_y^\infty y \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \int_x^\infty x \exp\left\{-\frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)}x\right\} \exp\{-\kappa y\} dx dy \right]. \end{aligned}$$

A po przekształceniu prawych stron (5) otrzymamy następujący nieliniowy układ równań różniczkowych:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{C}(V)}{dV} &= N \left(\kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right)^{-1} \left(\kappa \exp\left\{-h \left[\kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right]\right\} - \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right), \\ \frac{d\bar{L}(V)}{dV} &= -N \left(\kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right)^{-2} \left(\kappa \left[1 + h \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} + \kappa h \right] \exp\left\{-h \left[\kappa + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right]\right\} + \frac{\bar{C}(V)}{\bar{L}(V)} \right). \end{aligned}$$

Warunki początkowe dla powyższego układu równań wynikają z założenia, że w chwili początkowej ciecz płynie całą szerokością przepływową szczeliny, a zatem mają postać:

$$(7) \quad \bar{C}(0) = 1; \quad \bar{L}(0) = L_0.$$

3. Przybliżone analityczne rozwiązania sformułowanego układu równań

W początkowych etapach procesu kolmatacji spełniona jest zgodnie z (2) i (7) relacja:

$$(8) \quad \psi(V) = \bar{C}(V) \cdot \frac{h}{\bar{L}(V)} \Big|_{V \rightarrow 0} \ll 1.$$

Możemy zatem zlinearyzować układ równań przez rozwinięcie funkcji $\exp\{-\psi(V)\}$ w szereg potęgowy. Pomijając wyrazy rzędu wyższego niż pierwszy otrzymamy po prostych przekształceniach rozwiązanie: [3]

$$(9) \quad \ln \left[1 - \frac{\psi(V) - \frac{\bar{h}}{\bar{l}(V)}}{a_1 - \frac{\bar{h}}{\bar{l}(V)}} \right] + a_2 \left[\psi(V) - \frac{\bar{h}}{\bar{l}(V)} \right] = -B \frac{V}{\bar{l}(V)},$$

$$\psi_0(V) \left[F_1 \ln \frac{\bar{l}(V) + b_1 \psi(V) + b_2 \psi^2(V)}{1 + b_1 \psi_0(V) + b_2 \psi_0^2(V)} - F_2 \ln \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\Delta} \psi_0(V)}{d_1 + d_2 \psi_0(V)} \right\} + \right. \\ \left. + F_2 \ln \left\{ 1 - \frac{\sqrt{-\Delta} \psi(V)}{d_1 + d_3 \psi(V)} \right\} \right] + \bar{l}(V) = 1 - G \cdot V.$$

gdzie: $q = h\kappa, \quad \bar{h} = \frac{h}{L_0}, \quad \bar{l}(V) = \frac{L(V)}{L_0},$

$$\psi_0(V) = \bar{h} \bar{C}(V),$$

$$\Delta = [1 + q^2(2+q)^2 e^{-2q} - 2q^2 e^{-q}],$$

$$a_1 = \frac{q}{q + e^q},$$

$$a_2 = \frac{1 + q e^{-q}}{q[1 + (1+q)e^{-q}]},$$

$$b_1 = \frac{e^q - q^2}{q(1+q)}; \quad b_2 = -(1+q)^{-1},$$

$$d_1 = q(1+q)e^{-q}$$

$$d_2 = \frac{1 - q^2 e^{-q} - \sqrt{\Delta}}{2}; \quad d_3 = \frac{1 - q^2 e^{-q} + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$B = \frac{(1 + q e^{-q})^2}{1 + (1+q)e^{-q}} \frac{N}{L_0 \kappa},$$

$$F_1 = \frac{1}{2q(1+q)} [2(1+q) + q^2 - e^q],$$

$$F_2 = \frac{1}{2q(1+q)\sqrt{-\Delta}} [e^q + (2 + 4q + 6q^2 + 4q^3 + q^4)e^{-q} - 2(1+q+q^2)]$$

$$G = (1+q)e^{-q} \frac{N}{L_0 \kappa}.$$

Uwikłana postać zależności (9) nie pozwala wyznaczyć niewiadomych \bar{L} i \bar{C} bezpośrednio od zmiennej niezależnej V . Można jednak zauważyć, że w początkowych fazach procesu, zgodnie z (8), równania (9) można dalej uprościć, przez odrzucenie członów małych, do postaci:

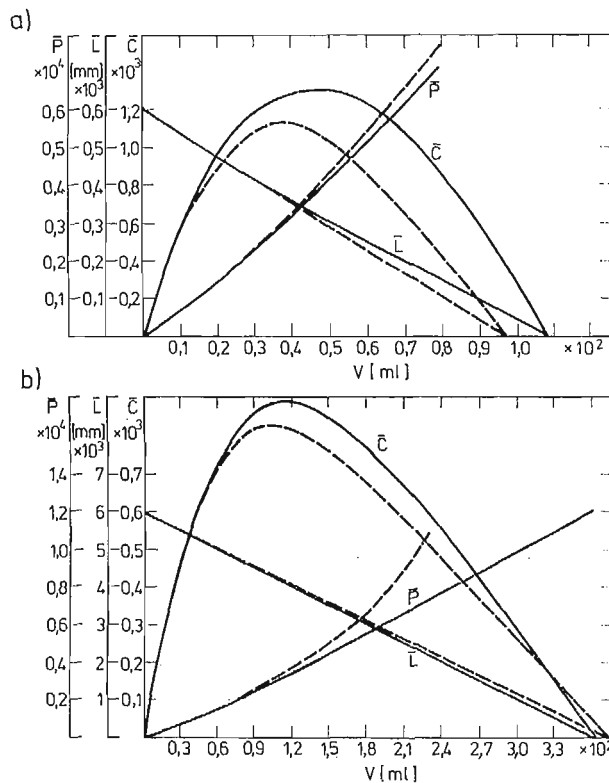
$$(10) \quad \bar{C}(V) = a'_1 \bar{L}(V) - [a'_1 \bar{L}(V) - 1] \exp\{\Phi(V)\}, \\ \bar{L}(V) = L_0 - G'V,$$

gdzie:

$$\Phi(V) = -BL_0 \frac{V}{L_0 - GV},$$

$$a'_1 = \frac{a_1}{h}; \quad G' = GL_0.$$

Dokładniejsze rozwiązania układu równań różniczkowych (6) dla danych wartości parametrów L_0 , h , N , m , λ uzyskano numerycznie wykorzystując biblioteczną procedurę „Runge-Kutta 4”. Na rys. 1 pokazano je łącznie z wynikami rozwiązań przybliżonych. Wartości błędu wynikającego z poczynionych aproksymacji zależą przede wszystkim od



rys. 1

Numeryczne (linie ciągłe) i przybliżone analityczne (linie przerywane) przebiegi funkcji $\bar{C}(V)$, $\bar{L}(V)$, $\bar{P}(V)$, dla a) $q = 1,8$; b) $q = 3$. Wartości $L_0 = 60$ mm, $h = 6$ μ m, $N = 400$ szt./ml.

bezwymiarowego parametru q , określającego relacje pomiędzy wysokością szczeliny h , a parametrem założonego rozkładu wykładniczego cząstek [3]. Oczywiście wartość błędu jest zawsze zbieżna do wartości zerowej przy $V \rightarrow 0$.

Funkcje $\bar{C}(V)$ oraz $\bar{L}(V)$ wykorzystano także do obliczenia średniej liczby cząstek $\bar{P}(V)$ zatrzymanych na wejściu do szczeliny po przepłynięciu objętości V . W pracy [3] zostało

to dokładnie omówione łącznie z wyprowadzeniem przybliżonej zależności analitycznej funkcji $\bar{P}(V)$ słusznej dla małych wartości zmiennej niezależnej V . Ma ona postać:

$$(11) \quad \bar{P}(V) = g_1 V + g_2 V^2,$$

gdzie:

$$g_1 = Ne^{-a}, \quad g_2 = 0,5\bar{h}Ng_1 a_2 \left[1 - \frac{d_1}{q} \right].$$

