

DRGANIA GIĘTNE, NIELINIOWE BELKI POD DZIAŁANIEM OBCIĄŻEŃ STOCHASTYCZNYCH POPRZECZNYCH I WZDŁUŻNYCH

NGUYEN CAO MENH (HANOI)

Instytut Mechaniki,

1. Wstęp

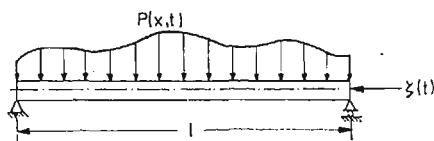
Drgania poprzeczne belki pod działaniem sił: poprzecznej i wzdłużnej, będących procesami stochastycznymi (rys. 1), uwzględniając wpływ bezwładności przekroju belki i nieliniowej sprężystości, można przedstawić równaniem różniczkowym cząstkowym w następującej postaci [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{EJ}{\varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(N \frac{\partial v}{\partial s} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial v}{\partial t} = P(s, t), \quad (1.1)$$

gdzie EJ — stała sztywności na zginanie, ϱ — promień krzywizny, N — siła wzdłużna w belce, $v(s, t)$ — przemieszczenie poprzeczne belki, s — długość łuku wzdłuż belki, m — masa jednostki długości belki, c_1 — współczynnik tłumienia wiskotycznego.

Mamy wzór

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2} \quad (1.2)$$



Rys. 1.

W czasie ruchu siła wzdłużna belki składa się z siły zewnętrznej $\zeta(t)$ i siły bezwładności wywołanej ruchem podłużnym przekroju belki, dlatego można ją przedstawić wzorem [1]

$$N = \zeta(t) - \Delta N(s, t), \quad (1.3)$$

gdzie

$$w \approx \frac{1}{2} \int_0^s \left(\frac{\partial v}{\partial u} \right)^2 du, \quad (1.4)$$

$$\Delta N(s, t) = \frac{1}{2} \int_s^{l-s} m \ddot{w}(u, t) du, \quad (1.5)$$

gdzie kropka oznacza pochodną funkcji względem t .

Podstawiając (1.2) - (1.5) do (1.1), stosując metodę Galerkin z założeniem, że przemieszczenie poprzeczne belki $v(s, t)$ i siła $P(s, t)$ przyjmują postać

$$v(s, t) = x(t) \sin \frac{\pi s}{l}, \quad (1.6)$$

$$P(s, t) = \xi(t) m \sin \frac{\pi s}{l}, \quad (1.7)$$

otrzymamy równanie

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \zeta(t)) = \xi(t), \quad (1.8)$$

gdzie

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \zeta(t)) = cx^3 + ex(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + \alpha\zeta(t)x, \quad (1.9)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \text{ — częstość właściwa drgania poprzecznego belki,}$$

$$\varepsilon c = \frac{\pi^4}{4l^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) \text{ — współczynnik bezwładności nieliniowej,}$$

$$\varepsilon c = \pi^2 \omega_0^2 / (8l^2) \text{ — współczynnik sprężystości nieliniowej,}$$

$$\varepsilon \alpha = \omega_0^2 / P^* \text{ — współczynnik zakłócenia parametrycznego,}$$

$$P^* = \pi^2 EJ / l^2 \text{ — siła krytyczna,}$$

$$2h = c_1 / m.$$

W pracach [1] i [2] pokazano, że w pewnych warunkach drgania poprzeczne płyty i ramy są także przedstawione równaniem (1.8).

W pracy [2] Schmidt rozpatrywał równanie (1.8) pod warunkiem, że $\xi(t)$ i $\zeta(t)$ są procesami typu białego szumu. Stosując metodę uśrednienia i równania Fokkera-Plancka-Kolmogorowa, otrzymał przybliżoną jednowymiarową funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla amplitudy drgań.

W niniejszej pracy chcielibyśmy poszukać funkcji gęstości widmowej drgań, tzn. charakterystyki statystycznej dwuchwilowej dla przemieszczenia $x(t)$ w równaniu (1.8). Stąd można rozpatrzeć wpływ zakłócenia parametrycznego, sprężystości i bezwładności nieliniowych na drgania tych układów.

2. Metoda rozwiązywania

Teraz stosujemy metodę kolejnych przybliżeń [3], aby obliczyć funkcję gęstości widmowej odpowiedzi układu (1.8) w przybliżeniu rzędu drugiego względem małego parametru ε z założeniem, że $\xi(t)$ i $\zeta(t)$ są procesami stochastycznymi, stacjonarnymi, niezależnymi o rozkładzie normalnym i $0 < h < \omega_0$.

Z równania (1.8) mamy następujące równania kolejnych przybliżeń

$$\ddot{x}_0 + 2h\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = \xi(t) = \xi_0(t), \quad (2.1)$$

$$\ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\varepsilon F(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta) + \xi(t) = \xi_1(t), \quad (2.2)$$

$$\ddot{x}_2 + 2h\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\varepsilon F(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \zeta) + \xi(t) = \xi_2(t). \quad (2.3)$$

Z równania (2.1) spostrzegamy, że $x_0(t)$ jest procesem stochastycznym normalnym stacjonarnym dla czasu dostatecznie dużego. A zatem proces $x_1(t)$ z równania (2.2) jest stacjonarny i jest funkcjonalem procesów łącznie normalnych $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta, \xi$. Następnie na podstawie równania (2.3) zauważmy, że $x_2(t)$ jest procesem stacjonarnym. Funkcja gęstości widmowej procesu $x_2(t)$ będzie określona wzorem

$$S_{x_2}(\omega) = \frac{S_{\xi_2}(\omega)}{|P(\omega)|^2}, \quad (2.4)$$

gdzie $S_{\xi_2}(\omega), S_{x_2}(\omega)$ — funkcje gęstości widmowej procesów odpowiednio, $\xi_2(t)$ i $x_2(t)$,

$$P(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2h\omega i. \quad (2.5)$$

Teraz obliczamy $\langle \xi_2(t_1) \xi_2(t_2) \rangle = R_{\xi_2}(\tau)$ ($\tau = t_1 - t_2$), następnie stosując przekształcenie Fouriera do $R_{\xi_2}(\tau)$, otrzymamy $S_{\xi_2}(\omega)$ i stąd mamy $S_{x_2}(\omega)$.

