

OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH O NIECIĄGŁYCH CHARAKTERYSTYKACH

JERZY ŁUCZKO

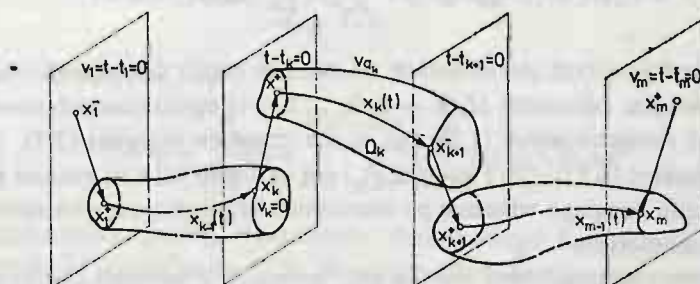
Politechnika Krakowska

1. Wstęp

Zagadnienie doboru optymalnych parametrów układu dynamicznego przy założonej jego strukturze jest zadaniem optymalizacji z ograniczeniami w postaci równań różniczkowych. Uzyskanie jawnej zależności funkcji celu od parametrów jest możliwe tylko dla nielicznej grupy problemów. Większość zagadnień praktycznych wymaga rozwiązania silnie nieliniowych równań różniczkowych rzędu wyższego niż drugi. Wiąże się to z koniecznością stosowania metod numerycznych przy wykorzystaniu EMC. Duży czas obliczeń związany z rozwiązaniem zadania optymalizacji skłania do przyjmowania uproszczonych modeli zjawiska, ujmujących jednak wpływ istotnych parametrów na stan układu. Uproszczenia te mogą polegać na określeniu charakterystyk elementów istotnie nieliniowych za pomocą funkcji nieciągłych lub dystrybucji. Prowadzi to do zagadnienia optymalizacji dynamicznej układu opisanego nieciągłym wektorem stanu. Rozwiązanie powyższego problemu uzyskano, bazując na ideach rachunku wariacyjnego [7].

2. Sformułowanie problemu

Rozważmy zagadnienie znalezienia optymalnych wartości parametrów $a_i (i = 1, 2, \dots, l)$ układu dynamicznego przy ustalonej jego strukturze. Niech ruch badanego układu będzie opisany nieciągłym n -wymiarowym wektorem stanu $x(t)$. Zdefiniujmy przez $x_k (k = 1, 2, \dots, m-1)$ ciągłe odcinki trajektorii układu, zaś przez Ω_k obszary, w których są one zawarte (rys. 1).



Rys. 1

Wprowadźmy powierzchnie:

$$V_{g_k}(x_k, t, a) = 0 \quad g_k = 1, 2, \dots, s_k, \quad (2.1)$$

ograniczające obszary Ω_k . Oznaczmy dalej przez $\vartheta_k (k = 1, 2, \dots, m)$ te z powierzchni (2.1), które są kolejno przecinane trajektorią układu. Ograniczymy się przy tym do rozpatrzenia zadania z ustalonymi końcami tzn. przyjmiemy:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= t - t_1, \\ \vartheta_m &= t - t_m, \end{aligned}$$

Załadajmy teraz spełnienia wewnątrz obszarów Ω_k układu równań różniczkowych w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{jk} &= f_{jk}(x_k, t, a) \quad j = 1, 2, \dots, n \\ k &= 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

zaś w punktach $t = t_k$ przecięcia powierzchni (2.1) trajektoriā układu niech będą dane warunki:

$$\begin{aligned} x_{jk}^+ &= \omega_{jk}(x_k^-, t_k, a), \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ k &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} x_{jk}^- &= x_j(t_k - 0) = x_{jk-1}(t_k), \\ x_{jk}^+ &= x_j(t_k + 0) = x_{jk}(t_k). \end{aligned}$$

Dla $t = t_k$ zachodzą związki:

$$\vartheta_k(x_k^-, t_k, a) = 0. \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

Zadajmy ponadto warunki jakie winny spełniać końce trajektorii układu

$$\varphi_j(x_1^-, t_1, x_m^+, t_m, a) = 0. \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Zadanie optymalizacji można sformułować następująco:

Należy znaleźć wektor stałych sterowań $a_i (i = 1, 2, \dots, l)$, zapewniający minimum funkcjonalu w postaci:

$$J = \varphi_0(x_1^-, t_1, x_m^+, t_m, a) + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} f_{0k}(x_k, t, a) dt, \quad (2.6)$$

przy czym odpowiadające tym sterowaniom odcinkami ciągłe funkcje $x_j(t) / j = 1, 2, n$ winny spełniać wewnątrz obszarów $\Omega_k (k = 1, 2, \dots, m-1)$ ograniczonych powierzchniami (2.1) układ równań różniczkowych (2.2), zaś na ich brzegach warunki (2.3), (2.4), (2.5).

Założymy, że funkcje f_{jk} i f_{0k} , φ_j i φ_0 oraz ϑ_k i ω_{jk} są ciągłe wraz ze swoimi pochodnymi cząstkowymi do rzędu drugiego włącznie po wszystkich argumentach wewnątrz odpowiednich obszarów domkniętych.

