MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3-4, 23 (1985)

OKREŚLENIE POPRZECZNEJ EFEKTYWNEJ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ KOMPOZYTU O JEDNOKIERUNKOWO UŁOŻONYCH WŁÓKNACH METODĄ KOLLOKACJI BRZEGOWEJ

JAN A. KOŁODZIEJ (POZNAŃ)

Politechnika Poznańska
IMS

1. Wprowadzenie

Problem określenia efektywnych własności transportu, takich jak przewodność elektryczna lub cieplna, przenikalność dielektryczna, współczynniki Lamégo lub któraś z pozostałych ośmiu wielkości wymienionych w pracy Batchelora [1], nie jest zagadnieniem nowym w literaturze. Maxwell [2] i Lord Rayleigh [3] są prawdopodobnie pierwszymi, którzy badali własności elektryczne i magnetyczne materiałów dyspersyjnych. W ostatnich latach dużo uwagi poświęcono efektywnym własnościom cieplnym materiałów kompozytowych, które składają się z włókien otoczonych osnową. Większość tych prac dotyczy przypadku, gdy włókna mają przewodność cieplną istotnie różną od osnowy, są ustawione regularnie w jednym kierunku i dostatecznie długie, ponieważ takie materiały mają korzystną sztywność w kierunku równoległym do osi włókien. W takim układzie teoretyczna efektywna przewodność cieplna materiału λ_{II} w kierunku włókien jest określona prostym „wzorem mieszaniny":

$$\lambda_{II} = \varphi\lambda_f + (1-\varphi)\lambda_m, \tag{1}$$

gdzie λ_m i λ_f są odpowiednio przewodnościami cieplnymi osnowy i włókien, natomiast φ jest objętościowym udziałem włókien w kompozycie.

W ten sposób λ_{II} jest niezależne od sposobu ułożenia włókien w płaszczyźnie prostopadłej do osi włókien. Efektywna przewodność cieplna kompozytu w kierunku prostopadłym do włókien zależy jednak od wspomnianego ułożenia.

Problem określenia poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej $\lambda_\perp$ był rozważany przez szereg autorów [4 - 24]. W tych pracach można wyróżnić cztery kierunki badań:

1) eksperymentalne określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [4 - 9];

2) określenie górnej i dolnej granicy możliwych numerycznych wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [8 - 13];

3) przy założeniu losowego rozkładu równoległych włókien określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [13 - 16];

4) dla regularnej i ściśle określonej geometrii rozmieszczenia włókien (np. w siatce kwadratowej) określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej [6 - 7, 14, 17 - 24].

Pracę Kellera [25] trudno jest umieścić w którymś z czterech wymienionych kierunków badań. W pracy tej podaje się twierdzenie dotyczące kompozytu z włóknami ułożonymi według siatki prostokątnej, które określa związek, jaki musi spełniać efektywna przewodność cieplna, jeśli przewodność cieplna osnowy przyjmie wartość przewodności cieplnej włókien, i odwrotnie.

Omówmy nieco szerzej czwarty z wymienionych kierunków badań, ponieważ niniejsza praca jest kontynuacją tego kierunku. We wspomnianej pracy Rayleigha [3] podano przybliżony wzór dla przypadku włókien ułożonych w siatce kwadratowej, który jest słuszny dla małych udziałów objętościowych włókien. W pracach [14] i [19], również dla siatki kwadratowej, zaproponowano przybliżony model wyznaczania $\lambda_\perp$, tzw. „model cieplny", w którym po wydzieleniu powtarzającego się elementu siatki zakłada się, że linie adiabatyczne są liniami prostymi równoległymi do średniego strumienia ciepła. Jak słusznie zauważyli Furmański i Gogół [9], wyznaczona przy takich założeniach efektywna przewodność cieplna jest dolną granicą dla efektywnej przewodności takiego kompozytu. W pracy [17] podano przybliżony sposób wyznaczania efektywnej przewodności cieplnej dla włókien ułożonych w siatce kwadratowej, który jest słuszny dla udziałów objętościowych włókien bliskich maksymalnemu przy założeniu, że włókna są doskonałymi przewodnikami lub doskonałymi izolatorami.

Wiele prac, w których wyznacza się zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła dla kompozytów o regularnej strukturze ułożenia włókien, opiera się na rozwiązaniu równania przewodzenia ciepła na poziomie mikrostruktury w powtarzającym się elemencie siatki. Prawdopodobnie po raz pierwszy takie podejście zastosowali Keller i Sachs [18] — którzy rozważali przypadek, gdy włókna są ułożone w siatce kwadratowej — zakładając, że są one doskonałymi izolatorami lub doskonałymi przewodnikami. Do wyznaczenia pola temperatury w powtarzającym się elemencie siatki stosowali oni metodę różnic skończonych. Springer i Tsai [14], oprócz propozycji przybliżonego modelu cieplnego, zauważyli analogię pomiędzy wyznaczaniem efektywnej przewodności cieplnej i zastępczego podłużnego modułu ścinania. Wyniki uzyskane w oparciu o przybliżony model porównywali oni z wynikami uzyskanymi dla podłużnego modułu ścinania obliczonego w oparciu o rozwiązanie na poziomie mikrostruktury uzyskane metodą różnic skończonych [26]. Dla siatki kwadratowej wyznaczenie zastępczego współczynnika przewodzenia w oparciu o rozwiązanie równania Laplace'a na poziomie mikrostruktury otrzymane brzegową metodą najmniejszych kwadratów można znaleźć w pracach [8] i [24], natomiast w pracy [21] tego samego podejścia użyto dla rozważenia siatki prostokątnej. W pracy [22] zastosowano z kolei metodę kollokacji z minimalizacją sumy kwadratu błędu w punktach kollokacji do wyznaczenia rozwiązania mikrostrukturalnego dla siatki prostokątnej i trójkątnej. Perrins ze współpracownikami [20] zastosowali ulepszoną metodę Rayleigha do wyznaczania rozwiązania w powtarzającym się elemencie siatki kwadratowej i trójkątnej równobocznej. Jeszcze inną metodę do wyznaczania rozwiązania równania przewodnictwa na poziomie mikrostruktury zaproponował Sekine [23], który wyznaczał efektywną przewodność cieplną dla kompozytu z cienkimi nie przewodzącymi włóknami rozmieszczonymi w węzłach siatki prostokątnej lub trójkątnej. Przedstawienie wtrąceń w postaci rozkładu pewnych źródeł ciepła pozwala sprowadzić zagadnienie do równania całkowego z jądrem typu Cauchy'ego, rozwiązania którego poszukuje się w postaci rozkładu w wielomiany Czebyszewa.

Jak wynika z dokonanego przeglądu prac poprzeczną efektywną przewodność cieplną wyznaczano tylko dla najprostszych regularnych sposobów ułożenia prętów w osnowie. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest podanie analityczno-numerycznego algorytmu wyznaczania poprzecznego efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla szerokiej klasy regularnych sposobów ułożenia włókien w osnowie. Proponowaną metodę stosuje się dla dowolnych stosunków przewodności cieplnej pręta do przewodności cieplnej osnowy, jak również dla dowolnych udziałów objętościowych prętów, z wyjątkiem granicznych wartości tych parametrów. Istotną cechą proponowanego algorytmu jest wykorzystanie metody kollokacji brzegowej do wyznaczenia rozwiązania równania przewodnictwa ciepła na poziomie mikrostruktury, co powoduje, że proponowana metoda pozwala uzyskać wymaganą dokładność z minimalnym komputerowym „wysiłkiem".

