

KSZTAŁT SKRZYPIEC A ELASTYKA EULERA

BOGDAN SKALMIERSKI

Politechnika Gliwicka

Hipoteza tajemnicy dobrego instrumentu [4,5,6] sugeruje, że boczki pierwotnie wyginano sprężyscie w celu uzyskania ósemkowatego kształtu skrzypiec. Jeśli tak jest, to zarys boczków powinien składać się z łuków powstałych w wyniku sprężystego odkształcenia prętów smukłych. Jak się okaże, ścisła analiza potwierdzi nasze przypuszczenie, a optymalny kształt skrzypiec będziemy mogli uzyskać za pomocą maszyny cyfrowej.

Niniejsza praca jest poświęcona różnym aspektom tej sprawy.

1. Zarys „ósemkowaty” skrzypiec

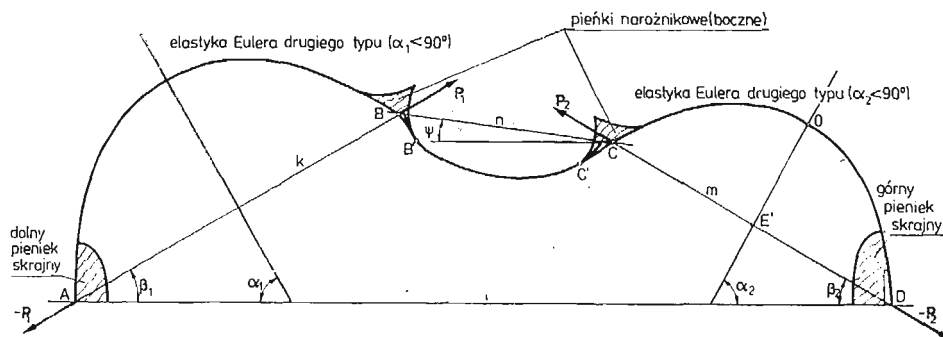
Zarys boczków ma oś symetrii, wystarczy zatem skupić swoją uwagę na lewej lub prawej części. Każda z tych połówek zawiera trzy łuki $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{CD}$, z których środek $\widehat{BC}$ ma krzywiznę innego znaku niż pozostałe części zarysu (patrz Rys. 1). Zachodzi pytanie, jakie krzywe matematyczne opisują poszczególne łuki zarysu boczków.

Powołując się na hipotezę [4, 5, 6] dobrego instrumentu, zauważamy, że wynika z niej, iż lutnicy szesnastego czy siedemnastego wieku otrzymywali kształty konturów instrumentów przez gięcie drewnianych listew, bez wykorzystania ciepła, a więc nie na gorąco, jak to się czyni obecnie. Jeżeli przyjmujemy, że to przypuszczenie jest słuszne, to wówczas łuki skrzypiec powinny odpowiadać jakiejś odkształconej formie smukłego pręta w stanie sprężystym. W ten sposób zbliżamy się do odpowiedzi na pytanie zasadnicze.

Odwołując się do konstrukcji skrzypiec, można uzasadnić sposób obciążenia pręta smukłego, który w sposób zgodny z hipotezą naprężeniową dobrego instrumentu wyzwoli w pudle rezonansowym odpowiednie siły.

Wiadomo, że zgodnie z tą hipotezą [4,5,6] płyty rezonansowe instrumentów powinny pozostawać w stanie obciążenia siłami rozciągającymi. Siły te można zrealizować przez działanie na pieńki skrajne A i D (rys. 1) siłami przeciwnymi do sił pochodzących od strun, [6]. W związku z tym łuki zarysu boczków pomiędzy skrajnymi a środkowymi pieńkami powinny działać na nie tak, jak ściśnięta sprężyna, a więc siłami na zewnątrz.

Na rysunku 1 przedstawiono ideę rozumienia funkcji boczków jako elastyk drugiego typu działających siłami P_1 i P_2 w punktach A i D pieńków skrajnych. Na początku zajmijmy się kształtem łuków $\widehat{AB}$ oraz $\widehat{CD}$. Założymy, iż są to elastyki Eulera drugiego typu (patrz [2] s. 103). Dla kompletności rozważań powtórzmy krótko tok rozumowania [2], prowadzący do matematycznej postaci równania tych łuków.