Ponadto założymy, że trajektorie układu przy przejściu z jednego obszaru do następnego przecinają tylko jedną z powierzchni (2.1) i nie dochodzą do nich stycznie tzn. jest

spełniony warunek:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_{jk-1}} f_{jk-1} + \frac{\partial \vartheta_k}{\partial t} \Big|_{t=t_k-0} \neq 0 \quad (2.7)$$

$$k = 1, 2 \dots m$$

3. Warunki konieczne minimum funkcjonału

Rozpatrywane zagadnienie jest zadaniem na ekstremum warunkowe przy czym nałożone ograniczenia w postaci równań różniczkowych winny być spełnione we wszystkich przedziałach (t_k, t_{k+1}) gdzie $k = 1, 2 \dots m-1$, zaś warunki (2.3), (2.4), (2.5) w punktach $t = t_k (k = 1, 2 \dots m)$.

W celu znalezienia warunków koniecznych minimum funkcjonału wprowadzimy zmienne w czasie mnożniki Lagrange'a $\lambda_{kj}(t)$ dla równań (2.2) oraz stałe mnożniki v_k, μ_{kj} oraz ϱ_j odpowiednio dla związków (2.4), (2.3) i (2.5).

Utworzymy funkcjonał pomocniczy:

$$I = J + \sum_{j=1}^n \varrho_j \varphi_j + \sum_{k=1}^m \left[v_k \vartheta_k + \sum_{j=1}^n \mu_{kj} (x_{jk}^+ - \omega_{jk}) \right] + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \lambda_{kj} (\dot{x}_{jk} - f_{jk}) dt.$$

Wprowadzimy oznaczenia:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^n \varrho_j \varphi_j$$

$$\Theta_k = v_k \vartheta_k + \sum_{j=1}^n \mu_{kj} (x_{jk}^+ - \omega_{jk}) \quad k = 1, 2 \dots m \quad (3.1)$$

$$H_k = -f_{0k} + \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} f_{jk} \quad k = 1, 2 \dots m-1$$

i zapiszemy go następująco:

$$I = \varphi + \sum_{k=1}^m \Theta_k + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} (\sum_{j=1}^n \lambda_{kj} \dot{x}_{jk} - H_k) dt \quad (3.2)$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum warunkowego funkcjonału (2.6) jest zerowanie się wariacji ΔJ funkcjonału (3.2). Wyznamy najpierw wariacje poszczególnych składników występujących we wzorze (3.2)

$$\Delta\varphi = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j1}^-} \Delta x_{j1}^- + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{jm}^+} \Delta x_{jm}^+ \right)$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial t_m} \delta t_m + \sum_{i=1}^l \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} \delta a_i$$

$$\Delta\Theta_k = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^-} \Delta x_{jk}^- + \frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^+} \Delta x_{jk}^+ \right)$$

$$+ \frac{\partial\Theta_k}{\partial t_k} \delta t_k + \sum_{i=1}^l \frac{\partial\Theta_k}{\partial a_i} \delta a_i,$$

$$\Delta \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{kj} \dot{x}_{jk} - H_k \right) dt = f_{0k} \delta t \Big|_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} +$$

$$\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\lambda_{kj} \delta \dot{x}_{jk} + \left(\dot{x}_{jk} - \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{kj}} \right) \delta \lambda_{kj} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{jk}} \delta x_{jk} \right] - \sum_{i=1}^l \frac{\partial H_k}{\partial a_i} \delta a_i \right\} dt.$$

Po scałkowaniu przez części wyrażenia:

$$\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \lambda_{kj} \delta \dot{x}_{jk} dt = \lambda_{kj} \delta x_{jk} \Big|_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} - \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \dot{\lambda}_{kj} \delta x_{jk} dt$$

i wykorzystaniu związków:

$$\Delta x_{jk}^+ = \Delta x_{jk}(t_k+0) = \delta x_{jk}(t_k+0) + \dot{x}_{jk}(t_k+0) \delta t_k$$

$$\Delta x_{jk}^- = \Delta x_{jk-1}(t_k-0) = \delta x_{jk-1}(t_k-0) + \dot{x}_{jk-1}(t_k-0) \delta t_k$$