Należy zauważyć, że sposób określania efektywnej przewodności cieplnej kompozytu przyjęty w niniejszej pracy nie nawiązuje do żadnego z głównych kierunków badań teoretycznych kompozytów, tj. procedury wygładzania [27 - 29], czy procedury homogenizacji [30 - 32], natomiast jego istota jest najbliższa eksperymentalnemu badaniu kompozytów. Istotą niniejszej pracy jest propozycja prostych myślowych eksperymentów, które są tak pomyślane, aby umożliwiały wyznaczenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej przy zadanej mikrostrukturze kompozytu.

2. Algorytm określania poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej kompozytów z regularnym rozkładem włókien w osnowie

Rozważmy materiał kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach w osnowie. Włókna są rozmieszczone w regularny sposób według siatki kwadratowej, trójkątnej i sześciokątnej lub innej siatki, która jest kompozycją regularnych wielokątów (rys. 1a - 5a).

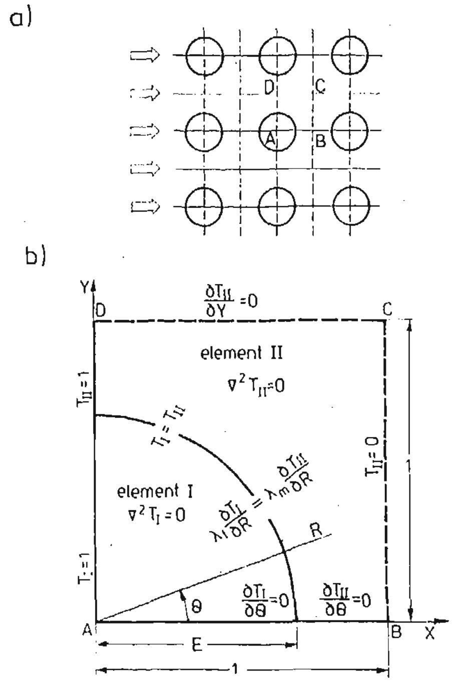
Wprowadzamy następujące wielkości charakteryzujące geometrię siatki: a — promień włókien, b — odległość pomiędzy sąsiadującymi włóknami. Stosunek średnicy włókien do odległości pomiędzy sąsiadującymi włóknami oznaczmy przez $E = \frac{2a}{b}$. Wielkość ta związana jest z objętościowym udziałem włókien φ (objętość włókien/całkowita objętość) zależnością, która dla sposobów ułożenia włókien przedstawionych na rys. 1a - 5a podana jest w tab. 1. Stosunek przewodności cieplnych oznaczmy przez $F = \frac{\lambda_f}{\lambda_m}$

Wprowadzamy następujące założenia:

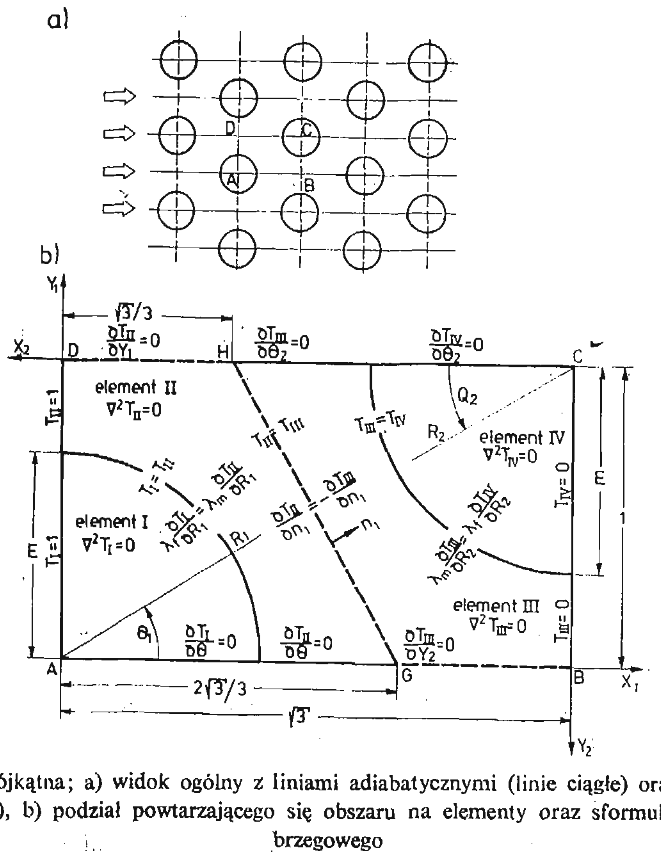
1) włókna są cylindrami o jednakowym promieniu, przy czym stosunek długości włókien do ich średnicy jest na tyle duży, że mogą one być traktowane jako nieskończenie długie;

2) materiał włókien i osnowy jest jednorodny i izotropowy;

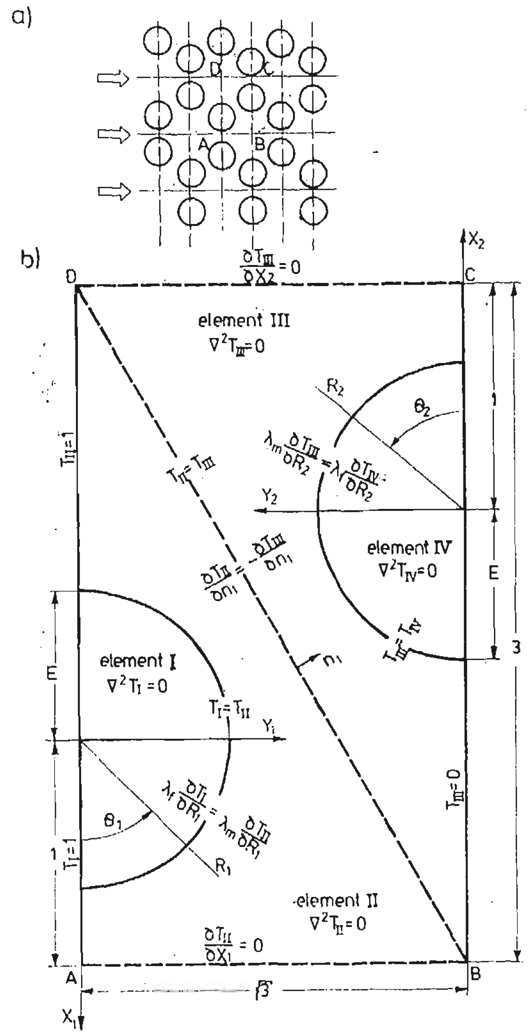
3) istnieje doskonały kontakt termiczny pomiędzy włóknami i osnową;



Rys. 1. Siatka kwadratowa; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane) b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego



Rys. 2. Siatka trójkątna; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego



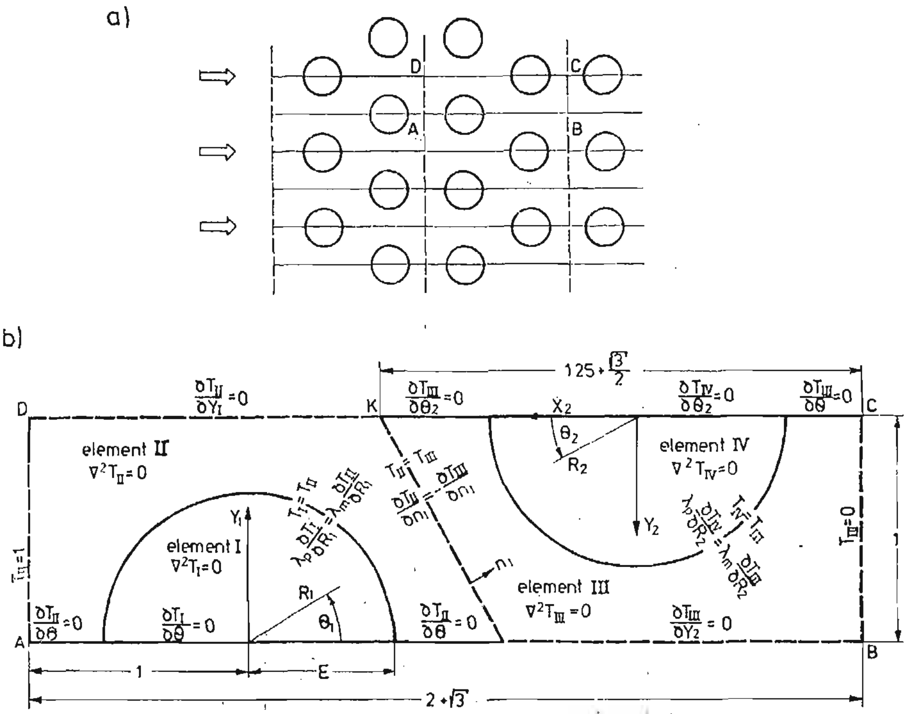
Rys. 3. Siatka sześciokątna; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego

4) płaski ustalony przepływ ciepła jest prostopadły do kierunku włókien;

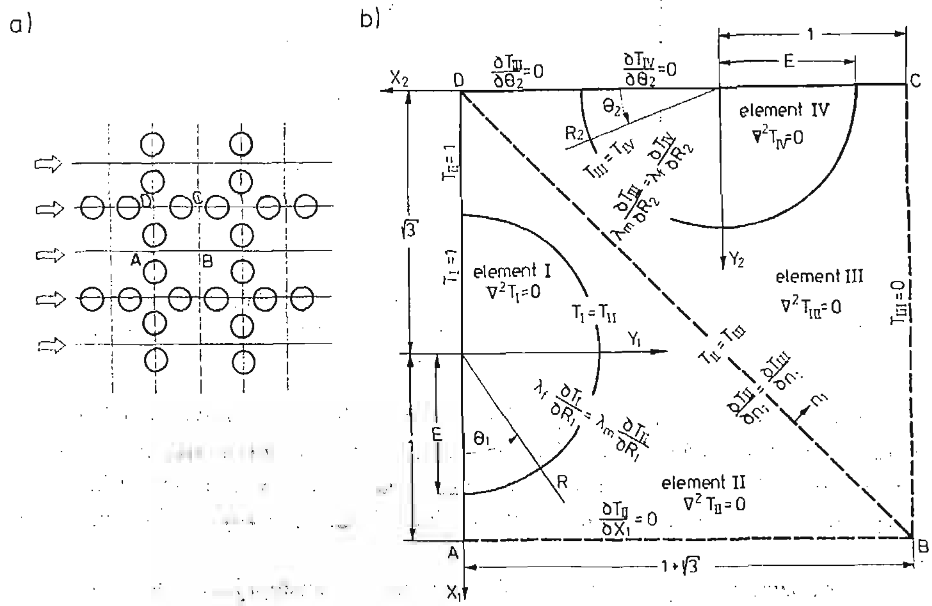
5) linie symetrii ułożenia włókien prostopadłe do kierunku średniego strumienia ciepła są liniami izotermicznymi (linie kreskowane na rys. 1a - 5a), natomiast linie symetrii równoległe do średniego strumienia ciepła są liniami adiabatycznymi (linie ciągłe na rys. 1a - 5a).

Po wprowadzeniu powyższych założeń proponujemy następujący algorytm określania poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej:

1. Wydzielić z rozważanego układu powtarzający się obszar ograniczony sąsiadującymi liniami adiabatycznymi i izotermicznymi, z którego poprzez przesunięcia i odbicia zwierciadlane można zbudować cały układ. Obszary takie dla rozważanych przykładowych



Rys. 4. Siatka trójkątno-kwadratowa; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego



Rys. 5. Siatka kwadratowo-ośmiokątna; a) widok ogólny z liniami adiabatycznymi (linie ciągłe) oraz izotermicznymi (linie przerywane), b) podział powtarzającego się obszaru na elementy oraz sformułowanie problemu brzegowego

Tablica 1

	Typ siatki				
	kwadratowa	trójkątna	sześciokątna	trójkątno-kwadratowa	kwadratowo-ośmiokątna
φ	$\frac{\pi E^2}{4}$	$\frac{\pi E^2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\pi E^2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\pi E^2}{2+\sqrt{3}}$	$\frac{\pi E^2}{(1+\sqrt{3})^2}$
$2M$	$2N-1$	$4N-2$	$4N-2$	$4N$	$4N-2$

sposobów ułożenia włókien zostały przedstawione na rys. 1b - 5b. Poprzeczna efektywna przewodność cieplna może być wyznaczona w oparciu o znajomość stacjonarnego pola temperatury w takich powtarzających się obszarach.

2. Podzielić powtarzający się obszar na tzw. „duże elementy skończone" [33] w sposób, którego przykłady podano na rys. 1b - 5b.

3. Sformułować problem brzegowy dla ustalonego pola temperatury w powtarzającym się obszarze. Na odcinkach, które dzielą obszar osnowy na dwie części, korzystamy z twierdzenia Duhema cytowanego przez Chen Yi-Zhou i Chen Yi-Henga [34]. Twierdzenie to głosi, że jest możliwa konstrukcja funkcji harmonicznej w obszarze Ω przez „zszycie" dwóch harmonicznych funkcji definiowanych w dwóch sąsiadujących podobszarach obszaru Ω. Warunkiem „zszycia" jest równość wartości tych funkcji oraz ich pochodnych normalnych na brzegu, który dzieli obszar Ω na podobszary. Przykłady sformułowań wspomnianych zagadnień brzegowych podano na rys. 1b - 5b.

4. Wybrać obcięte szeregi funkcji próbnych, które spełniają ściśle równanie różniczkowe w elementach powtarzającego się obszaru oraz część warunków brzegowych, w szczególności warunki brzegowe na granicy pręta i osnowy, jak również na niektórych liniach adiabatycznych i izotermicznych. Przykładowy sposób otrzymywania obciętych szeregów funkcji próbnych dla siatki kwadratowej podano w dodatku A. Obcięte szeregi funkcji próbnych dla przykładowo rozważanych układów z rys. 1 - 5 podano w tab. 2. Brzegi, na których obcięte szeregi spełniają warunki brzegowe w sposób ścisły, zaznaczono na rys. 1b - 5b linią ciągłą, natomiast brzegi, gdzie warunki brzegowe są spełniane w sposób przybliżony — linią przerywaną.

5. Wybrać punkty kollokacji na brzegach, gdzie warunki brzegowe są spełniane w sposób przybliżony. Dla rozważanych przypadków na każdym prostoliniowym odcinku brzegu, gdzie warunki brzegowe spełnia się kollokacyjnie, przyjęto N punktów kollokacji. Następnie założono równą odległość pomiędzy punktami kollokacji na tych odcinkach. Przykładowo dla siatki kwadratowej rozmieszczenie punktów oraz wzory określające współrzędne tych punktów podano na rys. 6.