W obliczeniu funkcji korelacyjnej $R_{\xi_2}(\omega)$ zauważmy, że funkcja $F(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \zeta)$ w tym przypadku staje się funkcjonalem złożonym procesów łącznie normalnych $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta$ i ξ . Zwracając uwagę na wzór Furutsu-Nowikowa [4, 5]

$$\langle y_i(t) L[y] \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \langle y_i(t) y_k(s) \rangle \left\langle \frac{\delta L[y]}{\delta y_k(s)} \right\rangle ds \quad (2.6)$$

i

$$\frac{\delta Q[y]}{\delta y_i(s)} = F'(L[y]) \frac{\delta L[y]}{\delta y_i(s)} \quad (2.7)$$

gdzie $L[y]$ jest funkcjonalem procesu wektorowego normalnego $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, $\delta L[y]/\delta y_k(s)$ jest pochodną wariacyjną [5], $Q[y] = F(L[y])$ jest funkcją funkcjonatu $L[y]$, mamy następujące wyrażenie

$$R_{\xi_2}(\tau) = R_{\xi}(\tau) + \varphi(\tau) + \varphi(-\tau) + \varepsilon^2 \langle F_0(t_1) F_0(t_2) \rangle + \varepsilon^3 \dots \quad (2.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} F_0(t) &= F(x_0(t), \dot{x}_0(t), \ddot{x}_0(t), \zeta(t)) \\ \varphi(\tau) &= -\varepsilon \left\{ \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial x_0} \right\rangle R_{x_0 \xi}(\tau) + \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}_0} \right\rangle R_{\dot{x}_0 \xi}(\tau) + \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \ddot{x}_0} \right\rangle R_{\ddot{x}_0 \xi}(\tau) \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(t_1 - u) \left[R_{x_0 \xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial x_0^2} F_0(u) \right\rangle + R_{\dot{x}_0 \xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0 \partial x_0} F_0(u) \right\rangle + \right. \\ &+ R_{\ddot{x}_0 \xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0 \partial x_0} F_0(u) \right\rangle + R_{x_0 \xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial x_0} \right\rangle + \\ &+ R_{\dot{x}_0 \xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial \dot{x}_0} \right\rangle + R_{\ddot{x}_0 \xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial \ddot{x}_0} \right\rangle \Big] du + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(t_1 - u) \left[R_{x_0 \xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial x_0 \partial \dot{x}_0} F_0(u) \right\rangle + R_{\dot{x}_0 \xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0^2} F_0(u) \right\rangle + \right. \\ &+ R_{\ddot{x}_0 \xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0 \partial \dot{x}_0} F_0(u) \right\rangle + R_{x_0 \xi}(u - t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0} \cdot \frac{\partial F_0(u)}{\partial x_0} \right\rangle + \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
& + R_{\dot{x}_0\xi}(u-t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0} \frac{\partial F_0(u)}{\partial \dot{x}_0} \right\rangle + R_{\ddot{x}_0}(u-t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0} \frac{\partial F_0(u)}{\partial \ddot{x}_0} \right\rangle \Big] du + \\
& + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{K}(t_1-u) \left[R_{x_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial x_0 \partial \ddot{x}_0} F_0(u) \right\rangle + R_{\dot{x}_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \dot{x}_0 \partial \ddot{x}_0} F_0(u) \right\rangle + \right. \\
& + R_{\ddot{x}_0\xi}(\tau) \left\langle \frac{\partial^2 F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0^2} F_0(u) \right\rangle + R_{x_0\xi}(u-t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0} \frac{\partial F_0(u)}{\partial x_0} \right\rangle + \\
& \left. + R_{\dot{x}_0\xi}(u-t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0} \frac{\partial F_0(u)}{\partial \dot{x}_0} \right\rangle + R_{\ddot{x}_0\xi}(u-t_2) \left\langle \frac{\partial F_0(t_1)}{\partial \ddot{x}_0} \frac{\partial F_0(u)}{\partial \ddot{x}_0} \right\rangle \right] du \quad (2.9)
\end{aligned}$$

[cd.]

gdzie

$$R_{x_0\xi}(\tau) = R_{x_0\xi}(t_1-t_2) = \langle x_0(t_1)\xi(t_2) \rangle,$$

$$R_{\dot{x}_0\xi}(\tau) = R_{\dot{x}_0\xi}(t_1-t_2) = \langle \dot{x}_0(t_1)\xi(t_2) \rangle, \dots$$

i

$$K(u) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-hu} \sin \beta u & \text{dla } u > 0, \\ 0 & \text{dla } u \leq 0, \end{cases}$$

$$\beta^2 = \omega_0^2 - h^2;$$

$\dot{K}(u)$ — pochodna funkcji $K(u)$ względem jej argumentu; można obliczyć $\langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle$ według wzoru przedstawionego w pracy [6] i w tym przypadku otrzymane wyrażenie jest funkcją od $\tau = t_1 - t_2$.

