

PRZEGLĄD PRAC NAD OPTYMALNYM KSZTAŁTOWANIEM KONSTRUKCJI W WARUNKACH PEŁZANIA*

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

Politechnika Krakowska

1. Uwagi historyczne

Optymalne kształtowanie konstrukcji, a najczęściej tylko prostych elementów konstrukcyjnych pracujących w warunkach pełzania, należy do najmłodszych gałęzi optymalnego kształtowania. Podczas gdy optymalizacja w zakresie sprężystym, rozpoczęta przez Galileusza, liczy ponad 300 lat, a optymalizacja konstrukcji idealnie plastycznych została zapoczątkowana w latach pięćdziesiątych obecnego stulecia, to za początek kształtowania w warunkach pełzania przyjmuje się lata 1967-8. Wprawdzie już w roku 1953 A. G. Kostiuk [34] określił kształty tarcz wirujących równomiernej wytrzymałości w warunkach pełzania, a podobny problem omawia szczegółowo monografia Ju. N. Ra-botnowa [58], to jednak dopiero w latach 1967-8 sformułowano w kilku pracach ogól-niejsze ujęcie problemu.

Pierwsza z tych prac, M. I. Rejtmana [59], formułuje problem optymalizacji konstrukcji przy uwzględnieniu ograniczenia czasu jej żywotności i cen kolejnych nakładów inwestycyjnych. Autor ogranicza się w tytule pracy do konstrukcji z tworzyw sztucznych, lecz w istocie teoria może objąć i inne materiały podlegające pełzaniu. Funkcja celu przyjmuje postać

$$C = \frac{V}{1 - k^{-t_*}}, \quad (1)$$

gdzie V oznacza objętość konstrukcji, $k = 1 + E$, E oznacza normowy współczynnik efektywności nakładów inwestycyjnych, t_* — czas pracy konstrukcji do zniszczenia (czas żywotności). Szczegółowej analizie poddano optymalne kształtowanie pręta rozciąganego przy czasie t_* wyznaczonym przez zadane przemieszczenie w_* , belki zginanej również przy ograniczeniu przemieszczeniowym, oraz słupa poddanego wyboczeniu pełzającemu. W istocie były to raczej problemy optymalnego wymiarowania, gdyż rozważano elementy pryzmatyczne.

Dalsze trzy prace pochodzą z roku 1968. W. Prager [57] podał warunek optymalności dla tarcz podlegających ustalonemu pełzaniu przy ograniczeniu sztywnościowym, wyra-

*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 0.5.12 - 13.1.

żonym przez moc obciążeń zewnętrznych. Warunek ten ma prostą postać

$$\Phi = \text{const}, \quad (2)$$

gdzie Φ oznacza potencjał pełzania; szczegółowo rozważono tarczę pierścieniową o brzegu wewnętrznym obciążonym a brzegu zewnętrznym utwierdzonym — w wyniku uzyskano profil hiperboliczny. Również Ju. W. Niemirowskij [52] położył nacisk na ograniczenia sztywnościowe, wyrażone przez przemieszczenie w określonym punkcie konstrukcji; poświęcił on także uwagę konstrukcjom równomiernej wytrzymałości w warunkach pełzania.

Szersze ujęcie zagadnień optymalnego kształtowania konstrukcji przy pełzaniu podaje praca M. Życzkowskiego [84], referowana na XII Międzynarodowym Kongresie Mechaniki w Stanford w r. 1968, a opublikowana w r. 1971. Jej główne tezy zostaną ujęte w p. 2. Wybrane nowsze osiągnięcia z tej dziedziny omawia krótka praca przeglądowa M. Życzkowskiego [85]. Wypada tu również wspomnieć, że pokrewna praca o charakterze częściowo przeglądowym H. M. Adelmanna, Patricii L. Sawyer i C. P. Shore'a [1], dotycząca optymalnego kształtowania konstrukcji pracujących w podwyższonych temperaturach, pomija niemal całkowicie zagadnienia pełzania, tak, że obecna praca może być traktowana jako pewien odpowiednik i uzupełnienie tamtej.