Rys. 1

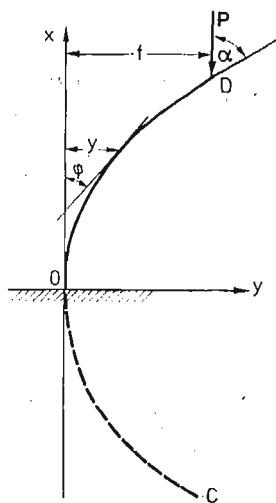
Jeżeli na pręt smukły w stanie wybooczenia sprężystego działają siły P (rys. 2), to wywołują zginanie momentem $M = P(f-y)$, gdzie $f = y_{\max}$. Zatem zgodnie z teorią zginania [3] mamy:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{P}{EJ}(f-y), \quad (1.1)$$

gdzie $\frac{1}{\varrho}$ jest krzywizną, E — modułem Younga, a J — momentem bezwładności przekroju pręta.

Ponieważ $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$, gdzie ds jest infinitezymalnym przyrostem długości łuku osi odkształconej pręta, przeto różniczkując (1.1) względem s oraz zauważając, że $\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$, otrzymujemy

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{P}{EJ} \sin \varphi. \quad (1.2)$$



Rys. 2

Tabela 1

α	60°		59°	
φ	x	y	x	y
0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.0174532	0.0001523	0.0177218	0.0001546
2	0.0349065	0.0006093	0.0354438	0.0006187
3	0.0523598	0.0013714	0.0531662	0.0013926
4	0.0698132	0.0024389	0.0708891	0.0024765
5	0.0872666	0.0038125	0.0886127	0.0038714
6	0.1047201	0.0054931	0.1063374	0.0055781
7	0.1221738	0.0074818	0.1240632	0.0075978
8	0.1396277	0.0097797	0.1417904	0.0099317
9	0.1570821	0.0123884	0.1595196	0.0125814
10	0.1745371	0.0153094	0.1772509	0.0155487
11	0.1919929	0.0185447	0.1949848	0.0188356
12	0.2094499	0.0220965	0.2127219	0.0224443
13	0.2269083	0.0259670	0.2304627	0.0263775
14	0.2443687	0.0301590	0.2482078	0.0306378
15	0.2618315	0.0346753	0.2659580	0.0352285
16	0.2792973	0.0395192	0.2837141	0.0401528
17	0.2967667	0.0346940	0.3014771	0.0454146
18	0.3142406	0.0502037	0.3192480	0.0510179
19	0.3317199	0.0560523	0.3370281	0.0569673
20	0.3492056	0.0622446	0.3548186	0.0632674
21	0.3666990	0.0687853	0.3726212	0.0699238
22	0.3842014	0.0756799	0.3904377	0.0769421
23	0.4017143	0.0829342	0.4082697	0.0843286
24	0.4192396	0.0905546	0.4261197	0.0920903
25	0.4367790	0.0985481	0.4439900	0.1002346
26	0.4543349	0.1069222	0.4618834	0.1087696
27	0.4719098	0.1156850	0.4798028	0.1177042
28	0.4895067	0.1248457	0.4977518	0.1270482
29	0.5071284	0.1344139	0.5157341	0.1368123
30	0.5247788	0.1444004	0.5337541	0.1470079
31	0.5424618	0.1548169	0.5518167	0.1576480
32	0.5601819	0.1656763	0.5699273	0.1687467
33	0.5779444	0.1769927	0.5880920	0.1803194
34	0.5957549	0.1887818	0.6063177	0.1923833
35	0.6136200	0.2010607	0.6246122	0.2049575
36	0.6315472	0.2138487	0.6429847	0.2180630
37	0.6495448	0.2271669	0.6614450	0.2317237
38	0.6676226	0.2410392	0.6800048	0.2459659
39	0.6857913	0.2554921	0.6986772	0.2608195
40	0.7040638	0.2705556	0.7174776	0.2763183
41	0.7224544	0.2862636	0.7364236	0.2925006
42	0.7409801	0.3026547	0.7555355	0.3094105
43	0.7596604	0.3197731	0.7748376	0.3270986
44	0.7785180	0.3376695	0.7943578	0.3456237
45	0.7975805	0.3564030	0.8141300	0.3650550
46	0.8168797	0.3760431	0.8341946	0.3854738

Tabela 1 (cd.)