Zauważmy, że we wzorze (2.8) obliczyliśmy wartość przeciętną

$$\langle \xi(t_1)F(x_1(t_2), \dot{x}_1(t_2), \ddot{x}_1(t_2), \zeta(t_2)) \rangle = \Phi_1(\tau) \quad (\tau = t_1 - t_2)$$

za pomocą wzoru Furutsu-Nowikowa.

W tym przypadku można napisać

$$F(x_1(t_2), \dot{x}_1(t_2), \ddot{x}_1(t_2), \zeta(t_2)) = Q[x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta],$$

gdzie funkcjonal $Q[x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \zeta]$ nie zawiera $\xi(t)$ i dlatego nie pojawia się skok średniej dla funkcji $\Phi_1(\tau)$, gdy $\tau = 0$, tak jak w pracy [9] (str. 33). Można więc obliczyć wariancje w następnych wzorach bez wyjątkowych trudności.

3. Wyniki konkretne

Wzór (2.9) w przypadku gdy funkcja $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \zeta(t))$ jest opisana wyrażeniem (1.2), ma postać

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau) = & -\varepsilon[(3cD_0 - eD_{01})R_{x_0\xi}(\tau) + eD_0\ddot{R}_{x_0\xi}(\tau)] + \\
& + \varepsilon^2[(3c + e)R_{x_0\xi}(\tau) + e\ddot{R}_{x_0\xi}(\tau)] \int_{-\infty}^{\infty} 2K(s)[(3cD_0 - eD_{01})R_{x_0}(s) + eD_0\ddot{R}_{x_0}(s)]ds + \\
& + \varepsilon^2\{K(\tau)[(3cD_0 - eD_{01})^2 + 18c^2R_{x_0}^2(\tau) + 24ceR_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 4e^2R_{x_0}(\tau)R_{x_0}^{IV}(\tau) + \\
& + 12ce\dot{R}_{x_0}^2(\tau) + 8e^2\dot{R}_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 6e^2\ddot{R}_{x_0}^2(\tau) + \alpha^2R_{\xi}^2(\tau)] * R_{x_0\xi}(\tau) + \\
& + \varepsilon^2\{-4eK(\tau)[3cR_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau) + eR_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 2e\dot{R}_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau)] * \dot{R}_{x_0\xi}(\tau) +
\end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon^2 \{K(\tau) [(3cD_0 - eD_{01})eD_0 + 6ceR_{x_0}^2(\tau) + 4e^2R_{x_0}^2(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 2e^2R_{x_0}^2(\tau)]\} * \ddot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{4e\dot{K}(\tau) [3cR_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau) + eR_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 2e\dot{R}_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau)]\} * R_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{-4e^2\dot{K}(\tau) [R_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + \dot{R}_{x_0}^2(\tau)]\} * \dot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 [4e^2\dot{K}(\tau)R_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau)] * \ddot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{\ddot{K}(\tau) [eD_0(3cD_0 - eD_{01}) + 6ceR_{x_0}^2(\tau) + 2e^2\dot{R}_{x_0}^2(\tau) + 4e^2R_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau)]\} * R_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 [-4e^2\dot{K}(\tau)R_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau)] * \dot{R}_{x_0\xi}(\tau) + \\
 & + \varepsilon^2 \{e^2\ddot{K}(\tau) [D_0^2 + 2R_{x_0}^2(\tau)]\} * \ddot{R}_{x_0\xi}(\tau)
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie $D_0 = \langle x_0^2(t) \rangle$, $D_{01} = \langle \dot{x}_0^2(t) \rangle$ i symbol $(*)$ jest splotem dwóch funkcji.

Zauważmy, że x_0 , $\dot{x}_0$, $\ddot{x}_0$, $\xi(t)$ są łącznie normalne o zerowej wartości przeciętnej; stosując wzory [7]

$$\begin{aligned}
 \langle y_1 y_2 \dots y_{2m+1} \rangle &= 0, \\
 \langle y_1 y_2 \dots y_{2m} \rangle &= \sum \langle y_1 y_k \rangle \dots \langle y_r y_s \rangle,
 \end{aligned}$$

gdzie suma zawiera wszystkie możliwości ugrupowania $2m$ zmiennych losowych łącznie normalnych $y_1, \dots, y_{2m}$ na m par, mamy

$$\begin{aligned}
 \langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle &= (3cD_0 - eD_{01})^2 R_{x_0}(\tau) + 2eD_0(3cD_0 - eD_{01})\ddot{R}_{x_0}(\tau) + \\
 & + e^2 D_0^2 R_{x_0}^{IV} + 6e^2 R_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}^2(\tau) + 8e^2 \dot{R}_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 12ceR_{x_0}^2(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + 12ceR_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}^2(\tau) + \\
 & + 6c^2 R_{x_0}^3(\tau) + 2e^2 R_{x_0}^2(\tau)R_{x_0}^{IV}(\tau) + 8e^2 R_{x_0}(\tau)\dot{R}_{x_0}(\tau)\ddot{R}_{x_0}(\tau) + \alpha^2 R_{\xi}(\tau)R_{x_0}(\tau).
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jeśli proces $\xi(t)$ jest typu białego szumu, funkcja korelacyjna ma postać

$$R_{x_0}(\tau) = D_0 e^{-h|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{h}{\beta} \sin \beta |\tau| \right), \quad (3.3)$$

gdzie $\beta^2 = \omega_0^2 - h^2$, $D_0 = \pi S_{\xi} / (2h\omega_0^2)$, $D_{01} = \omega_0^2 D_0$.