6. Zastosować warunki brzegowe do obciętych szeregów funkcji próbnych w wybranych punktach kollokacji. Dzięki temu otrzymamy układ równań liniowych dla współczynników szeregu w postaci:

$$\sum_{j=1}^{2M} A_{ij} X_j = B_i \quad i = 1, 2, \ldots, 2M, \tag{2}$$

Tablica 2. Obcięte szeregi funkcji próbnych dla pięciu rozważanych sposobów ułożenia włókien

siatka kwadratowa

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{2M} X_K R^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta]$$

$$T_{II} = 1 + \sum_{K=1}^{2M} \frac{X_K}{2}\left[(1+F)R^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R^{(2K-1)}}\right]\cos[(2K-1)\theta]$$

siatka trójkątna

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{M} X_K R_1^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta_1]$$

$$T_{II} = 1 + \sum_{K=1}^{M} \frac{X_K}{2}\left[(1+F)R_1^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R_1^{(2K-1)}}\right]\cos[(2K-1)\theta_1]$$

$$T_{III} = \sum_{K=1}^{M} \frac{X_{M+K}}{2}\left[(1+F)R_2^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R_2^{(2K-1)}}\right]\cos[(2K-1)\theta_2]$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^{M} X_{M+K} R_2^{(2K-1)} \cos[(2K-1)]\theta_2$$

siatka sześciokątna

$$T_I = \sum_{K=1}^{M} X_K R_1^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{II} = \sum_{K=1}^{M} \frac{X_K}{2}\left[(1+F)R_1^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_1^{(K-1)}}\right]\cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{II} = \sum_{K=1}^{M} \frac{X_{M+K}}{2}\left[(1+F)R_2^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_2^{(K-1)}}\right]\cos[(K-1)\theta_2]$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^{M} X_{M+K} R_2^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_2]$$

siatka kwadratowo-trójkątna

$$T_I = \sum_{K=1}^{M} X_K R_1^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{II} = \sum_{K=1}^{M} \frac{X_K}{2}\left[(1+F)R_1^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_1^{(K-1)}}\right]\cos[(K-1)\theta_1]$$

$$T_{III} = \sum_{K=1}^{M} \frac{X_{M+K}}{2}\left[(1+F)R_2^{(K-1)} + (1-F)\frac{E^{2(K-1)}}{R_2^{(K-1)}}\right]\cos[(K-1)\theta_2]$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^{M} X_{M+K} R_2^{(K-1)} \cos[(K-1)\theta_2]$$

Tablica 2 (ciąg dalszy)

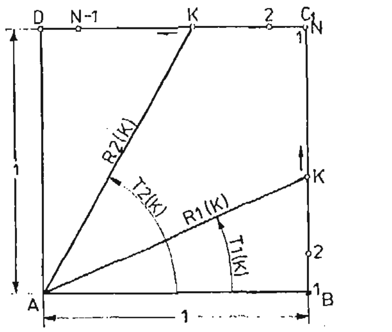
siatka kwadratowo-ośmiokątna

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{M} X_K R_1^K \sin(K\theta_1)$$

$$T_{II} = 1 + \sum_{K=1}^{M} \frac{X_K}{2}\left[(1+F)R_1^K + (1-F)\frac{E^{2K}}{R_1^K}\right]\sin(K\theta_1)$$

$$T_{III} = \sum_{K=1}^{M} \frac{X_{M+K}}{2}\left[(1+F)R_2^K + (1-F)\frac{E^{2K}}{R_2^K}\right]\cos(K\theta_2)$$

$$T_{IV} = \sum_{K=1}^{M} \frac{X_{M+K}}{2} R_2^K \cos(K\theta_2)$$



$$R1(K) = \frac{\sqrt{(N-1)^2 + (K-1)^2}}{N-1}, \quad T1(K) = \arccos\frac{N-1}{\sqrt{(N-1)^2 + (K-1)^2}} \qquad K = 1, 2, \ldots, N$$

$$R2(K) = \frac{\sqrt{(N-1)^2 + (N-K)^2}}{N-1}, \quad T2(K) = \arccos\frac{N-K}{\sqrt{(N-1)^2 + (N-K)^2}} \qquad K = 1, 2, \ldots, N-1$$

Rys. 6. Rozmieszczenie punktów kollokacji w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej

gdzie związek pomiędzy M i N podano w tabeli 1. Przykładowy sposób wyznaczania macierzy układu A_{ij} oraz wektora wyrazów wolnych B_i układu (2) podano w dodatku B.

7. Rozwiązać układ równań liniowych (2).
8. Określić poprzeczną efektywną przewodność cieplną ze wzoru:

$$\lambda_\perp = \frac{QL}{\Delta T}, \tag{3}$$

gdzie Q jest całkowitą ilością ciepła przewodzoną przez powtarzający się obszar kompozytu, ΔT — różnica temperatury na brzegach izotermicznych tego obszaru, L — odległość pomiędzy brzegami izotermicznymi. Dzięki zastosowanej metodzie otrzymuje się wzory w postaci zamkniętej dla $\lambda_\perp$, które dla rozważanych przypadków sposobów ułożenia włókien zostały podane w tab. 3. Przykładowy sposób określenia $\lambda_\perp$ dla siatki kwadratowej podano w dodatku C.

Tablica 3. Wzory dla poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej dla czterech typów rozważanych sposobów ułożenia włókien

siatka kwadratowa

$$\frac{\lambda_\perp}{\lambda_m} = \sum_{K=1}^{2M} X_K(-1)^{(K+1)}\left\{FE^{(2K-1)}+\frac{1}{2}\left\{(1+F)[1-E^{(2K-1)}]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-F)L^{(4K-2)}\left[1-\frac{1}{E^{(2K-1)}}\right]\right\}\right\}$$

siatka trójkątna

$$\frac{\lambda_\perp}{\lambda_m} = \sqrt{3}\sum_{K=1}^{M} X_K(-1)^{(K+1)}\left\{FE^{(2K-1)}+\frac{1}{2}\left\{(1+F)[1-E^{(2K-1)}]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-F)E^{(4K-2)}\left[1-\frac{1}{E^{(2K-1)}}\right]\right\}\right\}$$

siatka sześciokątna

$$\frac{\lambda_\perp}{\lambda_m} = 3\sum_{K=1}^{M} X_{2K}(-1)^{(K-1)}\left\{FE^{(2K-1)}+\frac{1}{2}\left\{(1+F)[(\sqrt{3})^{(2K-1)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-E^{(2K-1)}]-(1-F)E^{2(2K-1)}\left[\frac{1}{(\sqrt{3})^{(2K-1)}}-\frac{1}{E^{(2K-1)}}\right]\right\}\right\}$$

siatka kwadratowo-trójkątna

$$\frac{\lambda_\perp}{\lambda_m} = (2+\sqrt{3})\sum_{K=1}^{M} X_{2K}(-1)^{(K+1)}\left\{FE^{(2K-1)}+\frac{1}{2}\left\{(1+F)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot[1-E^{(2K-1)}]-(1-F)E^{2(2K-1)}\left[1-\frac{1}{E^{(2K-1)}}\right]\right\}\right\}$$

Należy tutaj zauważyć, że nie ma powodów, aby zakładać izotropię poprzecznego przewodnictwa dla wszystkich rozważanych kompozytów. Innymi słowy, zmieniając kierunek strumienia ciepła w płaszczyźnie prostopadłej do włókien, poprzeczna efektywna przewodność cieplna może ulec zmianie. W niniejszej pracy nie bada się tej zmiany, jakkolwiek opisana metoda może służyć do tego celu.