4. Dyskusja rozwiązań fenomenologicznego modelu procesu kolmatacji

Współczynnikom g_1 i G' występującym w równaniach (10) i (11) można przypisać przejrzystą interpretację. I tak:

g_1 — określa liczbę cząstek większych od wysokości szczeliny w jednostce objętości cieczy

$$g_1 = n(x \geq h) = N\kappa \int_h^{\infty} \exp\{-\kappa x\} dx = Ne^{-a}.$$

G' — odpowiada wartości średniej sumy wymiarów charakterystycznych cząstek większych od wysokości szczeliny w jednostce objętości cieczy

$$G' = E\{x/x \geq h\} = N\kappa \int_h^{\infty} x \exp\{-\kappa x\} dx = N \left(h + \frac{1}{\kappa} \right) e^{-a} = g_1 \left(h + \frac{1}{\kappa} \right).$$

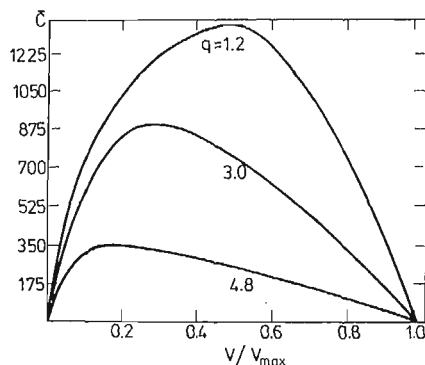
Obydwa współczynniki g_1 oraz G' określają wartości odpowiednich pochodnych $\frac{d\bar{L}(V)}{dV}$, $\frac{d\bar{C}(V)}{dV}$, $\frac{d\bar{P}(V)}{dV}$ w punkcie $V = 0$

$$(12) \quad \left. \frac{d\bar{C}(V)}{dV} \right|_{V=0} = \left. \frac{d\bar{P}(V)}{dV} \right|_{V=0} = g_1; \quad \left. \frac{d\bar{L}(V)}{dV} \right|_{V=0} = G'.$$

Jest to zrozumiałe zważywszy, że w początkowym okresie procesu kolmatacji mogą być zatrzymywane wyłącznie cząstki większe od wysokości szczeliny, powodując podział szczeliny na równą ich liczbie liczbę segmentów oraz zmniejszając czynną szerokość przepływową szczeliny o wartość średnią sumy swoich wymiarów charakterystycznych. Dopiero wzrost liczby cząstek zatrzymanych na wejściu do szczeliny i towarzysząca jej malejąca wartość średnia wymiarów charakterystycznych segmentów — $\frac{\bar{L}(V)}{\bar{C}(V)}$ zwiększa

liczbę zdarzeń „zatykania” poszczególnych fragmentów szczeliny. Większej liczbie cząstek w jednostce objętości cieczy o wymiarach charakterystycznych spełniających relacje $y \geq h$, towarzyszy szybszy podział szerokości przepływowej szczeliny na liczbę części zbliżoną do ilości cząstek zatrzymanych. Dominacja efektu „zatykania” fragmentów obszaru przepływowego szczeliny następuje wówczas przy większych wartościach stosunku $\frac{V_{ex}}{V_{max}}$ wyrażającego iloraz objętości cieczy przy której występuje ekstremum funkcji $\bar{C}(V)$, do objętości wywołującej całkowitą niedrożność szczeliny V_{max} (rys. 2). Gdy udział cząstek

o wymiarach $y \geq h$ jest niewielki, procesy podziału i zatykania segmentów szczeliny przebiegają prawie równocześnie. Maksymalna wartość funkcji $\bar{C}(V)$ jest w tej sytuacji mniejsza i przesunięta w kierunku mniejszych wartości stosunku $\frac{V_{ex}}{V_{max}}$.



rys. 2

Przebiegi zależności $\bar{C}\left(\frac{V}{V_{max}}\right)$ dla różnych wartości parametru q