Wtedy otrzymamy następujące wyrażenie dla funkcji gęstości widmowej

$$|P(\omega)|^2 S_{x_2}(\omega) = S_{\xi} + \Phi(\omega) + \overline{\Phi(\omega)} + \varepsilon^2 \mathcal{F} \{ \langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle \} + \varepsilon^3 \dots \quad (3.4)$$

gdzie $\mathcal{F} \{ \dots \}$ oznacza przekształcenie Fouriera, $\Phi(\omega) = \mathcal{F} \{ \varphi(\tau) \}$ i $\overline{\Phi(\omega)}$ jest sprzężoną formą wobec $\Phi(\omega)$. W tym przypadku mamy

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) &= -\varepsilon S_{\xi} D_0 [3c - e(\omega_0^2 + \omega^2)] / P(\omega) + \varepsilon^2 \frac{S_{\xi}}{P(\omega)} \sum_{j=1}^3 [M_j + N_j(i\omega) - L_j \omega^2] + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{D_0^2 S_{\xi}}{4\beta^3 P(\omega)} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{3hA_j + B_j + i\omega A_j}{(3h + i\omega)^2 + \beta^2} + \frac{3hE_j + 3\beta F_j + i\omega E_j}{(3h + i\omega)^2 + 9\beta^2} + \right. \\
 & + \left[\frac{3hG_j + \beta H_j + i\omega G_j}{(3h + i\omega)^2 + \beta^2} + \frac{3hI_j + 3\beta K_j + i\omega I_j}{(3h + i\omega)^2 + 9\beta^2} \right] (i\omega) \\
 & + \left[\frac{3hP_j + \beta Q_j + i\omega P_j}{(3h + i\omega)^2 + \beta^2} + \frac{3hR_j + 3\beta S_j + i\omega R_j}{(3h + i\omega)^2 + 9\beta^2} \right] (-\omega^2) \Big\} + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{S_{\xi} D_0^2}{[P(\omega)]^2} [3c - e(\omega_0^2 + \omega^2)]^2 + 2\pi \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 S_{\xi}}{P(\omega)} \mathcal{F} \{ K(\tau) R_{\xi}(\tau) \}
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Przekształcenie Fouriera dla $\langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle$ przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \langle F_0(t_1)F_0(t_2) \rangle \} &= \frac{S_\xi D_0^2}{|P(\omega)|^2} [3c - e(\omega_0^2 + \omega^2)]^2 + \\ &+ \frac{D_0^3}{4\pi\beta^2} \frac{(3hA_4 - \beta B_4)\omega^2 + (3hA_4 + \beta B_4)(\omega_0^2 + 8h^2)}{|q(\omega)|^2} + \\ &+ \frac{3D_0^3}{4\pi\beta^2} \frac{(hE_4 - \beta F_4)\omega^2 + 9\omega_0^2(hE_4 + \beta F_4)}{|Q(\omega)|^2} + \\ &+ \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega - z) S_{x_0}(z) dz, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} q(\omega) &= -\omega^2 + 6h\omega i + \omega_0^2 + 8h^2, \\ Q(\omega) &= -\omega^2 + 6h\omega i + 9\omega_0^2, \\ M_1 &= D_0^2(e + 3c)(3c - e\omega_0^2)/\omega_0^2, \quad N_1 = e^2\omega_0^2 D_0^2/(2h) - D_0^2 e(\beta^2 - h^2)(3c - e\omega_0^2)/(4h\beta^2), \\ L_1 &= eD_0^2(3c - e\omega_0^2)/\omega_0^2, \quad M_2 = e^2 D_0^2 \omega_0^2/(2\beta^2), \quad N_2 = -N_1, \quad L_2 = 0, \\ M_3 &= -2eD_0^2(3c - e\omega_0^2) + e^2 D^2 \omega_0^2(3\beta^2 - h^2)/(2\beta^2), \quad N_3 = L_3 = 0, \\ A_1 &= -E_1 = 4\beta h(9c^2 - 7e^2\omega_0^4) \\ B_1 &= 18c^2(\omega_0^2 + 2h^2) + 4e^2\omega_0^2(\beta^4 - 12h^2\beta^2 + 3h^4) - 24ce\omega_0^2(\beta^2 - 3h^2) + \\ &+ 36ce\omega_0^4 + 4e^2\omega_0^4(30h^2 - 9\omega_0^2), \\ F_1 &= 18(\beta^2 - h^2)(c^2 + e^2\omega_0^4) - 36ce\omega_0^4, \\ G_1 &= -I_1 = 4(3ce\beta\omega_0^2 - e^2\omega_0^4\beta), \\ H_1 &= 4[9ceh\omega_0^2 - e^2h\omega_0^2(5\omega_0^2 - 8h^2) + 6e^2h\omega_0^4], \\ K_1 &= -12eh\omega_0^2(c + e\omega_0^2), \\ P_1 &= -R_1 = 12ceh\beta, \\ Q_1 &= 2[3ce(\omega_0^2 + 2h^2) + 8e^2h^2\omega_0^2 + e^2\omega_0^4], \\ S_1 &= 6[ce(\omega_0^2 - 2h^2) - e^2\omega_0^4], \\ A_2 &= 8e^2h\beta\omega_0^2(\omega_0^2 - 4h^2), \\ B_2 &= 4e\omega_0^2[-3c + e(\beta^2 - h^2)(\beta^2 - 3h^2) + 8e^2\omega_0^4(\beta^2 + 3h^2)], \\ E_2 &= 24e^2h\beta\omega_0^4, \\ F_2 &= 12e\omega_0^4[-c + e(\beta^2 - h^2)], \\ G_2 &= -4e^2\beta(3\beta^2 - h^2 + \omega_0^2), \\ H_2 &= 4e^2h(3h^2 - \beta^2 + 3\omega_0^4), \\ I_2 &= 4e^2\beta\omega_0^2(1 + \omega_0^2), \\ K_2 &= -4e^2h\omega_0^2(1 + \omega_0^2), \\ P_2 &= 0, \\ Q_2 &= -4e^2\omega_0^2(\beta^2 - 3h^2), \\ R_2 &= 0, \\ S_2 &= -4e^2\omega_0^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= 4e^2 h \beta \omega_0^2 (5\beta^2 - 3h^2) - 48ceh\beta^3, \\
B_3 &= -6ce(\beta^4 + 6h^2\beta^2 - 3h^4) + 2e^2\omega_0^2(\beta^2 - h^2)(\beta^2 + 9h^2), \\
E_3 &= 12e^2 h \beta \omega_0^4, \\
F_3 &= 6e\omega_0^4 [c + e(\beta^2 - h^2)], \\
G_3 &= -4e^2 \beta \omega_0^4, \\
H_3 &= -4e^2 h \omega_0^4 (5\beta^2 - 3h^2), \\
I_3 &= 0, \\
K_3 &= -4e^2 h \omega_0^4 (3\beta^2 - h^2), \\
P_3 &= -16e^2 h \beta^3, \\
Q_3 &= 2e^2(\beta^4 + 6h^2\beta^2 - 3h^4), \\
R_3 &= 0, \\
S_3 &= -2e^2 \omega_0^4, \\
A_4 &= -16e^2 \omega_0^6 + [6e^2(3\beta^2 - h^2) + 12ce]\omega_0^4 + [-12ce(3\beta^2 - h^2) + 18c^2 + \\
&\quad + 2e^2(3\beta^4 - 14\beta^2 h^2 - h^4)]\omega_0^2, \\
B_4 &= \frac{h}{\beta} \{24e^2 \omega_0^6 + [6e^2(3h^2 - \beta^2) + 36ce - 8e^2(5\beta^2 - 3h^2)]\omega_0^4 + \\
&\quad + [-12ce(\beta^2 - 3h^2) + 18c^2 - 2e^2(\beta^4 + 14\beta^2 h^2 - 3h^4)]\omega_0^2\}, \\
E_4 &= 24e^2 \omega_0^6 - 24ce\omega_0^4 + 6c^2(\beta^2 - 3h^2), \\
F_4 &= \frac{h}{\beta} [-24e^2 \omega_0^6 - 24ce\omega_0^4 - 6c^2(h^2 - 3\beta^2)]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Wzory (3.4) - (3.6) wyrażają jawną postać funkcji gęstości widmowej dla przemieszczenia w przybliżeniu rzędu drugiego względem ε zależną od parametrów tego układu.