W przedstawionym algorytmie dla przybliżonego spełnienia warunków brzegowych zaproponowano najprostszą odmianę metody kollokacji brzegowej, zwanej prostą kollokacją brzegową. Polega ona na tym, że liczba punktów kollokacji pokrywa się z liczbą niewiadomych współczynników w wybranych szeregach funkcji próbnych oraz na ścisłym spełnieniu warunków brzegowych w tych punktach. Niektórzy autorzy, np. France [35], Hulbert [36], twierdzą, że lepsze wyniki uzyskuje się stosując metodę kollokacji brzegowej z minimalizacją sumy kwadratu błędu spełnienia warunku brzegowego w przyjętych punktach kollokacji. Wówczas liczba punktów kollokacji może być większa od liczby określanych współczynników. Jeśli zastosujemy procedurę opisaną wyżej, to układ równań liniowych (2) będzie układem nadokreślonym. Zakładając, że suma kwadratów błędów spełnienia warunku brzegowego jest minimalna, otrzymuje się układ równań liniowych w postaci

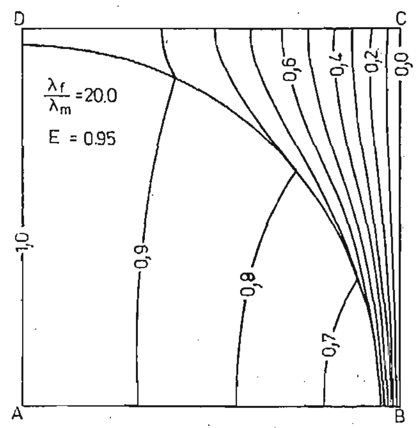
$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}, \tag{4}$$

w którym liczba niewiadomych jest równa ilości równań.

W niniejszej pracy stosuje się obie odmiany metody kollokacji brzegowej.

3. Rezultaty numeryczne

Istotnym punktem proponowanego algorytmu jest wyznaczenie stacjonarnego pola temperatury, opisywanego płaskim równaniem Laplace'a, w powtarzającym się elemencie układu. Obecnie istnieje wiele metod numerycznego rozwiązywania płaskiego równania Laplace'a. Do najbardziej znanych należą metoda różnic skończonych i metoda elementów skończonych. Stosowana w niniejszej pracy metoda kollokacji brzegowej, jak również pokrewne jej metody, nazywane ogólnie metodami brzegowymi, są znacznie mniej rozpowszechnione. Przed przystąpieniem do rozwiązania konkretnego zagadnienia brzegowego należy zdecydować się na określoną metodę. Powstaje wówczas pytanie, która ze znanych metod zapewnia dostateczną dokładność wyników przy minimalnym nakładzie pracy komputera i przygotowującego obliczenia. Metoda różnic skończonych i elementów skończonych tracą, między innymi, swą dokładność, jeśli występują duże gradienty przestrzenne poszukiwanych funkcji. W rozważanym problemie, dla niektórych wartości F i E, istnieją duże gradienty temperatury, co ilustruje przykładowe pole temperatury podane na rys. 7. Jak wynika z tego rysunku, przy odpowiednio dużych wartościach F oraz dla

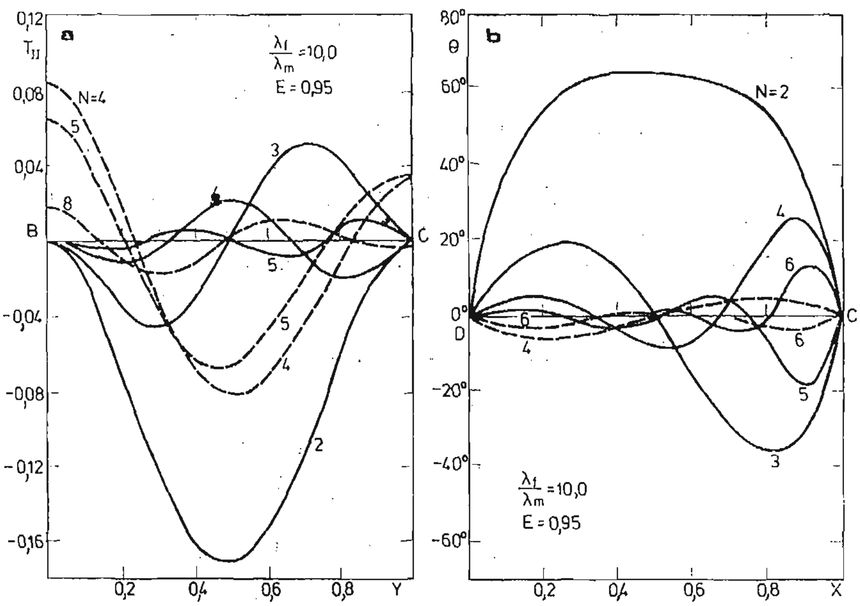


Rys. 7. Przykładowe pole temperatury w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej dla $E = 0{,}95$, $F = 20$

wartości E bliskich maksymalnym, w otoczeniu punktu B występują duże gradienty temperatury. Jest to jedna z przyczyn, z powodu której metoda kollokacji brzegowej wydaje się bardziej odpowiednia do rozwiązywania rozważanych problemów brzegowych od popularnych metod różnic skończonych i elementów skończonych. Do innych przyczyn należy zaliczyć znacznie niższy wymiar układu równań liniowych, jaki należy rozwiązywać numerycznie przy stosowaniu metody kollokacji brzegowej.

W proponowanej metodzie rozwiązywania zagadnień brzegowych warunki brzegowe na części brzegu rozważanego obszaru zostały spełnione w sposób przybliżony. Spełnia się je ściśle tylko w skończonej liczbie $2M$ punktów lub minimalizuje się sumę kwadratu błędu spełnienia warunku w skończonej liczbie $2M$ punktów.

Intuicyjnie może się wydawać, że zwiększając liczbę punktów kollokacji zwiększamy dokładność spełnienia warunków brzegowych, a tym samym dokładność otrzymywanych rezultatów. Eksperymenty numeryczne nie potwierdzają jednak w pełni takiego przypuszczenia. Okazuje się, że liczba punktów kollokacji nie musi być duża, aby uzyskać odpowiednio mały maksymalny błąd spełnienia warunku brzegowego pomiędzy punktami kollokacji. Sytuację tę ilustrują rys. 8, gdzie podano wykresy błędu spełnienia warunku brzegowego na brzegach powtarzającego się obszaru siatki kwadratowej. Widzimy, że już przy kilku punktach kollokacji maksymalny błąd jest mały.



Rys. 8. a) Przykładowy błąd spełnienia warunku brzegowego $T_{II} = 0$ w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej; linia ciągła przy czystej kollokacji, linia przerywana dla kollokacji z minimalizacją sumy kwadratu błędu w punktach kollokacji. b) Przykładowy błąd spełnienia warunku brzegowego $\frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = \operatorname{tg}\theta = 0$ w powtarzającym się elemencie siatki kwadratowej; linia ciągła dla kollokacji czystej, linia przerywana dla kollokacji z minimalizacją sumy kwadratu błędu w punktach kollokacji

Z drugiej strony powiększanie liczby punktów kollokacji prowadzi w końcu do złego uwarunkowania układu równań (2). Związane to jest z faktem, że zgęszczanie punktów kollokacji powoduje, iż sąsiadujące z sobą równania w układzie (2), wynikające ze spełnienia warunku brzegowego w sąsiadujących punktach kollokacji, niewiele różnią się od siebie. Sytuację utraty dokładności otrzymywanych rezultatów wskutek złego uwarun-

Tablica 4. Wpływ ilości punktów kollokacji N na poprzeczną efektywną przewodność cieplną oraz uwarunkowanie układu dla E = 0,1, F = 0,1 dla siatki kwadratowej