wariację funkcjonału (3.2) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \Delta I = & \sum_{i=1}^l \left[\frac{\partial\varphi}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial\Theta_k}{\partial a_i} - \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \frac{\partial H_k}{\partial a_i} dt \right] \delta a_i \\ & + \sum_{k=2}^{m-1} \left\{ \left(H_k^+ - H_k^- + \frac{\partial\Theta_k}{\partial t_k} \right) \delta t_k + \sum_{j=1}^n \left[\left(\lambda_{jk}^- + \frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^-} \right) \Delta x_{jk}^- + \left(-\lambda_{kj}^+ + \frac{\partial\Theta_k}{\partial x_{jk}^+} \right) \Delta x_{jk}^+ \right] \right\} \\ & + \left(H_1^+ + \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} + \frac{\partial\Theta_1}{\partial t_1} \right) \delta t_1 + \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j1}^-} + \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_{j1}^-} \right) \Delta x_{j1}^- + \left(-\lambda_{1j}^+ + \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_{j1}^+} \right) \Delta x_{j1}^+ \right] \\ & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_m} - H_m^- + \frac{\partial\Theta_m}{\partial t_m} \right) \delta t_m + \sum_{j=1}^n \left[\left(\lambda_{mj}^- + \frac{\partial\Theta_m}{\partial x_{jm}^-} \right) \Delta x_{jm}^- + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{jm}^+} + \frac{\partial\Theta_m}{\partial x_{jm}^+} \right) \Delta x_{jm}^+ \right] \\ & + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \left(\dot{\lambda}_{kj} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{jk}} \right) \delta x_{jk} dt. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Wprowadzono tu oznaczenia:

$$\begin{aligned}\lambda_{kj}^- &= \lambda_{k-1,j}(t_k-0), & \lambda_{kj}^+ &= \lambda_{kj}(t_k+0), \\ H_k^- &= H_{k-1}(t_k-0), & H_k^+ &= H_k(t_k+0),\end{aligned}\quad (3.4)$$

oraz wykorzystano równania stanu (2.2) zapisane w postaci:

$$\dot{x}_{jk} = \frac{\partial H_k}{\partial x_{kj}}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \dots n \\ k = 1, 2 \dots m-1 \end{matrix}$$

Występujące we wzorze (3.3) wariacje $\delta x_{jk}(t)$, Δx_{jk}^- , Δx_{jk}^+ oraz δt_k nie są niezależne między sobą i winny spełniać związki: (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5). W związku z tym należy tak wybrać mnożniki Lagrange'a $\lambda_{kj}(t)$, v_k , μ_{kj} oraz ϱ_j , aby zerowały się wyrażenia stojące przy zależnych wariacjach. Korzystając z tego warunku można wyznaczyć układ równań sprzężonych:

$$\dot{\lambda}_{kj} = -\frac{\partial H_k}{\partial x_{jk}} \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \dots n \\ k = 1, 2 \dots m-1 \end{matrix} \quad (3.5)$$

określający zmienne współczynniki Lagrange'a $\lambda_{kj}(t)$. Odpowiedni układ warunków brzegowych i zarazem równań na mnożniki ϱ_j otrzymamy, przyrównując do zera wyrażenia przy wariacjach Δx_{jk}^- , Δx_{jk}^+ i δt_k dla $k = 1$ oraz $k = m$. Pozostałe równania (dla $k = 2 \dots m-1$) tzw. warunki Weierstrassa Erdmana:

$$\begin{aligned}\lambda_{kj}^- &= -\frac{\partial \Theta_k}{\partial x_{jk}^-} \\ \lambda_{kj}^+ &= \frac{\partial \Theta_k}{\partial x_{jk}^+} \\ H_k^+ + H_k^- + \frac{\partial \Theta_k}{\partial t_k} &= 0 \quad \begin{matrix} k = 2 \dots m-1 \\ j = 1, 2 \dots n \end{matrix}\end{aligned}\quad (3.6)$$

dają związki dla rozwiązań $\lambda_{kj}(t)$ równań sprzężonych w punktach nieciągłości $t = t_k$ oraz pozwalają wyznaczyć mnożniki v_k i μ_{kj} . Przy spełnieniu powyższych warunków wzór na wariację funkcjonału przyjmie prostą postać:

$$\Delta I = \sum_{i=1}^l \frac{\partial I}{\partial a_i} \delta a_i$$

gdzie

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial a_i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Theta_k}{\partial a_i} - \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \frac{\partial H_k}{\partial a_i} dt \\ i &= 1, 2 \dots l,\end{aligned}\quad (3.7)$$

jest gradientem funkcjonału (3.2).

Wariacje $\delta a_i (i = 1, 2 \dots l)$ są niezależne, warunkiem koniecznym ekstremum funkcjonału jest więc zerowanie się wyrażeń (3.7).

4. Metoda numeryczna rozwiązania zagadnienia

Rozwiązanie przedstawionego powyżej problemu można praktycznie uzyskać jedynie na drodze obliczeń numerycznych. Należy w tym celu zastosować jedną ze znanych metod gradientowych optymalizacji [2], [4] przykładowo metodą zmiennej metryki Fletchera-Powella-Davidona. Metody te wymagają na każdym kroku iteracji podania wartości funkcji celu (2.6) oraz jej gradientu (3.7). Wyznaczenie tych wielkości związane jest ściśle z czasochłonnym rozwiązywaniem zagadnienia brzegowego odpowiednio dla równań wyjściowych (2.2) i sprzężonych (3.5). Pojawia się ponadto problem istnienia rozwiązania zagadnienia brzegowego zwłaszcza dla nieliniowych równań stanu. Warunki brzegowe (2.5) oraz pozostałe ograniczenia wyznaczają pewien obszar parametrów, w którym to obszarze istnieje rozwiązanie postawionego zadania.