Z wyrażenia funkcji gęstości widmowej można znaleźć funkcję korelacyjną $R_{x_2}(\tau)$ za pomocą przekształcenia odwrotnego Fouriera.

Wariancja przemieszczenia będzie określona wzorem

$$D_2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_2}(\omega) d(\omega) = D_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega) + \overline{\Phi(\omega)}}{|P(\omega)|^2} d\omega + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}\{\langle F_0(t_1) F_0(t_2) \rangle\}}{|P(\omega)|^2} d\omega. \tag{3.8}$$

Po obliczeniu całek we wzorze (3.8) metodą residuów i stosując wzory podane w [8], otrzymamy następujące wyrażenie dla wariancji przemieszczenia w przybliżeniu rzędu drugiego względem

$$\begin{aligned}
D_2 &= D_0 - \varepsilon D_0^2 (3c - e\omega_0^2) + \varepsilon^2 D_0 (M_1 + M_2 + M_3) + \varepsilon^2 D_0^3 (3c - e\omega_0^2)^2 / \omega_0^4 + \\
&+ \frac{\varepsilon^2 D_0^3}{2^6 \beta^3 h (\omega_0^2 + 3h^2)} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{1}{h} [18h^3 A_j + \beta(5h^2 - \beta^2) B_j + (8h^2 - \beta^2) G_j + 3h\beta H_j + 2hP_j + \beta Q_j] + \right. \\
&+ \frac{1}{\omega_0^2} [(18h^4 + 7h^2\beta^2 + \beta^4) E_j + 3h\beta(5h^2 + \beta^2) F_j + 2h(\omega_0^2 + 3h^2) I_j + \\
&\left. + 3\beta(2h^2 + \omega_0^2) K_j + (2h^2 - \beta^2) R_j + 3h\beta S_j] \right\} + \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\varepsilon^2 \alpha^2 S_\xi \pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{K(\tau) R_\zeta(\tau)\} \frac{d\omega}{|P(\omega)|^2 P(\omega)} + \varepsilon^2 \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|P(\omega)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega-z) S_{x_0}(z) dz + \\
& + \frac{\varepsilon^2 D_0^3}{2^7 \beta^2 h (\omega_0^2 + 3h^2)} \left\{ \frac{1}{3h^2} \left[3hA_4 - \beta B_4 + \frac{\omega_0^2 + 18h^2}{\omega_0^2} (3hA_4 + \beta B_4) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\omega_0^2} \left[hE_4 - \beta F_4 + \frac{7\omega_0^2 + 12h^2}{\omega_0^2} (hE_4 + \beta F_4) \right] \right\} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

[cd.]