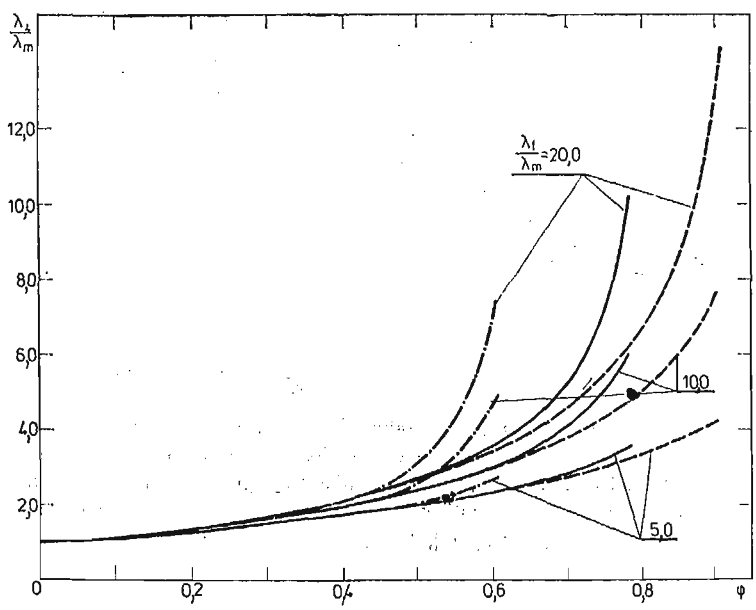
Wymiar układu liniowego	$\frac{\lambda_\perp}{\lambda_m}$	β
3	0,98375	~ 10
5	0,98374	$\sim 10^2$
7	0,98374	$\sim 10^2$
9	0,98374	$\sim 10^3$
11	0,98374	$\sim 10^4$
13	0,98374	$\sim 10^5$
15	0,98374	$\sim 10^7$
17	−0,92409	$\sim 10^8$

kowania układu liniowego ilustruje tab. 4. Jako miarę uwarunkowania przyjęto „N — warunkującą liczbę macierzy $\boldsymbol{A}$" daną wzorem {[37], str. 222}:

$$\beta = \frac{1}{2M} \|\boldsymbol{A}\|_{III} \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{III}, \tag{5}$$

gdzie

$$\|\boldsymbol{A}\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} A_{ij}^2}. \tag{6}$$

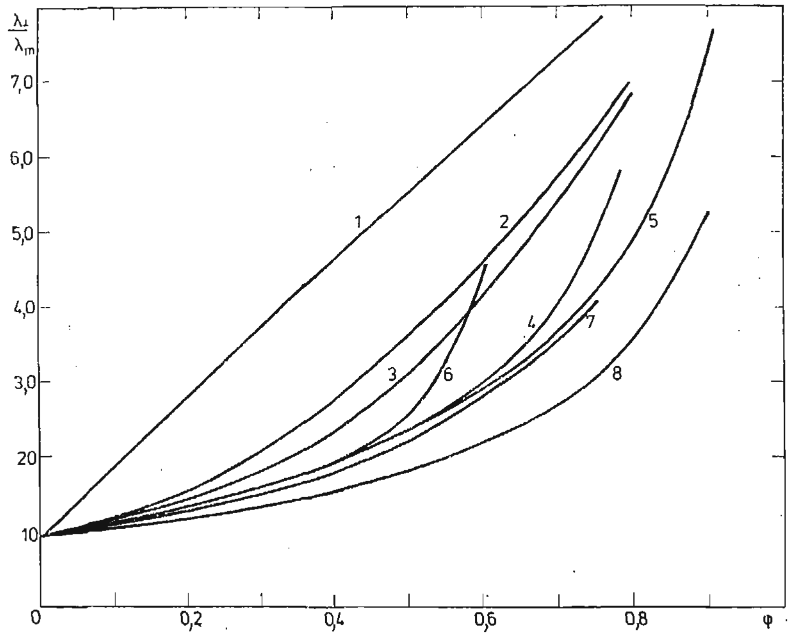


Rys. 9. Wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej $\lambda_\perp$ w funkcji udziału objętościowego włókien dla trzech sposobów ułożenia włókien: — — — wg siatki trójkątnej, ——— wg siatki kwadratowej, –·–·– wg siatki sześciokątnej

W przedstawionym w tab. 4 przykładzie wyniki są stabilne począwszy od pięciu punktów kollokacji, jednak przy siedemnastu punktach kollokacji przestają być sensowne wskutek złego uwarunkowania układu liniowego.

Na rys. 9. zostały przedstawione wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej w funkcji udziału objętościowego włókien dla trzech typów siatek. Z rysunku wynika, że dla małych udziałów objętościowych włókien ich ułożenie nie ma wpływu na efektywną przewodność cieplną. Jednak dla udziałów objętościowych bliskich maksymalnym sposób ułożenia włókien ma istotny wpływ na przewodność cieplną. Stosunek przewodności cieplnej prętów i osnowy ma również istotny wpływ na efektywną przewodność cieplną przy dużych udziałach objętościowych włókien.

Na rys. 10 porównano wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej otrzymane w niniejszej pracy z wynikami innych autorów. Na uwagę zasługuje fakt, że dla siatki kwadratowej i trójkątnej wyniki proponowanej metody są zgodne z wynikami innych autorów. Wyjątkiem jest tutaj wzór empiryczny podany w pracy [6], jednak w konfrontacji z innymi wynikami doświadczalnymi [4 - 5] nie budzi on zaufania.



Rys. 10. Wartości poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej $\lambda_\perp$ wg różnych autorów dla $F = 10$: *1* — wzór (1) dla λ_{II}, *2* — górna granica [10], *3* — losowe ułożenie włókien [15], *4* — siatka kwadratowa — wyniki proponowanego modelu oraz [7, 8, 22], *5* — siatka trójkątna — wyniki proponowanego modelu oraz [7, 22], *6* — siatka sześciokątna — wyniki proponowanego modelu, *7* — siatka kwadratowa — wzór empiryczny [6], *8* — dolna granica [10]

DODATEK A. WYZNACZENIE OBCIĘTYCH SZEREGÓW FUNKCJI PRÓBNYCH DLA SIATKI KWADRATOWEJ

Rozważmy powtarzający się obszar siatki kwadratowej. Obszar ten został podzielony na dwa elementy w sposób pokazany na rys. 1b, gdzie również podano sformułowanie problemu brzegowego. Celem otrzymania obciętych szeregów funkcji próbnych dla tych elementów weźmy pod uwagę ogólne rozwiązanie dwuwymiarowego równania Laplace'a w biegunowym układzie współrzędnych (R, θ) odpowiednio w elemencie I

$$T_I = A_0^I + A_1^I\theta + A_2^I\theta\ln R + A_3^I\ln R + \sum_{n=1}^{\infty}\{(B_n^I R^n + C_n^I R^{-n})\cos n\theta + (D_n^I R^n + E_n^I R^{-n})\sin n\theta\}, \tag{A1}$$

oraz w elemencie II

$$T_{II} = A_0^{II} + A_1^{II}\theta + A_2^{II}\theta\ln R + A_3^{II}\ln R + \sum_{n=1}^{\infty}\{(B_n^{II} R^n + C_n^{II} R^{-n})\cos n\theta + (D_n^{II} R^n + E_n^{II} R^{-n})\sin n\theta\}, \tag{A2}$$

gdzie $A_0^I, A_1^I, \ldots, E_n^I, A_0^{II}, A_1^{II}, \ldots, E_n^{II}$ są stałymi, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Z warunków $\frac{\partial T_I}{\partial\theta} = \frac{\partial T_{II}}{\partial\theta} = 0$ dla $\theta = 0$ wynika, że

$$A_1^I = A_1^{II} = A_2^I = A_2^{II} = 0 \tag{A3}$$

oraz

$$D_n^I = E_n^I = D_n^{II} = E_n^{II} = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{A4}$$

Uwzględniając warunki $T_I = T_{II} = 1$ dla $\theta = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy

$$A_0^I = A_0^{II} = 1 \tag{A5}$$

oraz że dopuszczalne są następujące wartości

$$n = 1, 3, 5, \ldots \tag{A6}$$

Z uwagi na fakt, że T_I musi być ograniczone dla $R = 0$, otrzymujemy

$$A_3^I = C_n^I = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{A7}$$

Jeśli uwzględnimy otrzymane wyniki w (A1) i (A2), otrzymamy następujące równania na rozkład temperatury odpowiednio w I i II elemencie