W trakcie iteracyjnego procesu optymalizacji dobierane parametry mogą wykraczać poza ten obszar. Dlatego też wskazane jest traktowanie tego zadania jako optymalizacji z ograniczeniami w postaci warunków brzegowych. Można się tu posłużyć metodami funkcji kary, polegającymi na modyfikacji funkcji celu przez wprowadzenie do niej wyrażenia reprezentującego karę za przekroczenie ograniczeń. Według metody Powella z przesuwaną funkcją kary [2] można przyjąć

$$J_p = J + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \gamma_j (\varphi_j - \alpha_j)^2, \quad (4.1)$$

przy czym γ_j i α_j ($j = 1, 2, \dots, n$) są wektorami współczynników i przesunięć kary, zmienianymi w trakcie procesu obliczeniowego. Poszukiwanie ekstremum warunkowego odbywa się poprzez ciąg kolejnych minimalizacji bezwarunkowych zmodyfikowanej funkcji celu (4.1), zaś dobieranymi parametrami są teraz wektor szukanych parametrów oraz wektor warunków początkowych, zapewniający rozwiązanie zagadnienia brzegowego. Uwzględnienie warunków (2.5) w zmodyfikowanej funkcji celu (4.1) powoduje istotną zmianę postaci funkcji φ (wzór 3.1). Zapiszemy ją następująco:

$$\varphi = \varphi_p + \sum_{j=1}^n \varrho_j (x_{j1} - a_{l+j}), \quad (4.2)$$

przy czym w miejsce φ_0 wprowadzono tu wyrażenie:

$$\varphi_p = \varphi_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \gamma_j (\varphi_j - \alpha_j)^2.$$

Jak widać problem optymalizacji polega na znalezieniu $(l+n)$ wymiarowego wektora parametrów, minimalizującego funkcjonal (4.1).

Jednakże przyjęcie funkcji φ w postaci (4.2) prowadzi do zagadnienia początkowego dla równań wyjściowych i zagadnienia brzegowego z warunkami na końcu dla równań sprzężonych. To ostatnie można, wprowadzając zmienną $\tau = t_m - t$, również sprowadzić do dużo prostszego w rozwiązywaniu zagadnienia początkowego. Dla tak postawionego zagadnienia optymalizacji algorytm wyznaczenia gradientu funkcjonału (4.1) można przedstawić w następujących punktach:

I. Wprowadźmy dla ujednolicenia zapisu oznaczenia

$$H_m^+ = \frac{\partial \varphi}{\partial t_m} = f_{om}^+, \quad f_{jm}^+ = 0,$$

$$\lambda_{mj}^+ = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{jm}^+}, \quad j = 1, 2 \dots n.$$

Przy przyjęciu funkcji φ w postaci (4.2) wyrażenia te nie zależą od mnożników ϱ_j . Podstawmy $k \Leftarrow m$

II. Wykorzystując warunki Weierstrassa-Erdmana (3.6) oraz związki (3.1) należy wyznaczyć mnożniki μ_{kj} i v_k . Są one równe:

$$\begin{aligned} \mu_{kj} &= \lambda_{kj}^-, \quad j = 1, 2 \dots n, \\ v_k &= \left(\sum_{s=1}^n \mu_{ks} w_{sk} - w_{ok} \right) / v_k, \end{aligned} \quad (4.3)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} w_{ok} &= f_{ok}^- - f_{ok}^+, \\ w_{jk} &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_{sk}^-} f_{sk}^- + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial t_k} - f_{sk}^+, \\ v_k &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_{sk}^-} f_{sk}^- + \frac{\partial \vartheta_k}{\partial t_k}. \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie na mocy założenia (2.7) jest różne od zera.

Następnie należy określić:

$$\lambda_{kj}^- = \sum_{s=1}^n \mu_{ks} \frac{\partial \omega_{sk}}{\partial x_{jk}^-} - v_k \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_{sk}^+}, \quad j = 1, 2 \dots n, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial a_i} = - \sum_{s=1}^n \mu_{ks} \frac{\partial \omega_{sk}}{\partial a_i} + v_k \frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2 \dots l. \quad (4.5)$$

Podstawmy $k \Leftarrow k-1$

III. Po wprowadzeniu zmiennej $\tau = t_m - t$ można, wykorzystując związki (4.4), scałkować równania sprzężone w przedziale $(t_m - t_{k+1}, t_m - t_k)$

$$\dot{\lambda}_{kj}(\tau) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{sk}}{\partial x_{jk}} \lambda_{ks}(\tau) - \frac{\partial f_{ok}}{\partial x_{jk}}, \quad j = 1, 2 \dots n,$$

oraz określić wyrażenia:

$$\begin{aligned} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \frac{\partial H_k}{\partial a_i} dt &= \int_{t_m-t_{k+1}+0}^{t_m-t_k-0} \left[\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{sk}}{\partial a_i} \lambda_{ks}(\tau) - \frac{\partial f_{ok}}{\partial a_i} \right] d\tau \\ i &= 1, 2 \dots l \end{aligned} \quad (4.6)$$

IV. W celu wyznaczenia gradientu (3.7) funkcjonału należy powtarzać czynności określone w punktach (II) i (III) aż do osiągnięcia przez k wartości jeden.