Zauważmy, że w przypadku ogólnym, gdy uwzględniamy jednocześnie wpływ nieliniowych sprężystości, bezwładności i zakłócenia parametrycznego, wzory dla funkcji gęstości widmowej (3.4) - (3.6) i wzór dla wariancji przemieszczenia (3.8) w przybliżeniu rzędu drugiego względem ε są skomplikowane. Jednakże powyższe wzory są konkretne i wyrażone przez parametry tego układu mechanicznego i w przypadku szczególnym wzory te są dostatecznie proste.

Teraz rozpatrujemy kilka przypadków szczególnych.

1. Przypadek istnienia sprężystości nieliniowej i zakłócenia parametrycznego ($c \neq 0, \alpha \neq 0$).

Zakładamy, że ε jest dostatecznie małe w porównaniu z innymi członami i można je pominąć

W tym przypadku ze wzoru (3.7) mamy

$$M_1 = 9c^2 D_0^2 / \omega_0^2, \quad T_1 = 9c^2 D_0^2, \quad A_1 = -E_1 = 36c^2 h \beta, \quad B_1 = 18c^2 (\omega_0^2 + 2h^2),$$

$$F_1 = 18c^2 (\omega_0^2 - 2h^2),$$

$$A_4 = 18c^2 \omega_0^2, \quad B_4 = 18c^2 h \omega_0^2 / \beta, \quad E_4 = 6c^2 (\omega_0^2 - 4h^2), \quad F_4 = -6c^2 h (4h^2 - 3\omega_0^2) / \beta,$$

a inne współczynniki są równe zeru.

Funkcja gęstości widmowej przyjmuje wzór (3.4), w którym

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) = & \varepsilon \frac{-3c D_0 S_\xi}{P(\omega)} + \varepsilon^2 \frac{9c^2 D_0^2 S_\xi}{\omega_0^2 P(\omega)} + \varepsilon^2 \frac{9c^2 D_0^2 S_\xi}{[P(\omega)]^2} + \varepsilon^2 \frac{\alpha^2 S_\xi}{P(\omega)} 2\pi \mathcal{F}\{K(\tau) R_\zeta(\tau)\} + \\
& + \varepsilon^2 \frac{18c^2 D_0^2 S_\xi}{4\beta^2 P(\omega)} \left\{ \frac{8h^2 + \omega_0^2 - 2h\omega i}{(3h + i\omega)^2 + \beta} + \frac{3\beta^2 - 9h^2 + 2h\omega i}{(3h + i\omega)^2 + 9\beta^2} \right\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

i $\mathcal{F}\{\langle F_0(t_1) F_0(t_2) \rangle\}$ jest przedstawione wzorem (3.6)

a) $\zeta(t)$ jest procesem typu białego szumu, $R_\zeta(\tau) = 2\pi S_\zeta \delta(\tau)$. W tym przypadku we wzorze (3.10)

$$\mathcal{F}\{K(\tau) R_\zeta(\tau)\} = 0,$$

i we wzorze (3.6)

$$\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega-z) S_{x_0}(z) dz = \alpha^2 S_\zeta D_0.$$

Wtedy wariancja D_2 jest określona następującym wzorem

$$\begin{aligned}
D_2 = & D_0 - 3\varepsilon c D_0^2 + \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 \pi S_\zeta D_0}{2h\omega_0^2} + \frac{18\varepsilon^2 c^2 D_0^3 (48h^4 + 4h^2 \omega_0^2 - \omega_0^4)}{2^5 h^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 + 3h^2)} + \\
& + \frac{3\varepsilon^2 D_0^3 c^2 (3\omega_0^6 + 49h^2 \omega_0^4 - 4h^4 \omega_0^2 - 48h^6)}{2^5 \beta^2 h^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 + 3h^2)}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Jeżeli parametry tego układu są podane liczbami

$$\omega_0^2 = 1, \quad h = 1/2, \quad \pi S_\xi = 1, \quad \pi S_\zeta = 1,$$

mamy

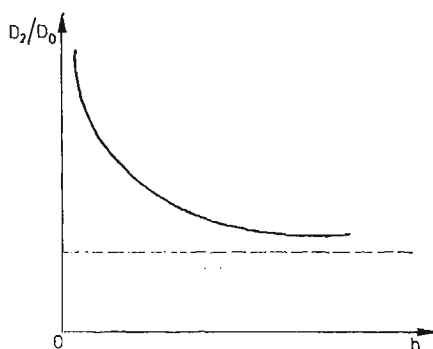
$$D_2 = 1 - 3\epsilon c + (24c^2 + \pi\alpha^2 S_\zeta) \epsilon^2 + \epsilon^3 \dots \quad (3.12)$$

Stąd spostrzegamy, że w tym przypadku zakłócenie parametryczne ma wpływ tylko na człon dodatkowy w przybliżeniu rzędu drugiego.

Jeżeli $c = 0$, ze wzoru (3.11) mamy

$$D_2 = D_0 \left(1 + \frac{\epsilon^2 \alpha^2 \pi S_\zeta}{2h\omega_0^2} \right). \quad (3.13)$$

Wykres D_2/D_0 jest przedstawiony na rys. 2, zależny od współczynnika tłumienia h . W tym przypadku zakłócenie parametryczne zawsze powiększa wartość wariancji w porównaniu z odpowiednim układem liniowym (rys. 2).