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{\infty} B_K^I R^{(2K-1)}\cos[(2K-1)\theta] \tag{A8}$$

oraz

$$T_{II} = 1 + A_3^{II}\ln R + \sum_{K=1}^{\infty}(B_K^{II} R^{(2K-1)} + C_K^{II} R^{-(2K-1)})\cos[(2K-1)\theta]. \tag{A9}$$

Uwzględniając warunki brzegowe na granicy elementów powtarzającego się obszaru (na granicy pręta i osnowy), tj. $T_I = T_{II}$ oraz $\lambda_f \frac{\partial T_I}{\partial R} = \lambda_m \frac{\partial T_{II}}{\partial R}$ przy $R = E$ otrzymujemy

$$A_3^{II} = 0, \tag{A10}$$

$$B_K^{II} = B_K^I \frac{1}{2}(1+F), \tag{A11}$$

$$C_K^{II} = B_K^I \frac{1}{2}(1-F)E^{4K-2}. \tag{A12}$$

Po podstawieniu (A10 - A12) do (A8) i (A9) oraz wprowadzając oznaczenie $B_K^I = X_K$ i obcinając nieskończone szeregi do $2M$ pierwszych wyrazów otrzymujemy poszukiwane szeregi obciętych funkcji próbnych dla siatki kwadratowej odpowiednio w elemencie I

$$T_I = 1 + \sum_{K=1}^{2M} X_K R^{(2K-1)} \cos[(2K-1)\theta] \tag{A13}$$

oraz w elemencie II

$$T_{II} = 1 + \sum_{1=K}^{2M} \frac{X_K}{2}\left[(1+F)R^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R^{(2K-1)}}\right]\cos[(2K-1)\theta], \tag{A14}$$

gdzie X_K są stałymi do wyznaczenia z niewykorzystanych jeszcze warunków brzegowych (do wyznaczenia metodą kollokacji).

W podobny sposób otrzymujemy pozostałe obcięte szeregi funkcji próbnych podane w tab. 1, biorąc pod uwagę ogólne rozwiązania w postaci (A1) w każdym z elementów i odpowiednio je upraszczając dzięki wykorzystaniu warunków brzegowych na brzegach zaznaczonych liniami ciągłymi.

DODATEK B. WYZNACZENIE MACIERZY UKŁADU I WEKTORA WYRAZÓW WOLNYCH W UKŁADZIE RÓWNAŃ (2) DLA SIATKI KWADRATOWEJ

W obciętych szeregach funkcji próbnych (A13) i (A14) opisujących pole temperatury w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej występuje $2M$ nieznanych współczynników $X_1, X_2, \ldots, X_{2M}$, do wyznaczenia których dysponujemy następującymi warunkami brzegowymi:

$$T_{II} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1, \tag{B1}$$

$$\frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = 0 \quad \text{dla} \quad Y = 1. \tag{B2}$$

Po podstawieniu (A14) do (B1) i (B2) i po skorzystaniu ze wzoru

$$\frac{\partial T_{II}}{\partial Y} = \frac{\partial T_{II}}{\partial R}\sin\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial T_{II}}{\partial \theta}\cos\theta \tag{B3}$$

otrzymujemy

$$1 + \sum_{K=1}^{2M} \frac{X_K}{2}\left[(1+F)R^{(2K-1)} + (1-F)\frac{E^{(4K-2)}}{R^{(2K-1)}}\right]\cos[(2K-1)\theta] = 0 \,\text{dla}\, R = \frac{1}{\cos\theta}, \tag{B4}$$

$$\sum_{K=1}^{2M} \frac{X_K}{2}(2K-1)\left\{(1+F)R^{(2K-2)}\sin[2(K-1)\theta] + \right.$$
$$\left. + (1-F)\frac{E^{4K-2}}{R^{2K}}\sin(2K\theta)\right\} = 0 \,\text{dla}\, R = \frac{1}{\sin\theta}. \tag{B5}$$

Zakładając, że warunki brzegowe spełniamy w przyjętych punktach kollokacji, których współrzędne zostały podane na rys. 6; po skorzystaniu z (B4) i (B5) otrzymujemy następującą postać macierzy układu i wektora wyrazów wolnych w układzie równań (2) dla siatki kwadratowej

$$A_{IJ} = \left[(1+F)R1(I)^{(2J-1)}+(1-F)\frac{E^{(4J-2)}}{R1(I)^{(2J-1)}}\right]\cdot\cos[(2J-1)T1(I)], \tag{B6}$$

$$I = 1, 2, \ldots, N,$$
$$J = 1, 2, \ldots, 2M = 2N-1,$$

$$A_{IJ} = (2J-1)\left\{(1+F)R2(K)^{(2J-2)}\cdot\sin[2(J-1)T2(K)]+\right.$$
$$\left.+(1-F)\frac{E^{(4J-2)}}{R2(K)^{2J}}\sin[2J\cdot T2(K)]\right\} \tag{B7}$$

$$I = N+K,$$
$$K = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$J = 1, 2, \ldots, 2M = 2N-1,$$

$$B(I) = -2 \quad \text{dla} \quad I = 1, 2, \ldots, N$$
$$B(I) = 0 \quad \text{dla} \quad I = N+K,\ K = 1, 2, \ldots, N-1.$$

DODATEK C. OBLICZENIE DLA $\lambda_\perp$ SIATKI KWADRATOWEJ

Dla siatki kwadratowej we wzorze (3) mamy (patrz rys. 1b)

$$L = 1 \quad \text{i} \quad \Delta T = 1. \tag{C1}$$

Całkowitą ilość ciepła przewodzoną przez powtarzający się obszar kompozytu w tym przypadku obliczamy ze wzoru

$$Q = -\lambda_f\int\limits_0^E\left(\frac{1}{R}\frac{\partial T_I}{\partial\theta}\right)\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}dR-\lambda_m\int\limits_E^1\left(\frac{1}{R}\frac{\partial T_{II}}{\partial\theta}\right)\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}dR. \tag{C2}$$

Uwzględniając wzory (A13) i (A14) przy obliczaniu $\frac{\partial T_I}{\partial\theta}$ i $\frac{\partial T_{II}}{\partial\theta}$ po dokonaniu całkowania i pewnych przekształceń otrzymujemy

$$\frac{\lambda_\perp}{\lambda_m} = \sum_{K=1}^{2M}X_K\left\{FE^{(2K-1)}+\frac{1}{2}\left\{(1+F)[1-E^{(2K-1)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-(1-F)]E^{(4K-2)}\left[1-\frac{1}{E^{(2K-1)}}\right]\right\}\right\}(-1)^{(K-1)}. \tag{C3}$$

Literatura cytowana w tekście

1. G. K. BATCHELOR, *Transport properties of two-phase materials with random structure*, A. Rev. Fluid Mech., vol. 6, pp. 227 - 255, 1974.
2. J. C. MAXWELL, *A treatise on electricity and magnetism*, Oxford Univ. Press., pp. 435 - 441, 1904.