Dla $k = 1$ zdefiniujmy:

$$H_{\bar{1}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} = -f_{\bar{o}1}, \quad f_{\bar{j}1} = 0, \quad (4.7)$$

$$\lambda_{\bar{1}j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\bar{j}1}}, \quad j = 1, 2 \dots n.$$

W oparciu o wzory (4.3) można określić wyrażenia (4.4) i (4.5), a następnie, porównując (4.4) i (4.7) z uwzględnieniem (4.2), wyznaczyć wartości mnożników ϱ_j .

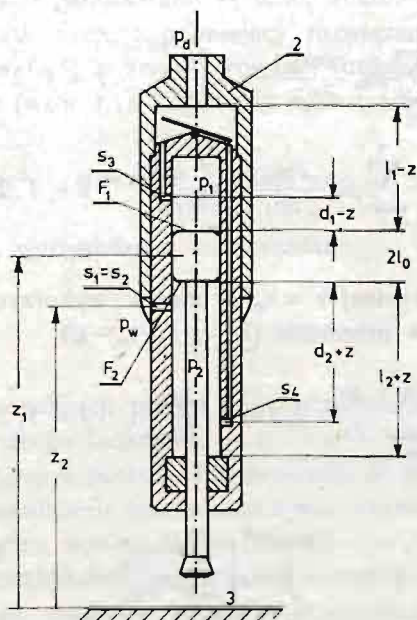
$$\varrho_j = \lambda_{\bar{1}j} - \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_{\bar{j}1}}, \quad j = 1, 2 \dots n. \quad (4.8)$$

Łatwe jest teraz obliczenie pochodnych funkcji (4.2) podług odpowiednich parametrów $a_i (i = 1, 2 \dots l+n)$.

Sumując dodatkowo wartości kolejnych wyrażeń (4.5) i (4.6) można ostatecznie określić gradient funkcjonału (4.1).

5. Przykład

W formie przykładu rozważmy zagadnienie optymalizacji konstrukcji pneumatycznych narzędzi wibrodarowych [1], [6] prowadzonej w celu zmniejszenia poziomu drgań przekazywanych na człowieka. Intensywność emitowanych wibracji określimy wartością średnią energii kinetycznej drgań korpusu 2 narzędzia (rys. 2):



Rys. 2

$$E_w = \frac{m_2}{2T} \int_0^T \dot{z}_2^2(t) dt, \quad (5.1)$$

przy czym ograniczymy się do zbadania stanów ustalonych drgań. Optymalizację przeprowadzimy w przedziale czasu $(0, T)$, wyznaczonym kolejnymi zderzeniami bijaka 1 z tzw. ogranicznikiem ruchu 3. Wprowadzimy także wyrażenie:

$$E_u = \frac{1}{2} m_1 [\dot{z}_1^2(T-0) - \dot{z}_1^2(T+0)]$$

określające wartość energii straconej w trakcie zderzenia i będące miarą efektywności pracy urządzenia. Po wykorzystaniu zgodnie z hipotezą Newtona współczynnika restytucji r przyjmie ona postać:

$$E_u = \frac{1}{2} m_1 (1-r^2) \dot{z}_1^2(T-0). \quad (5.2)$$

Rozpatrując dalej ruch układów w płaszczyźnie pionowej i zastępując oddziaływanie człowieka stałą siłą Q można uzyskać następujące związki na przemieszczenia bezwzględne $z_i(t)$:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \mu_2 z + \frac{1}{2} q t(T-t), \\ z_2(t) &= -\mu_1 z + \frac{1}{2} q t(T-t), \end{aligned} \quad t \in (0, T), \quad (5.3)$$

przy czym przemieszczenia względne $z = z_1 - z_2$ musi spełniać równanie różniczkowe w postaci:

$$M\ddot{z} + B\dot{z} + F_1(p_1 - p_w) - F_2(p_2 - p_w) = \mu_1 Q. \quad (5.4)$$

Wprowadzono tu oznaczenia:

$$M = m_1 m_2 / m, \quad m = m_1 + m_2,$$

$$\mu_i = m_i / m, \quad i = 1, 2$$

$$q = Q/m + g,$$

zaś pozostałe wielkości zaznaczono na rys. 2. Rozwiązanie zadania minimum wyrażenia (5.1) przy ograniczeniu w postaci równania różniczkowego (5.4) umożliwia optymalny dobór tylko niektórych parametrów konstrukcyjnych urządzenia. Pozostałe parametry określające np. położenia zaworów dolotowych lub wylotowych można wyznaczyć rozpatrując dodatkowo układ równań, opisujących zmiany ciśnienia $p_i(t)$ w odpowiedniej komorze narzędzia. Przy założeniu przemiany izotermicznej [5] równania te mają postać:

$$\frac{d}{dt} \{ [l_i + (-1)^i z] F_i p_i \} = k [f_{i+2} \Phi(p_i/p_d) - f_i p_i \Phi(p_w/p_i)], \quad i = 1, 2, \quad (5.5)$$

gdzie stała k charakteryzuje czynnik roboczy (powietrze) wypełniający komory narzędzia. Przyjmiemy tu dwa zasadnicze dla dalszych rozważań założenia:

— funkcje $f_i (i = 1, \dots, 4)$ opisujące zmiany pola przekroju odpowiedniego zaworu wylo-

towego bądź dolotowego określimy przy pomocy pewnych nieciągłych funkcji ψ_i

$$f_i = s_i \psi_i(p_1, p_2, z),$$

— przyjmujemy tzw. przepływ nadkrytyczny przez zawory [3], [5], co rozwiązane jest z założeniem stałości funkcji $\Phi(p)$.

Zdefiniujemy następujące współrzędne wektora stanu:

$$x_1 = p_1(l_1 - z),$$

$$x_2 = p_2(l_2 + z),$$

$$x_3 = z,$$

$$x_4 = \dot{z},$$

i poprzez nie określimy wyrażenia $\psi_i (i = 1, \dots, 4)$

Postać tych funkcji zależy od przyjętego rozwiązania układu rozrządu narzędzia. Dla układu przedstawionego na rys. 2 dopływ powietrza sterowany jest głównie różnicą ciśnień $p_1 - p_2$, zaś wypływ zależy od przemieszczenia względnego x_3 .

Wprowadzając pomocniczo funkcje:

$$V_i = (-1)^i x_3 - l_0,$$

$$V_{i+2} = (-1)^i x_3 + d_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.6)$$

określające położenia zaworów wylotowych i dolotowych, a także:

$$V_{i+4} = (-1)^i [x_1/(l_1 - x_3) + x_2/(l_2 + x_3)], \quad i = 1, 2, \quad (5.7)$$

można funkcje ψ_i wyrazić następująco poprzez funkcje nieciągłe typu Heavisida'a:

$$\psi_i = H(V_i),$$

$$\psi_{i+2} = H(V_{i+2})H(V_{i+4}), \quad i = 1, 2 \quad (5.8)$$

Układ równań różniczkowych opisujących ruch badanego układu przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1k} &= k \left(s_3 \psi_{3k} - s_1 \psi_{1k} \frac{x_{1k}}{l_1 - x_{3k}} \right) / F_1, \\ \dot{x}_{2k} &= k \left(s_4 \psi_{4k} - s_2 \psi_{2k} \frac{x_{2k}}{l_2 + x_{3k}} \right) / F_2, \\ \dot{x}_{3k} &= x_{4k} \\ \dot{x}_{4k} &= \left(Q_0 - Bx_{4k} - \frac{F_1 x_{1k}}{l_1 - x_{3k}} + \frac{F_2 x_{2k}}{l_2 + x_{3k}} \right) / M, \end{aligned} \quad (5.9)$$

gdzie:

$$Q_0 = \mu_1 Q + (F_1 - F_2)p_w$$

przy czym przez ψ_{ik} oznaczono wartości funkcji (5.8) w obszarach w których wyrażenia (5.6), (5.7) nie zmieniają znaku. Tak więc otrzymany układ równań jest układem o nieciągłych prawych stronach, zapisanym w jednolitej postaci. Punkty nieciągłości t_k wyznaczone są poprzez miejsca zerowe funkcji $V_i (i = 1, \dots, 6)$

Powróćmy teraz do drugiego z przyjętych założeń.

Wprowadzimy wyrażenia:

$$V_{i+6} = p_d - \frac{x_i}{l_i + (-1)^i x_3}, \quad (5.10)$$

$$V_{i+8} = \frac{x_i}{l_i + (-1)^i x_3} - p_w, \quad i = 1, 2.$$

Przyjęcie założenia upraszczającego odnośnie funkcji Φ ogranicza zakres ważności równań (5.9) do obszarów, w których:

$$V_{i+6} > 0 \wedge V_i < 0 \vee V_{i+8} > 0 \wedge V_i > 0.$$

W pozostałych obszarach zmienne $p_i(t)$ winny być stałe, równe wartości p_d ciśnienia powietrza zasilającego układ lub wartości p_w ciśnienia otoczenia.

Przyjmując w tym przypadku za współrzędne $x_i(t)$ zmienne $p_i(t)$ oraz zastępując odpowiednie z równań (5.9) równaniem:

$$\dot{x}_i = 0$$

doprowadzimy zagadnienie optymalizacji do zadania z nieciągłym wektorem stanu, przy czym w punktach $t = t_k$, w których zerują się wyrażenia (5.10) muszą być spełnione związki:

$$x_{ik}^+ = \frac{x_{ik}^-}{l_i + (-1)^i x_{3k}^-}, \quad (5.11)$$

oraz dla $V_i = 0$

$$x_{ik}^+ = x_{ik}^- [l_i + (-1)^i x_{3k}^-], \quad (5.12)$$

ze względu na ciągłość zmiennej $p_i(t)$.