Korzystając z zależności (9b) oraz przyjmując najprostszy — liniowy związek pomiędzy czynną szerokością przepływową szczeliny — \bar{L} , a objętościowym natężeniem przepływu $Q(V)$ cieczy płynącej pod działaniem stałego spadku ciśnienia Δp (tzn. zakładając proporcjonalność natężenia przepływu cieczy do powierzchni przepływowej szczeliny, gdyż $h = \text{const}$) otrzymamy:

$$(13) \quad Q(t) = Q_0 \exp\{-\gamma t\},$$

gdzie: Q_0 — początkowa wartość natężenia przepływu zawiesiny przez szczelinę

$$\gamma = Q_0 \frac{G'}{L_0}$$

lub:

$$(14) \quad V(t) = \frac{L_0}{G'} [1 - \exp\{-\gamma t\}].$$

Zależności powyższe wskazują na początkowo wykładniczy charakter przebiegu procesu kolmatacji w funkcji czasu.

Występujący we wzorach (13) i (14) parametr stały γ , wyraża początkowy współczynnik intensywności dopływu do szczeliny cząstek o wymiarach charakterystycznych większych od jej wysokości. Określa on jaką część całkowitej (tzn. w chwili $t = 0$) szerokości przepływowej szczeliny eliminują zatrzymane w niej cząstki w jednostce czasu.

Nietrudno zauważyć, że w przypadku

$$(15) \quad h \gg \frac{1}{\kappa} \quad \text{lub} \quad q \gg 1,$$

tn. gdy wartość średnia wymiarów cząstek o rozkładzie wykładniczym, większych od wysokości szczeliny — $\left(h + \frac{t_1}{\alpha}\right)$, jest bliska h , wzór (13) jest zbieżny do zależności podanej w pracy [1, 2]. Istotnie wprowadzając cytowane we wzorze (1) oznaczenia z_n oraz A wzór (13) można doprowadzić do postaci:

$$(16) \quad Q(t) = Q_0 \exp\left\{Q_0 \frac{z_n}{A} t\right\}.$$

wynikającej z wzoru (1)

5. Zastosowanie fenomenologicznego modelu procesu kolmatacji

Zależność (13) bądź (14) jest prosta do weryfikacji praktycznej. Opisy stanowisk doświadczalnych oraz ich wyniki zamieszczone zostały w pracy [3]. Stwierdzono dobrą zgodność przebiegów teoretycznych i doświadczalnych funkcji $V(t)$ dla różnych wymiarów geometrycznych szczelin i rozmaitych zawieszin. W dalszej części omówiony zostanie jedynie pomysł wykorzystania prezentowanego modelu matematycznego dla określenia parametrów cząstek zawiesziny.

Załóżmy, że mamy co najmniej dwie szczeliny o różnych wysokościach h_1 oraz h_2 . Przez obie te szczeliny przepuszczamy dane wartości objętości zawiesziny — odpowiednio V_{11} i V_{21} mierząc jednocześnie czasy ich wypływu — t_1 i t_2 . Następnie, nie przerywając eksperymentu mierzymy objętości cieczy v_{12} , v_{22} jakie przepłyną przez obie szczeliny w przedziałach czasu t odpowiednio: $(t_1, 2t_1)$ oraz $(t_2, 2t_2)$. Wykorzystując zależność (14) dla szczeliny o wysokości h_1 otrzymamy:

$$(17) \quad \begin{aligned} V_{11} &= \frac{Q_{01}}{\gamma_1} [1 - \exp\{-\gamma_1 t_1\}], \\ V_{12} + V_{11} &= \frac{Q_{01}}{\gamma_1} [1 - \exp\{-2\gamma_1 t_1\}]. \end{aligned}$$

Eliminując z równań (17) czasy, uzyskujemy związek:

$$(18) \quad \frac{V_{11} - V_{12}}{(V_{11})^2} = \frac{\gamma_1}{Q_{01}} = N \left(h_1 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-h_1 \alpha}$$

Dla dwóch wspomnianych szczelin, zależność (18) przybierze postać układu równań

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{V_{11} - V_{12}}{(V_{11})^2} &= N \left(h_1 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-h_1 \alpha} \\ \frac{V_{21} - V_{22}}{(V_{21})^2} &= N \left(h_2 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-h_2 \alpha} \end{aligned}$$

Z powyższego układu, przy zmierzonych wartościach objętości V_{11} , V_{12} , V_{21} , V_{22} oraz danych h_1 oraz h_2 można wyznaczyć szukane parametry. Oczywiście warunkiem poprawności eksperymentu jest stałość temperatury i spadku ciśnienia, a więc i lepkości

cieczy w czasie doświadczenia. Przedstawiona wyżej metoda bazująca na podobnej, znanej metodzie określania tzw. „wskaźnika kolmatacji” (Silting Index) [1] nie jest oczywiście jedyną. W większości jednak przypadków wykorzystuje się związek (13) bądź (14).