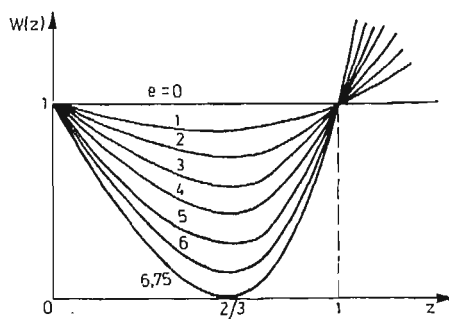
Rys. 2.

Jeżeli ϵ jest dostatecznie małe i h^2 ma wartość małą tego samego rzędu co ϵ , $c = 1$, wtedy wzór (3.11) przyjmuje następującą postać

$$D_2 \approx D_0 W(z), \quad (3.14)$$

gdzie

$$W(z) = 1 + \gamma_1 z^2(z-1), \quad \gamma_1 = \frac{9\epsilon^2(\pi S_\xi)^2}{2^7 h^4}, \quad z = 1/\omega_0^2.$$



Rys. 3.

Wykres funkcji $W(z) = D_2/D_0$ zależny od z jest przedstawiony na rys. 3, wtedy wpływ zakłócenia parametrycznego na odpowiedź tego układu nie jest wyraźny.

b) $\zeta(t)$ jest procesem otrzymanym w wyniku przekształcenia procesu białego szumu przez filtr liniowy.

Załóżmy, że proces stochastyczny stacjonarny $\zeta(t)$ otrzymany jest z układu liniowego

$$\ddot{\zeta}(t) + 2h_1 \dot{\zeta}(t) + (h_1^2 + \beta_1^2)\zeta(t) = \zeta_1(t),$$

gdzie $\zeta_1(t)$ jest procesem stochastycznym typu białego szumu.

W tym przypadku $\zeta(t)$ jest procesem o wąskim zakresie widma. Jego funkcja korelacyjna ma postać

$$R_\zeta(\tau) = D_\zeta e^{-h_1|\tau|} \left(\cos \beta_1 \tau + \frac{h_1}{\beta_1} \sin \beta_1 |\tau| \right), \quad (3.15)$$

gdzie h_1, β_1 są stałe filtru liniowego, D_ζ jest wariancją procesu $\zeta(t)$. Następnie należy obliczyć $\mathcal{F}\{K(\tau)R_\zeta(\tau)\}$ i $\mathcal{F}\{R_\zeta(\tau)R_{x_0}(\tau)\}$. Po obliczeniu otrzymamy

$$\mathcal{F}\{K(\tau)R_\zeta(\tau)\} = \frac{D_\zeta}{4\pi\beta_1} \left\{ \frac{\beta_1 \mathcal{B} - h_1(H+i\omega)}{(H+i\omega)^2 + \mathcal{B}^2} + \frac{\beta_1 B + h_1(H+i\omega)}{(H+i\omega)^2 + B^2} \right\}, \quad (3.16)$$

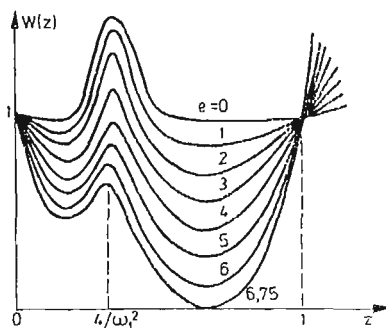
gdzie

$$\mathcal{B} = \beta_1 + \beta, \quad B = \beta_1 - \beta, \quad H = h_1 + h. \quad (3.17)$$

$\mathcal{F}\{R_\zeta(\tau)R_{x_0}(\tau)\} =$

$$= \frac{D_0 D_\zeta}{2\pi\beta_1} \left\{ \frac{[(\beta\beta_1 - hh_1)H - (h_1\beta + h\beta_1)\mathcal{B}]\omega_0^2 + [(\beta\beta_1 - hh_1)H + (h_1\beta + h\beta_1)\mathcal{B}](\mathcal{B}^2 + H^2)}{[(\mathcal{B} + \omega)^2 + H^2][(\mathcal{B} - \omega)^2 + H^2]} + \right. \\ \left. + \frac{[(\beta\beta_1 + hh_1)H - (h_1\beta - h\beta_1)B]\omega^2 + [(\beta\beta_1 + hh_1)H + (h_1\beta - h\beta_1)B](B^2 + H^2)}{[(B + \omega)^2 + H^2][(B - \omega)^2 + H^2]} \right\}. \quad (3.18)$$

Zatem w tym przypadku mamy wzory (3.4) - (3.6) dla funkcji gęstości widmowej, w których $\mathcal{F}\{K(\tau)R_\zeta(\tau)\}$ i $\mathcal{F}\{R_\zeta(\tau)R_{x_0}(\tau)\}$ są przedstawione wzorami (3.16) i (3.18). Stąd można obliczyć wariancję przemieszczenia tego układu. Po obliczeniu spostrzegamy, że jeśli ε jest dostatecznie małe i $h^2 = 0(\varepsilon)$, $h_1 = 0(\varepsilon)$ (tzn. h^2 i h_1 mają wartości małe w tym samym rzędzie jakim ε), wtedy w zakresie $|\omega_0^2 - (\omega_1/2)^2| < \varepsilon$ wartość wariancji D_2 jest istotnie duża, natomiast poza tym zakresem wartość ta nie ma dużej różnicy w porównaniu z poprzednim przypadkiem. Dlatego wykres funkcji D_2/D_0 zależny od $z = 1/\omega_0^2$ jest przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4.