α	60°		59°	
φ	x	y	x	y
47	0.8364544	0.3966714	0.8546006	0.4069780
48	0.8563517	0.4183859	0.8754082	0.4296854
49	0.8766291	0.4413052	0.8966920	0.4537414
50	0.8973587	0.4655749	0.9185475	0.4793276
51	0.9186317	0.4913774	0.9410972	0.5066761
52	0.9405659	0.5189450	0.9645033	0.5360892
53	0.9633171	0.5485807	0.9889869	0.5679733
54	0.9870969	0.5806918	1.014859	0.6028944
55	1.012204	0.6158436	1.042575	0.6416726
56	1.039074	0.6548553	1.072842	0.6855656
57	1.068383	0.6989797	1.106838	0.7366420
58	1.101252	0.7502711	1.146716	0.7986521
59	1.139724	0.8124347	1.197021	0.8794295
60	1.188073	0.8931491		

Całkując otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{P}{EJ} (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (1.3)$$

Stąd mamy

$$ds = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (1.4)$$

co prowadzi do określenia współrzędnych x oraz y

$$x = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (1.5a)$$

$$y = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (1.5b)$$

Wzory (1.5) i (1.5b) przy przyjęciu $\frac{P}{EJ} = 1$ zostały tablicowane dla kątów $\alpha = 60, 59$, które mogą być wykorzystane przy konstruowaniu zarysu łuków $\widehat{AB}$ oraz $\widehat{CD}$ (tabela 1). Przy konstruowaniu konturu proponuję przyjąć kąty α_1 oraz α_2 równe sobie, tzn. $\alpha_1 = \alpha_2$ (w skrzypcach Stradivariego 60°).

2. Kształt łuku $\widehat{BC}$

Studia nad kształtem talii skrzypiec prowadzą do spostrzeżenia, że kształt „C” mógł być osiągnięty przez przyłożenie do końców pręta jednocześnie siły P i momentu skupionego M_α (rys. 3). Równanie różniczkowe odkształconej postaci pręta będzie następujące

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{P}{EJ} \sin \varphi, \quad (2.1)$$

co prowadzi do całki pierwszej

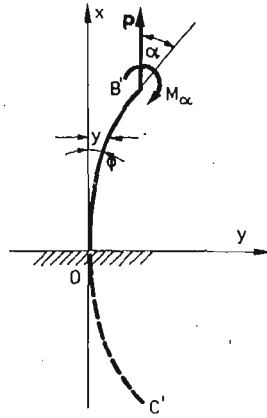
$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_\alpha}{EJ} \right)^2 + \frac{P}{EJ} (\cos \alpha - \cos \varphi). \quad (2.2)$$

Ponieważ

$$\frac{M_\alpha}{EJ} = \frac{1}{\varrho_\alpha}, \quad (2.3)$$

gdzie ϱ_α jest promieniem krzywizny końców pręta, przeto:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mp 1}{\varrho_\alpha} \sqrt{1 + \frac{4P}{M_\alpha} \varrho_\alpha \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (2.4)$$



Rys. 3

Przyjmując, że w początku układu współrzędnych promień koła ściśle stycznego do krzywej odkształconej postaci pręta wynosi ϱ_0 , napiszemy:

$$\left(\frac{1}{\varrho_0} \right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho_\alpha} \right)^2 \left(1 - \frac{4P}{M_\alpha} \varrho_\alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \quad (2.5)$$

stąd

$$\frac{4P}{M_\alpha} \varrho_\alpha = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0} \right)^2 \right). \quad (2.6)$$

Tabela 2 (cd.)