2. Typowe sformułowania problemów optymalnego kształtowania w warunkach pełzania

Spośród czterech podstawowych elementów optymalnego kształtowania konstrukcji dwa zazwyczaj nie różnią się od ogólnie stosowanych w zagadnieniach sprężystych lub plastycznych. Jest to funkcja celu, za którą przyjmuje się z reguły objętość konstrukcji (choć może to również być funkcja (1) lub podobne), oraz zmienne decyzyjne określające jej wymiary i kształt. Natomiast równania stanu ulegają zastąpieniu przez dość różnorodne równania konstytutywne pełzania, wykazujące często silną nieliniowość, a zasadnicze różnice występują w sformułowaniu warunków ograniczających, gdzie istotną rolę odgrywa czynnik czasu. Dla celów klasyfikacyjnych (a czasem i ze względów rachunkowych) dogodniej jest rozpatrywać odwrotne sformułowanie problemów optymalizacyjnych (zwane też wzajemnym lub dualnym) i dyskutować różnorodne kryteria optymalizacji pod założeniem stałej objętości. Kryteria takie podzielimy na zależne i niezależne od czasu.

2.1. Kryteria optymalizacji zależne od czasu. W pierwszym rzędzie wymienimy tu kryteria sztywności konstrukcji. Sztywność — choć jest to pojęcie o zrozumiałym sensie i wyrażnym znaczeniu technicznym — nie jest pojmowana jednoznacznie i musi być wyrażona przy pomocy pewnych, dość zresztą różnorodnych kryteriów. Kryteria takie można sformułować na drodze następującego rozumowania. Konstrukcja idealnie sztywna, stosownie podparta, wykazuje zerowe przemieszczenia, a w konsekwencji również zerowe prędkości przemieszczeń, odkształcenia, prędkości odkształceń, pracę i moc sił zewnętrznych, moc rozpraszaną itp. Minimalizacja dowolnej z tych wielkości może stanowić pewne kryterium sztywności (a raczej podatności) dla konstrukcji odkształcalnej. W warunkach pełzania dogodna jest tu moc obciążeń zewnętrznych: jest to skalar, charakteryzujący sztywność w sposób globalny. Skalar ten na ogół zależy od czasu, a przy stałych obciążeniach

zeniach i pełzaniu fizycznie i geometrycznie ustalonym — nie zależy od czasu (ten ostatni przypadek rozpatrywał W. Prager [57]).

Sformułowanie kryterium sztywności wykorzystującego pozostałe wyżej wymienione wielkości fizyczne natrafia z reguły na większe trudności. Przeszacowania i prędkości przemieszczeń tworzą pola wektorowe, natomiast odkształcenia i prędkości odkształceń — pola tensorowe. Minimalizacja wymaga tu wprowadzenia pewnych norm, i to norm w podwójnym sensie, np. jako normy wektora, a następnie normy funkcji zmiennych przestrzennych. Jako normę wektora przyjmuje się zazwyczaj bądź jego długość, bądź wartość bezwzględną największej składowej; ta ostatnia norma nie jest niezmiennicza względem obrotu, ale jest często dogodna w zastosowaniach (rozpatrujemy np. ugięcie belki, płyty lub powłoki, pomijając pozostałe składowe wektora przemieszczenia). Norma funkcji zmiennych przestrzennych bywa często przyjmowana w formie Czebyszewa, jako kres górny wartości bezwzględnej funkcji (np. największe ugięcie). Stosowane przez Niemirowskiego [52] i niektórych innych autorów „przemieszczenie w określonym punkcie ciała” jest równoważne powyższej normie tylko wtedy, gdy brak wątpliwości, że przemieszczenie w tym punkcie jest istotnie największe. Kryterium sztywności może być również związane z uogólnionymi odkształceniami lub prędkościami odkształceń (np. z prędkością krzywizny osi belki).

Inne kryteria zależne od czasu mogą być związane z relaksacją naprężeń, bądź przy zadanych siłach początkowych, bądź też przy zadanych przemieszczeniach. W obu tych przypadkach możliwe są różne sformułowania, np. dotyczące minimalizacji prędkości zmniejszania się reakcji lub naprężeń, maksymalizacji samych reakcji lub naprężeń itp. W zależności od problemu kryteria te mogą prowadzić do identycznych lub do różnych kształtów optymalnych.