Pozostałe współrzędne wektora stanu są ciągłe.

Nieciągłość współrzędnej x_4 , będącą wynikiem przyjętej hipotezy odnośnie zderzenia, uwzględnimy w warunkach brzegowych przyjmując, że zderzenia następują w chwilach $t_1 = 0$ i $t_m = T$. Po wykorzystaniu związków (5.3), warunków okresowości ruchu oraz hipotezy Newtona warunki brzegowe przyjmą postać:

$$\begin{aligned} q_j &= x_{jm}^+ - x_{j1}^- = 0, \quad j = 1, 2, 3 \\ q_4 &= x_{4m}^+ - x_{41}^- + qT/\mu_1 = 0, \\ q_5 &= x_{41}^- + \frac{1}{2} qT \left[\frac{1-r}{1+r} \frac{1}{\mu_2} - \frac{2r}{1+r} \frac{1}{\mu_1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Za funkcjonal jakości (2.6) przyjmiemy wyrażenie (5.1). Po przecałkowaniu przez części z wykorzystaniem związków (5.3) można go przedstawić w ostatecznej postaci:

$$J = m_2 \left[\frac{1}{24} q^2 T^2 + \frac{1}{2} \mu_1 q (x_{3m}^+ + x_{31}^-) + \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} \mu_1^2 x_4^2 - \mu_1 q x_3 \right) dt \right]. \quad (5.14)$$

Postawione zadanie optymalizacji układu dynamicznego (5.9) z nałożonymi warunkami brzegowymi (5.13) oraz warunkami (5.11) lub (5.12) w punktach nieciągłości wektora stanu, przy przyjęciu funkcjonalu jakości (5.14), jest równoważne wcześniej sformułowanemu zagadnieniu optymalizacji.

Szukany wektorem stałych sterowań „a” może tu być wektor parametrów konstrukcyjnych rozpatrywanego narzędzia udarowego. W przedstawionych poniżej wynikach za współrzędne dobieranego wektora przyjęto następujące wielkości:

$$\begin{aligned} a_1 &= F_2/F_1, & a_2 &= \mu_1/\mu_2, & a_3 &= l_2/l_1, \\ a_4 &= l_0/l, & a_5 &= d_1/l_1, & a_6 &= d_2/l_2, \end{aligned}$$

przy czym ustalono całkowitą długość:

$$2l = l_1 + 2l_0 + l_2,$$

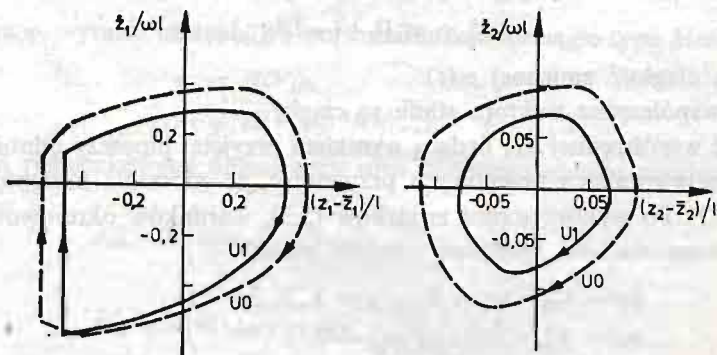
oraz masę „m” narzędzia. Optymalizację przeprowadzono dla zadanej wartości okresu drgań:

$$T = 0.8 \sqrt{l/g}$$

odpowiadającej w przybliżeniu okresowi pracy tzw. ubijaków formierskich. Także wartości pozostałych parametrów przyjęto w oparciu o istniejące rozwiązania konstrukcyjne wymienionych narzędzi.

Przy numerycznym rozwiązywaniu sformułowanego zadania optymalizacji wykorzystano podany w poprzednim punkcie algorytm rozwiązania wyznaczania gradientu funkcjonału.

Uzyskane rezultaty przedstawiamy w sposób poglądowy, nie wchodząc w szczegółowe rozważania, zawarte w pracy [6], a dotyczące np. wpływu poszczególnych parametrów na wartość przyjętej funkcji celu.



Rys. 3

Na rys. 3 pokazano ruch układu istniejącego U_0 i optymalnego U_1 na płaszczyznach fazowych (wprowadzono tu wartości średnie $\bar{z}_1$ i $\bar{z}_2$ współrzędnych $z_1(t)$ i $z_2(t)$ oraz częstość drgań $\omega = 2\pi/T$, zaś w tab. 1 zestawiono wartości parametrów charakteryzujących powyższe układy, a także dwa inne optymalne rozwiązania otrzymane dla zadanych wartości parametru a_1 .