α	36°		37°	
	x	y	x	y
4	0.270821206	0.009317620	0.271213743	0.009337840
5	0.333257918	0.014227550	0.333966398	0.014272777
6	0.392807126	0.019957274	0.393927005	0.020042248
7	0.449351076	0.026395351	0.450965739	0.026536812
8	0.502884227	0.033438887	0.505061542	0.033654513
9	0.553479937	0.040996372	0.556271654	0.041303890
10	0.601262065	0.048988453	0.604704976	0.049494994
11	0.646383110	0.057347446	0.650501055	0.057889135
12	0.689008589	0.066016204	0.693814716	0.066697931
13	0.729306523	0.074946735	0.734805459	0.075782074
14	0.76744078	0.084098830	0.773630550	0.085100034
15	0.803567142	0.093438789	0.810440784	0.094616850
16	0.837831231	0.102938309	0.845378108	0.104303047
17	0.870367654	0.112573543	0.878574496	0.114133703
18	0.901299907	0.122324309	0.910151626	0.124087673
19	0.930740760	0.132173441	0.940221074	0.134146925
20	0.958792893	0.142106258	0.968884792	0.144296010
21	0.985549664	0.152110127	0.996235763	0.154521616
22	1.011095922	0.162174111	1.022358714	0.164812205
23	1.035508822	0.172288682	1.047330857	0.175157715
24	1.058858588	0.182445486	1.071222600	0.185549323
25	1.081209236	0.192637156	1.094098228	0.195979242
26	1.102619223	0.202857153	1.116016514	0.206440561
27	1.123142036	0.213099641	1.137031299	0.216927111
28	1.142826722	0.223359385	1.157191996	0.227343357
29	1.161718353	0.233631664	1.176544048	0.237954308
30	1.179858439	0.243912199	1.195129335	0.248485439
31	1.197285294	0.254197097	1.212986533	0.259022634
32	1.214034355	0.264482801	1.230151432	0.269562131
33	1.23013846	0.274766048	1.246657220	0.280100475
34	1.245628107	0.285043833	1.262534725	0.290634489
35	1.260531659	0.295313382	1.277812639	0.301161235
36	1.274875544	0.305572126	1.292517708	0.311677992
37			1.306674905	0.322182230

Podstawiając (2.6) do (2.4) otrzymujemy:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mp 1}{e_\alpha} \sqrt{\left(\frac{e_\alpha}{e_0}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{e_\alpha}{e_0}\right)^2\right]}. \quad (2.7)$$

Wiedząc, że przyjęty rodzaj obciążenia pręta powoduje jego odkształconą postać symetryczną względem osi y napiszemy wzory analogiczne do (1.5).

$$x = \varrho_\alpha \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2\right]}}, \quad (2.8a)$$

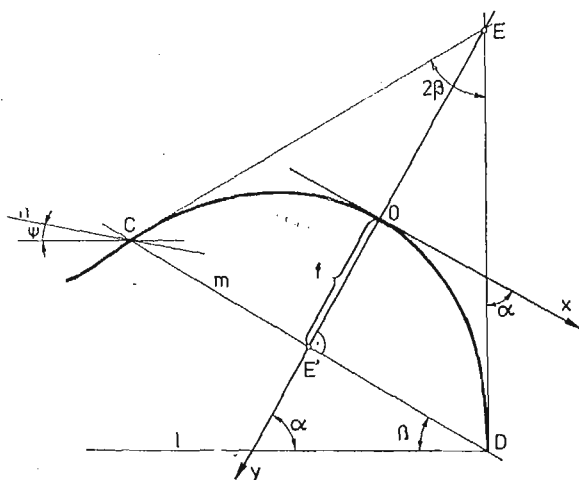
$$y = \varrho_\alpha \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_0}\right)^2\right]}}, \quad (2.8b)$$

Wzory (2.8) pozwalają na określenie kształtu talii skrzypiec. Wartości liczbowe współrzędnych x oraz y , dla różnych wartości kąta α oraz różnych stosunków krzywizn w centrum i na końcach pręta dla $\varrho_\alpha = 1$ zestawiono w tabeli 2.