2. Przypadek istnienia bezwładności i sprężystości nieliniowych ($c \neq 0$, $e \neq 0$, $\zeta = 0$).

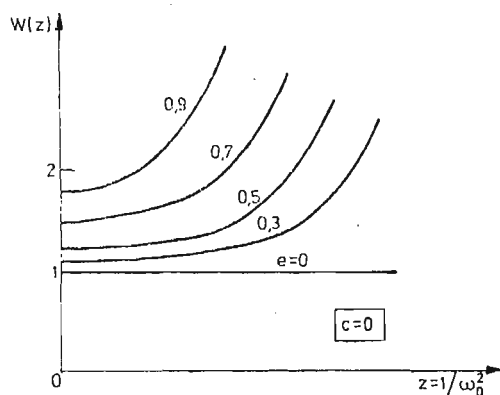
W tym przypadku funkcja gęstości widmowej jest przedstawiona wzorem (3.4), w którym podstawiamy $\alpha = 0$. Jeżeli h jest dostatecznie małe, wariancja D_2 przyjmuje następujące wyrażenie:

$$D_2 = D_0 \{1 + 9\gamma_2 e^2 + \gamma_2 [(3ce + 10e^2)z + (6e^2 - 18ce - 9c^2)z^2 + (3ce + 9c^2)z^3]\}, \quad (3.19)$$

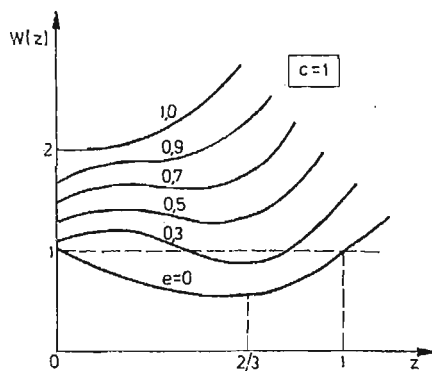
gdzie

$$\gamma_2 = \varepsilon^2 (\pi S_\xi^2) / (27 h^4), \quad z = 1/\omega_0^2.$$

Wykres funkcji $W(z) = D_2/D_0$ w przypadku $\gamma_2 = 1/9$, $c = 0$ zależny od wartości e jest przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5.



Rys. 6.

A wykres funkcji $W(z) = D_2/D_0$ w przypadku $\gamma_2 = 1/9$, $c = 1$, zależny od wartości e , jest przedstawiony na rys. 6.

Powyżej rozpatrywaliśmy układy mechaniczne pod działaniem sił stochastycznych normalnych za pomocą metody kolejnych przybliżeń. Pokazaliśmy, że można zastosować tę metodę do znalezienia funkcji gęstości widmowej i wariancji przemieszczenia w przybliżeniu rzędu drugiego względem ε . Stąd spostrzegaliśmy, że w przypadku tłumienia visko-

tycznego układu dostatecznie małego sprężystość nieliniowa zmniejsza wariancję (rys. 3), natomiast bezwładność nieliniowa powiększa ją (rys. 5). Jednak istnienie jednocześnie dwóch elementów ma wpływ na wariancję zależny od stosunku ich wartości (rys. 6). W przypadku istnienia zakłócenia parametrycznego typu procesu o wąskim zakresie widma wariancja przemieszczenia przyjmuje wartość dostatecznie dużą, jeśli średnia częstość zakresu widma zakłócenia parametrycznego jest dwa razy większa niż częstości własnej rozpatrywanego układu mechanicznego (rys. 4).

Literatura

1. V. V. BOLOTIN, *Dinamičeskaja ustojčivost' uprugich sistem*. Moskva 1956.
2. G. S. SCHMIDT, *Parametrically excited random vibrations of nonlinear mechanical systems*. Advances in Mechanics, Vol. 4, n. 2, 1981.
3. N. C. MENH, *On the investigation of stochastic dynamic systems by successive approximation*. ZAMM (w druku) 1985.
4. E. A. NOVIKOV, *Funkcjony i metody slučajnych sil w teorii turbulentnosti*. ЖЭТФ, Т. 47, 1964.
5. K. SOBczyk, *Fale stochastyczne*. Warszawa 1982.
6. N. C. MENH, *Metoda zamknięcia normalnego w teorii drgań stochastycznych układów słabo nieliniowych*. Prace IPBM PW, z. 13, 1982.
7. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structural dynamics*. New York 1975.
8. K. PISZCZEK, *Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych*. Warszawa 1982.
9. В. И. КЛЯЦКИН, *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами*. Москва 1975.

Summary

NONLINEAR FLEXURAL VIBRATIONS OF BEAM SUBJECTED TO STOCHASTIC TRANSVERSE AND LONGITUDINAL LOADINGS

In this work the mechanical systems where exist nonlinear elasticity and inertia, subjected to stochastic loadings in the form of external force and parametric excitation are considered.

The procedure of calculating spectral density function in the second order approximation is presented in general case.

The influences of nonlinear terms and parametric excitation on responses of the mechanical systems is investigated in special cases.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ НАГРУЗОК

В этой работе рассмотрены механические системы, в которых существуют нелинейная упругость и инерция, под воздействием случайных нагрузок внешних сил и параметрических возмущений.

Метод определения функции спектральной плотности представлен в общем виде приближением второго порядка.

Влияние нелинейных членов и параметрического возмущения на реакцию механических систем анализируется в частных случаях.

Praca została złożona w Redakcji 17 lutego 1984 roku