7. Wnioski

- Proponowany w pracy matematyczny model zjawiska kolmatacji wymiarowej może stanowić punkt odniesienia dla badań eksperymentalnych prowadzonych pod kątem wykorzystania szczeliny jako integralnego elementu czujnika kolmatometrycznego, a także być pomocny przy konstrukcji urządzeń do określania koncentracji i rozkładu granulometrycznego cząstek zawiesiny bazujących na tej metodzie pomiaru.
- Mimo wielu odrębnych założeń czynionych przy formułowaniu modelu matematycznego uzyskano w granicznym przypadku zbieżność z modelem proponowanym przez autora pracy [1]. Model opisany przez tegoż autora można uważać za szczególny przypadek modelu fenomenologicznego przedstawionego w niniejszej pracy.
- Układ równań różniczkowych (3) opisujący w sensie fenomenologicznym przebieg procesu kolmatacji w szczelinach ma charakter ogólny i może być wykorzystany przy założeniu dodatkowych, bądź innych mechanizmów zatrzymywania cząstek oraz odmiennych funkcji aproksymujących rozkład wymiarowy cząstek fazy zdyspergowanej.

Literatura cytowana w tekście

1. S. BOROWIK, *Filtry płynów roboczych*, WNT 1974.
2. S. BOROWIK, *Colmatometer — an Instrument for Continuous Measurement of Impurities Contained in Working Fluids*, Equipment & Technology Intern. USA, 1976, Vol. 2.
3. K. CIEŚLICKI, *Właściwości kolmatacyjne szczelinowych oporów hydraulicznych*, praca dokt. W-wa 1979, Polit. Warsz.
4. K. CIEŚLICKI, S. BOROWIK, *Koncepcja automatycznej kontroli jakości pracy okrętowych urządzeń oczyszczających w oparciu o kolmatomierz*. Spr. z pracy n-b A172, 1976/78, PW.
5. W. FELLER, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań*, PWN 1977, t. II.
6. J. LITWINISZYN, *Colmatage Considered as a Certain Stochastic Process*, Bull. Acad. Pol. Scien. Série Scien. Techn., Vol. 16, No. 4, 1966.
7. A. TRZASKA, *New Kinetics Equations of the Colmatage Process and their Applications*, Arch. Górnictwa, z. 4, 1972.

Резюме

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА КАЛЬМАТАЦИИ НА ЩЕЛЯХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

В работе представлена математическая модель явления сопутствующего течения суспензий через щель. Это явление называемое кальматацией, заключается в захватывании дисперсных частиц. Дисперсные частицы задержанные в щели разделяют область течения на отдельные сегменты. Вычислено количество — \bar{C} и характерные размеры — I всех сегментов после течения объема V . Затем проведен анализ предложенной модели основанный на компьютерных результатах решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. Представлены также приближенные аналитические решения данной системы.

Summary

ON A MATHEMATICAL MODEL OF COLMATAGE PROCESS IN CRACKS AND ITS APPLICATION

The work presents the phenomenological model of a phenomenon accompanying the flow of suspension through a micro-gap. The phenomenon is called the colmatage process and depends on trapping the dispersion phase particles. The particles being trapped in the gap divide its area on separate segments. There was assumed that a single particle stopped in the crack segment can divide or remove the segment, depending on their mutual dimensions. The number of segments — \bar{C} and the characteristic dimension of flow width — \bar{L} after flowing of the volume V of liquid have been calculated. The analysis based on the computer solved results of the set of formulated, nonlinear differential equations. Also the approximate, analytical solution of the set have been obtained.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 października 1980 roku.