3. Sposób wyznaczenia zarysu bocznych

Zaczynamy od przyjęcia kąta β . Kąt ten w skrzypcach klasycznych jest bliski 30° . Z dowolnego punktu D (rys. 4) prostą l kreślimy prostą m pod kątem β . Następnie przyjmujemy na prostej m punkt C . Do odcinka (CD) kreślimy następnie symetralną, a z punktu D prostą prostopadłą do prostej l do punktu przecięcia z symetralną odcinka (CD) . Otrzymujemy punkt E . Punkt E łączymy z punktem C . Otrzymany trójkąt CDE jest trójkątem równoramiennym o podstawie CD oraz o kącie $DEC = 2\beta$. Następnie korzystając z tabeli 1 wyznaczamy stosunek największego y do największego x i obliczamy:

$$f = \frac{1}{2} \frac{y_{\max}}{x_{\max}} (CD). \quad (3.1)$$



Rys. 4

Znając wartość f wyznaczamy punkt O będący początkiem układu współrzędnych x, y .

Na podstawie rys. 4 zauważamy, że $E'C = X_{\max}$ oraz $f = Y_{\max}$ (dużymi literami X oraz Y oznaczamy współrzędne na rysunku).

Oczywiście zachodzi

$$X = \frac{X_{\max}}{x_{\max}} x \quad (3.2)$$

oraz

$$Y = \frac{Y_{\max}}{y_{\max}} y, \quad (3.3)$$

przy czym

$$\frac{X_{\max}}{x_{\max}} = \frac{Y_{\max}}{y_{\max}}.$$

Wzory (3.2) i (3.3) umożliwiają wyznaczenie współrzędnych X i Y na podstawie tablicy I , co pozwoli na wykreślenie łuku $\widehat{DC}$ zarysu boczkw. W dalszym ciągu przez punkt C prowadzimy prostą n tworzącą z osią l kąt Ψ , na której wyznaczymy punkt B , z którego prowadzimy prostą k pod kątem β do osi l (rys. 1). Przecięcie prostej k z prostą l wyznacza punkt A .

Łuk elastyki pomiędzy punktami A i B wyznaczamy tak samo jak elastykę o łuku $\widehat{CD}$.

Punkty C i B (rys. 1) łączymy elastyką wg tabeli 2 wykreślając ją tak, ażeby w punkcie C łączące się krzywe miały wspólną styczną. Sposób wykreślenia łuku elastyki $\widehat{CB}$ jest analogiczny do sposobu wykreślenia łuku $\widehat{DC}$ wcześniej opisanego.

4. Uwagi i wnioski

Zauważamy, że na podstawie uzyskanych tabela 1 i 2 mogliśmy wyznaczyć zarys boczkw. Ogólnie można stwierdzić, że skrzypce starowłoskie mają łuki pomiędzy pieńkami skrajnymi a narożnikowymi bardzo zbliżone do elastyk Eulera drugiego typu ($\alpha < 90^\circ$). Odształcone boczki rozciągają płyty rezonansowe wzdłuż prostych łączących pieńki należące do tej samej elastyki Eulera.

Proste wyznaczające kierunki tych sił przechodzą przez centrum tzw. „policzków”. Wypadkowe siły od elastyk rozciągają całe pudło wzdłuż osi pudła rezonansowego. W przypadku równej sztywności zginania prętów siły utrzymujące je w stanie równowagi są większe w przypadku krótszych łuków, z tego powodu dolne „policzki” mogą być bardziej narażone na pojawienie się sił ściskających, pochodzących od naciągu strun. Jeżeli zatem pomiar wskazałby, że dolne „policzki” drgają z niedostateczną mocą, to w celu polepszenia własności akustycznej należałoby zwiększyć napięcie boczkw. W tym celu można odkleić dolny pieńek skrajny wraz z sąsiadującymi boczkwami i przesuwając go nieznacznie w głąb pudła rezonansowego, ponownie skleić części rozklejone. Jest to jeden ze sposobów korygujących rozkład sił wewnętrznych w pudle rezonansowym.