2.2. Przypadki szczególne kryteriów zależnych od czasu. Rozważmy przypadek, gdy kryterium jest określone pewną funkcją skalarną u , natomiast kształt może być wyznaczony pewną skończoną liczbą parametrów s_i ; możemy wtedy napisać $u = u(x, y, z; s_i; t)$. Można wtedy wyodrębnić trzy następujące przypadki szczególne.

Jeżeli u można zapisać w postaci

$$u = \psi[\varphi_1(x, y, z; s_i) \cdot \varphi_2(t)], \quad (3)$$

gdzie ψ jest monotoniczną funkcją swojego argumentu $\varphi_1 \varphi_2$, to wystarczy optymalizować funkcję φ_1 . Optymalny kształt jest wtedy niezależny od czasu.

Jeżeli u można zapisać w postaci

$$u = \psi[\varphi_1(x, y, z) \cdot \varphi_2(s_i; t)], \quad (4)$$

gdzie ψ jest monotoniczną funkcją swojego argumentu $\varphi_1 \varphi_2$, to wówczas optymalny kształt jest niezależny od normy funkcji φ_1 , natomiast jest zależny od czasu. Praktycznie przeprowadza się wtedy optymalizację dla zadanego czasu pracy konstrukcji t_* .

Jeżeli wreszcie zachodzi

$$u = \psi[\varphi_1(x, y, z) \cdot \varphi_2(s_i) \cdot \varphi_3(t)], \quad (5)$$

to optymalny kształt nie zależy ani od czasu, ani od przyjętej normy funkcji φ_1 .

2.3. Kryteria optymalizacji niezależne od czasu. Do grupy kryteriów niezależnych od czasu zaliczymy kryteria związane ze zniszczeniem przy pełzaniu, z wyboczeniem pełzającym,

częstością drgań, oraz większość kryteriów formułowanych dla konstrukcji lepkoplastycznych. Najprostsze hipotezy zniszczenia przy pełzaniu — to hipoteza uszkodzeń prowadzących do kruchego pęknięcia (Ł. M. Kaczanowa) oraz hipotezy zniszczenia ciągłego Hencky'ego-Hoffa. Ta ostatnia wymaga analizy odkształceń skończonych i dotychczas do optymalnego kształtowania nie była jeszcze stosowana, natomiast hipoteza Kaczanowa okazała się efektywna w wielu przypadkach. Nieco odmienne podejście Ju. W. Niemirowskiego [53] wiąże zniszczenie przy pełzaniu z jednostkową pracą odkształcenia; wyniki obu tych podejść są często identyczne. W najprostszych przypadkach (statyczna wyznaczalność, nieistotne zmiany geometrii ciała) powyższe kryteria prowadzą do kształtów równomiernej wytrzymałości przy pełzaniu; Niemirowski wykazał kilka ogólnych twierdzeń dotyczących konstrukcji tego typu. Ogólne podejście wykorzystujące metodę elementów skończonych zostało zaproponowane w pracy A. A. Czirasa i W. M. Dulmana [13].

Teorie wyboczenia pełzającego wprowadzają zazwyczaj pojęcie czasu krytycznego i maksymalizacja tego czasu stanowi często ważne kryterium optymalnego kształtowania. Pojęcia czasu krytycznego bywają przy tym wprowadzane w sposób bardzo różnorodny, np. jako czasu utraty stateczności pręta prostego (Shanley, Gerard, Rabotnow-Szestierikow) lub czasu nieograniczonego wzrostu ugięć pręta o krzywiznie pierwotnej (Kempner-Hoff).

Przy optymalizacji konstrukcji lepkoplastycznych jako typowe kryteria wymienimy: maksymalizację nośności pod działaniem obciążeń dynamicznych; minimalizację przemieszczeń resztkowych po impulsie obciążenia; maksymalizację obciążenia krytycznego itp.