3. Lord RAYLEIGH, *On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium*, Phil. Mag., vol. 43, pp. 481 - 502, 1982.
4. M. M. Z. KHARADLY, W. JACKSON, Instn. elect. Engrs, vol. 100. pp. 199 - 212, 1952.
5. J. D. THORNBURG, C. D. PEARS, *Prediction of the Thermal Conductivity of Filled and Reinforced Plastics*, ASME Paper 65-WA/HT-4, 1965.
6. D. M. KARPINOS, V. S. KLIMENKO, V. H. KADYROW, *Transport properties in fibre reinforced aluminium matrices*, High Temperatures — High Pressures, vol. 5, no 1, pp. 13 - 17, 1973.
7. W. T. PERRINS, R. C. MCPHEDRAN, D. R. McKenzie, *Optical properties of dense regular cermets with relevance to selective solar absorbers*, Thin Solid Films, 57. no. 2, pp. 321 - 326, 1979.
8. P. FURMAŃSKI, W. GOGÓŁ, *Badanie ustalonego przewodzenia ciepła w dwuwymiarowym modelu kompozytu z symetrycznie rozmieszczonymi włóknami o przekroju kołowym*, Archiwum Termodynamiki, vol. 1, nr. 1, str. 63 - 80, 1980.
9. P. FURMAŃSKI, W. GOGÓŁ, *Wyznaczenie ograniczeń efektywnej przewodności cieplnej kompozytów*. Archiwum Termodynamiki, vol. 2, nr 3 - 4, str. 255 - 278, 1981.
10. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *A Variational Approach to the Theory of Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials*, Journal of Applied Physics, vol. 33, no. 10, pp. 3125 - 3130, 1962.
11. W. F. BROWN, *Dielectric constants, permeabilities and conductivities of random media*, Transcations of the Society of Rheology, vol. 9, part 1, pp. 357 - 380, 1965.
12. M. J. BERAN, N. R. SILMUTZER, *Effective Electrical, Thermal and Magnetic Properties of Fiber Reinforced Materials*, Jour. Composite Materials, vol. 5, no. 3, pp. 246 - 249, 1971.
13. J. J. MCCOY, *Bounds on the transverse effective conductivity of computer-generated fiber composites*, J. Appl. Mech., vol. 49, no. 2, pp. 319 - 326, 1982.
14. G. S. SPRINGER, S. W. TSAI, *Thermal Conductivities of Unidirectional Materials*, Jour. Composite Materials, vol. 1, no. 2, pp. 166 - 173, 1967.
15. W. E. A. DAVIES, *The dielectric constant of fibre composites*, Jour. of Physics D: Applied Physics, vol. 7, no. 1, pp. 120 - 130, 1974.
16. Z. HASHIN, *Theory of fiber-reinforced materials*, NASA CR-1974, 1972 (na podstawie cytowania przez R. M. Christensen: *Mechanics of composite materials*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto).
17. J. B. KELLER, *Conductivity of a Medium Containing a Dense Array of Perfectly Conducting Spheres or Cylinders or Nonconducting Cylinders*, Jour. Appl. Phys., vol. 34, no. 3, pp. 991 - 993, 1963.
18. H. KELLER, D. SACHS, *Calculations of the conductivity of a medium containing cylindrical inclusions* J. Appl. Phys., pp. 537 - 538, 1964.
19. W. KNAPPE, H. J. OTT, G. WAGNER, *Berechnung und Messung der Warmeleitfahigkeit von glaserverstarkten Kunststoffen*, Kunststoffe, vol. 68, H. 7, pp. 420 - 426, 1978.
20. W. T. PERRINS, D. R. MCKENZIE, R. C. MCPNEDRAM, *Transport properties of regular arrays of cylinders*, Prac. Roy. Soc. Lond. A369, pp. 207 - 225, 1979.
21. P. FURMAŃSKI, W. GOGÓŁ, *Określenie efektywnej przewodności cieplnej kompozytów wzmacnianych ciągłymi włóknami o przekroju kołowym*, Archiwum Termodynamiki, vol. 1, nr 3 - 4, str. 199 - 209, 1980.
22. L. S. HAN, A. A. COSNER, *Effective Thermal Conductivities of Fibrous Compositie*s, Jour. Heat Transfer, no. 2, pp. 387 - 392, 1981.
23. H. SEKINE, *On the effective thermal conductivity of composite materials with periodically spaced thin insulators*, Compos. Mater.: Mech., Mech. Prop. and Fabr. Jap.-US Conf., Tokyo 12 - 14 Jan., 1981, Barking, 1981, pp. 330 - 338.
24. A. S. SANGANI, A. ACRIVOS, *Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfers*, Int. J. Multiphase Flow, vol. 8, no. 3, pp. 193 - 206, 1982.
25. J. H. KELLER, *A Theorem on the Conductivity of a Composite Medium*, Jour. Mathem. Phys., vol. 5, no. 4, pp. 548 - 549, 1964.
26. D. F. ADAMS, D. R. DONER, *Transverse Normal Loading of a Unidirectional Composite*, Jour. Composite Materials, vol. 1, no. 1, pp. 152 - 159, 1967.
27. J. B. KELLER, *Effective behavior of heterogeneous media, Statistical mechanics and statistical methods in theory and applications, R. Landman*, ed., pp. 631 - 644, Plenum, New York 1977.

28. D. R. AXELROD, *Micromechanics of solids, Elsevier Scientific Publ.*, New York 1978.
29. M. J. BERAN, J. J. McCOY, *Mean field variation in random media*, Q. Appl. Math. vol. 37, no. 2, pp. 245 - 258, 1970.
30. I. BABUSKA, *Homogenization and its application. Mathematical and computational problems*, Numerical solution of partial differential equations — III, B. Hubbard, ed. Academic Press, New York, pp. 89 - 116, 1976.
31. A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analisis for Periodic Structures*, North — Holland, Amsterdam 1978.
32. E. SANCHEZ — PALENCIA, *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin 1980.
33. P. JANSSENS, M. D. TOLLEY, *On the deformation of elastic plates*, Z. Angew. Phys., vol. 30, no. 2, pp. 234 - 242, 1979.
34. CHEN YI-ZHOU, CHEN YI-HENG *Solutions of the torsion probem for bars with* L — [— + and T — *cross-section by harmonic continuation technique*, Int. J. Eng. Sci., vol. 19, no. 6, pp. 791 - 804, 1981.
35. D. M. FRANCE, *Analytical Solution to Steady-State Heat Conduction Problems with Irregulary Shaped Boundaries*, J. Heat Transfer, Trans. ASME, ser. C, vol. 93, no. 4, pp. 449 - 454, 1971.
36. L. E. HULBERT, F. A. SIMONSEN, *Analisis of Stresses in Shallow Spherical Shells With Periodically Spaced Holes*, Jour. of Engng. for Industry. Trans. ASME, ser. B, vol. 92, 1970.
37. B. KOWALCZYK, *Macierze i ich zastosowania*, WNT, Warszawa 1976.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТОВ УКРЕПЛЕННЫХ ВОЛОКНАМИ РАЗПОЛОЖЕННЫМИ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНОЙ КОЛЛОКАЦИИ

На основе метода граничной коллокации представлено общий метод определения перпендикулярной эффективной теплопроводности композитов укрепленных волокнами разположенными в одном направлении. В этом анализе предполагается знакомство геометрии регулярно расположеных волокон, а также теплопроводность компонентов. Исследуется пять способов расположения волокон в треугольной, квадратовой, шестиугольной, квадратово-треугольной и восьми-квадратовой сетке. Результаты вычислений эффективной теплопроводности сравнено с величинами полученными через другими авторами.

Summary

DETERMINATION OF THE TRANSVERSE EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY OF UNIDIRECTIONALLY FIBRE ARRANGED COMPOSITES BY MEANS OF BOUNDARY COLLOCATION METHOD

The general method of finding transverse effective thermal conductivity of the unidirectionally fibre arranged composites has been presented in this paper. It has been based on the boundary collocation method. The geometry of regularly arranged fibers and thermal conductivity of componets are assumed to be known. Five different patterns of lattice of fibers are considered: triangular, square, hexagonal, square-triangular, and octagonal-square. The results of calculations of effective thermal conductivity were juxtaposed with results obtained by other authors.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1984 roku