Prawdopodobnie Stradivarius dokonywał podobnych korekt w trakcie konstruowania nowego instrumentu. Za tym twierdzeniem przemawia fakt, iż jego instrumenty różnią się

wymiarami [1], co wskazywałoby, iż Stradivarius formy używał jedynie do wstępnego kształtowania boczków, po czym zdejmując je z formy miał duże pole do działania przy formowaniu optymalnych sił sprężystych kształtujących pola naprężeń płyt rezonansowych. Konsekwencją takich zabiegów jest odejście od kształtu formy. Mógł np. po zdjęciu wieńca z formy odkształcić go dość dowolnie bez listewek, a następnie przyklejając listewki powracać do kształtu wyjściowego odpowiadającego formie. To zbliżenie się ponownie do kształtu wyjściowego mogło być korygowane ze względu na konieczne siły.

Naturalnie poprawki te nie mogły naruszać zasadniczo podstawowych wymiarów. Niemniej jednak każdy z instrumentów Wielkiego Mistrza uzyskiwał indywidualne proporcje i jest mało prawdopodobne, ażeby Stradivarius dla każdego z nich budował odrębną formę.

Takie sprężyste formowanie wieńca boczków wymaga większych umiejętności lutnika.

Drewno, jak to niektórzy określają, przystosowuje się, i wydawałoby się, że po pewnym okresie siły w wieńcu boczków zanikną. Doświadczenie jednak pokazuje, że jakkolwiek procesy releksacyjne prowadzą do osłabienia sił wewnętrznych, to jednak nie doprowadzają ich do zera. Jest istotne, ażeby naprężenia residualne były właściwe. Naprężenia te trwają przez długie lata w drewnie, gdyż podtrzymuje je zdolność drewna do regeneracji naprężeń.

Hipoteza naprężeniowa nie tylko podsuwa koncepcję optymalnego rozwiązania kształtu wieńca boczków, ale również wzbogaca sztukę lutniczą o jeszcze jeden element, o pole naprężeń wstępnych w płytach rezonansowych. Znany i ceniony lutnik Akademii Muzycznej w Katowicach Stefan Węgrzyn wykonał już kilka egzemplarzy skrzypiec, których zarys boczków ściśle odpowiada kształtem elastikom Eulera.

Bibliografia

1. W. H. HILL, A. F. HILL, A. E. HILL, *Antonio Stradivari His Life and Work* (1644 - 1737) 1963 by Dover Publications, Inc., New York.
2. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, część II. PWN, Warszawa 1954.
3. B. SKALMIERSKI, *Mechanics and Strength of Materials*, Elsevier — PWN, 1979.
4. B. SKALMIERSKI, *Drgania pudła rezonansowego skrzypiec*. Zeszyty Nauk. Pol. Śl. „Górnictwo” Z. 89, Gliwice 1978.
5. B. SKALMIERSKI, *The Statics and Dynamics of the Sound Box of Stringed Instruments*. Bulletin De L'Academie, Vol. XXIX, No 9 - 10, 1981.
6. B. SKALMIERSKI, *The Construction of Old Italian Violins: A Tentative Explanation*. Bulletin De L'Academie, Vol. XXIX, No 9 - 10, 1981.

Резюме

ВИД СКРИПКИ А ЭЛАСТИКА ЭЙЛЕРА

В связи с работами [4, 5, 6] в которых представлено гипотезу секрета хорошего инструмента, здесь рассмотрена задача восьмеркового вида скрипки. Оказывается, что из предложенного гипотеза вытекает контур скрипки состоящий из кривых возникающих из упругой деформации гибких стержней.

Таким образом, исходя из проблемы эластичности Эйлера предложен метод определения контура скрипки.

S u m m a r y

SHAPE OF THE VIOLIN AND EULER'S ELASTICS

In connection with earlier papers [4, 5, 6] where a hypothesis of a secret of good instrument had been presented, here we consider the problem of the eight-shaped violin. It turns out, however, that the hypothesis implies the violin contour consisting of the curves resulting from the elastic displacement of slender bars. Thus, departing from the problem of Euler's elastics, the method has been proposed to determine the instrument contour.

Praca została złożona w Redakcji 13 marca 1984 roku