3. Problem zależności optymalnych kształtów od równań konstytutywnych pełzania

Przy optymalnym kształtowaniu konstrukcji sprężystych lub idealnie plastycznych rzadko rozważa się problem zależności optymalnych kształtów od przyjętych równań konstytutywnych (z wyjątkiem wpływu anizotropii na kształt). W przypadku konstrukcji narażonych na pełzanie problem ten staje się istotny, tym bardziej, że równania konstytutywne wykazują tu dużą różnorodność. Można się spodziewać, iż na ogół kształty optymalne zależą od przyjętych równań. Jednakże A. Gajewski [20, 23], który poświęcił temu zagadnieniu wiele uwagi, wyodrębnił dość liczne przypadki kształtowania wykazujące bądź niezależność od równań konstytutywnych, bądź też zależność nieistotną (poprzez stałą występującą jako mnożnik). Należą tu np. jednorodne belki statyczne wyznaczalne (lecz bez udziału siły podłużnej), jednorodne płyty kołowe przy kryterium minimum mocy obciążeń zewnętrznych, jednorodne wirujące tarcze kołowe przy warunku wyrównania intensywności naprężeń i wiele innych przypadków. Podobne problemy badał również A. A. Ziewin [81], ograniczając się jednak do pełzania liniowego.

4. Pręty i belki

Obecnie przejdziemy do omówienia uzyskanych wyników w zakresie optymalnego kształtowania typowych elementów konstrukcyjnych w warunkach pełzania.

Pręty rozciągane lub ściskane (bez analizy stateczności) stanowią bardziej interesujący problem optymalizacyjny tylko przy obciążeniu zmiennym wzdłuż osi. Przypadek taki rozważał A. Gajewski w pracy [22] poświęconej optymalnemu kształtowaniu pręta wirującego wokół osi prostopadłej do jego osi na jednym z końców, z masą skupioną umieszczoną na drugim końcu. Uwzględniono siły bezwładności związane z wirowaniem; jako kryterium przyjęto prędkość pełzania (promieniowego) swobodnego końca. Optymalny kształt zależy w istotny sposób od prawa pełzania. Bardziej trywialny przypadek stałej siły podłużnej rozważał wcześniej przy funkcji celu (1) i przy ograniczeniu przemieszczeniowym M. I. Rejtman [59].

Znacznie więcej uwagi poświęcono optymalnemu kształtowaniu belek w warunkach pełzania. Zostało ono zapoczątkowane pracami Ju. B. Niemirowskiego i B. S. Reznikowa [53, 54], którzy określali kształty równomiernej wytrzymałości belek zginanych; jako miarę utraty wytrzymałości przyjmowano jednostkową pracę odkształcenia. Ciężar własny belek równomiernej wytrzymałości uwzględniali A. Gajewski [20, 21] oraz ten sam autor wraz z M. Albińską [2] i T. Sabikiem [24]. Ju. W. Goldsztejn i M. A. Sołomieszc [26, 27] określali kształty belek równomiernej wytrzymałości przy zginaniu z siłą podłużną w przypadku materiałów podlegających liniowym prawom pełzania; wykazano, iż uzyskany kształt nie różni się od odpowiedniego kształtu w zakresie sprężystym. Wpływ siły podłużnej uwzględniali również M. Życzkowski i W. Świsterski w pracach [89, 69], określających belki równomiernej wytrzymałości w zakresie ugięć skończonych. Uwzględniono rozciągliwość osi i redystrybucję naprężeń, a równomierną wytrzymałość związane z hipotezą kruchego pęknięcia Ł. M. Kaczanowa; całkowanie numeryczne układu równań dla nieliniowego pełzania połączono z iteracyjną metodą optymalnego kształtowania.