Można tu zauważyć, że dysponując dostatecznie dużą ilością parametrów podlegających optymalizacji można zaprojektować różne układy (np. U_2 , U_3) określone tylko nieznacznie gorszym od optymalnego (U_1) wskaźnikiem jakości działania (5.1). Ze wzrostem wartości parametru a_1 rośnie wprawdzie wartość funkcji celu (5.1), ale równocześnie wzrasta wyrażenie (5.2), zaś stosunek tych wielkości pozostaje prawie stały.

Tabela 1

Wielkość \ Układ	U0	U1	U2	U3
a_1	0.600	0.466	0.600	0.700
a_2	0.333	0.292	0.276	0.262
a_3	1.000	0.888	0.736	0.705
a_4	0.250	0.313	0.303	0.282
a_5	0.667	0.629	0.759	0.826
a_6	0.667	0.639	0.679	0.688
E_w/mgl	0.120	0.061	0.065	0.068
E_u/mgl	2.203	2.417	2.527	2.614
E_u/E_w	18.4	39.6	38.9	38.4

Tak więc, w zależności od tego czy bardziej pożądane jest zmniejszenie poziomu wibracji czy też zwiększenie efektywności pracy urządzenia, różne z tych rozwiązań mogą być uważane za optymalne.

Wnioski

Z powyższych rozważań i przeprowadzonych obliczeń numerycznych nasuwają się następujące wnioski:

— Zaproponowana metoda może być zastosowana do rozwiązania zagadnienia optymalizacji dla dość szerokiej klasy dyskretnych układów dynamicznych.

Zaletą metody, dzięki wykorzystaniu analitycznych związków (3.7) określających gradient funkcjonu, jest fakt, że czas obliczeń w ramach jednej iteracji nie zależy praktycznie od ilości parametrów, zależy od niej jedynie ilość iteracji.

W przypadku układów, dla których rozwiązanie zagadnienia brzegowego jest łatwe do uzyskania (np. układów odcinkami liniowych), polecane jest sporządzanie odrębnego algorytmu obliczeniowego, opartego bezpośrednio na wzorze (3.3) i zabezpieczającego spełnienie zagadnienia brzegowego na każdym kroku iteracji. W ten sposób można obniżyć wymiar szukanego wektora parametrów (nie będą dobierane wartości początkowe wektora stanu) i poprzez zmniejszenie ilości iteracji skrócić czas obliczeń numerycznych.

W przypadku bardziej złożonych problemów optymalizacji wskazane jest wstępne określenie węższego obszaru parametrów w którym leży minimum globalne.

Można tu wykorzystać znane [2], [4] bezpośrednie metody optymalizacji lub też rezultaty analizy układu. Inaczej mówiąc pożądane jest nałożenie pewnych ograniczeń na parametry układu, w tym także na warunki początkowe. Winny być one między innymi

wprowadzane w ten sposób, aby zapewnić stałą liczbę punktów nieciągłości w kolejnych iteracjach procesu obliczeniowego, co gwarantuje jego lepszą zbieżność.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. ASZAWSKIJ, A. J. WOLPERT, W. S. SZEJNBAUM, *Silowe impulsnyje sistemy*, Maszynostroenie, Moskwa, 1978.
2. W. FINDEISEN, J. SZYMANOWSKI, A. WIERZBICKI, *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa, 1977.
3. E. W. GERC, G. E. KREJNIN, *Teoria i rasczet silowych pneumaticzeskich ustrojst*, Izd. AN SSSR, Moskwa, 1960.
4. D. HIMMELBLAU, *Prokladnoje nelinejnoe programmirowanie*, Mir, Moskwa, 1975.
5. M. Z. KOŁOWSKI, *Awtomaticzeskoe upravlenie wibrozasczitynymi sistemami*, Nauka, Moskwa, 1976.
6. J. ŁUCZKO, *Analiza dynamiczna i optymalizacja parametryczną pewnych modeli pneumatycznych narzędzi wibroudarowych*, Kraków, 1981 (rozprawa doktorska).
7. W. TROICKIJ, *Optimalnyje processy kolebanij mechaniczeskich sistem*, Maszynostroenie, Leningrad, 1976.

Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 — „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В предложенной работе исследуется проблема параметрической оптимизации динамических систем для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и разрывными координатами. Необходимые условия минимума функционала принимаются на основе вариационного исчисления. Предложенный численный метод решения задачи и определен алгоритм градиента функционала. В конкретном численном примере рассматривается параметрическая оптимизация пневмоударников.

Summary

PARAMETRICAL OPTIMIZATION OF DYNAMIC SYSTEMS WITH DISCONTINUOUS CHARACTERISTICS

The paper presents the problem of optimal choice of parameters of non-linear dynamic system. The mathematical model can be described by means of system of ordinary differential equations, whose right sides are discontinuous.

The author suggests the numerical gradient method for solving problem of optimization and proposes algorithm calculation of the functionals gradient. The preconditions of the minimum have been found with the aid of the variational calculus methods. The example refers to parametrical optimization of pneumatic, hand-held percussive tools.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 stycznia 1981 roku