Równolegle rozwija się optymalne kształtowanie belek przy różnych kryteriach sztywności w warunkach pełzania. Ju. W. Niemirowskij i B. S. Reznikow [55] przyjmowali za takie kryterium prędkość strzałki ugięcia belki; wielkość tę można rozumieć jako normę Czebyszewa dla prędkości ugięć. Podobne kryterium sztywności przyjmowali M. Albińska i A. Gajewski [2, 20], którzy uwzględniali wpływ ciężaru własnego na optymalne kształty, oraz Ja. A. Lellep [38], rozważający belkę z materiału o innym module pełzania dla rozciągania a innym dla ściskania. Dalszym typowym kryterium sztywności (a raczej podatności) przy pełzaniu jest moc obciążeń zewnętrznych. Kryterium takie przyjmowali J. B. Martin i A. R. S. Ponter [46, 47], oraz P. I. Danczak, M. S. Michajliszin i O. N. Szablilj [14], którzy uwzględniali również efekty naprężeń ścinających. Ju. B. Goldsztejn i M. A. Sołomieszc [26, 27] traktowali całkowitą energię odkształcenia za miarę podatności przy optymalnym kształtowaniu. Porównaniu różnych kryteriów podatności wiele uwagi poświęcił A. Gajewski [20]. Jednoczesne ograniczenia związane z wytrzymałością i ze sztywnością rozważał Ju. M. Pocztnan [56], który określał optymalne kształty belek metodą programowania dynamicznego. Optymalnemu kształtowaniu belek przy niepełnej informacji, odnośnie rozkładu obciążeń poświęcona jest praca N. Ch. Arutiuniana i W. B. Kołmanowskiego [3].

Kształtowanie belek przy obciążeniach dynamicznych było przedmiotem prac Z. Mroza i Ju. R. Lepika [48, 49, 40, 42, 43]; wiązali oni kryterium podatności z normą Gaussa dla resztkowych ugięć belek sztywno-lepkich poddanych impulsowi obciążenia o danej energii kinetycznej. Lepik rozważał również optymalne podparcie belek. T. Lekszycki

i N. Olhoff [37] rozważali optymalizację belek drgających, wykonanych z materiału liniowo lepkosprężystego, pod kątem możliwie szybkiego zanikania drgań.

Stosunkowo mało uwagi poświęcono dotychczas doborowi optymalnego kształtu przekroju belek zginanych w warunkach pełzania. Jedynie w pracy M. Życzkowskiego [84] określono optymalny cienkościenny zamknięty profil przekroju belki z warunku minimum pola powierzchni przy ustalonej prędkości krzywizny osi belki.

5. Słupy, pręty narażone na wyboczenie pełzające

Wyboczenie pełzające prętów niepryzmatycznych było przedmiotem kilku prac M. Życzkowskiego [82, 83], jednak zagadnienie optymalnego kształtu zostało sformułowane i rozwiązane dopiero w pracy M. Życzkowskiego i R. Wojdanowskiej-Zajac, referowanej na sympozjum IUTAM w Göteborgu w r. 1970 [90]. Poszukiwano w niej jednostronnie utwierdzonego lub dwuprzegubowego pręta o minimalnej objętości przy zadanej sile osiowej i czasie krytycznym w nawiązaniu do teorii Rabotnowa-Szestierikowa. Prawo fizyczne opisuje przy tym pełzanie nieliniowe ze wzmocnieniem zależnym od odkształcenia. Odpowiednie rozwiązanie dla pręta dwustronnie utwierdzonego, z uwzględnieniem optymalizacji bimodalnej, podali J. Błachut i M. Życzkowski [7] stosując zasadę maksimum Pontriagina.

W przypadku słupów wykazujących imperfekcje (krzywizna pierwotna, mimośród obciążenia) problemy optymalizacji muszą być sformułowane odmiennie. Wprawdzie i w tym przypadku przy pełzaniu nieliniowym możliwe jest wprowadzenie czasu krytycznego (Kempnëra-Hoffa), to jednak ograniczenia optymalizacji mają zazwyczaj charakter sztywnościowy lub wytrzymałościowy. N. Distefano [16] przeprowadzał optymalizację parametryczną słupów o danym ugięciu w pewnym określonym czasie. R. Wojdanowska [77] dla prawa pełzania Maxwella oraz R. Wojdanowska i M. Życzkowski [79] dla ogólnego prawa liniowego uwzględniającego starzenie materiału wykazali, iż optymalne kształty uzyskane dla zakresu sprężystego zapewniają również minimalną prędkość wyboczenia pełzającego (dla pewnych szczególnych pierwotnych linii ugięcia), są więc również w pewnym stopniu optymalne w zakresie pełzania. W. Świsterski, A. Wróblewski i M. Życzkowski [70] przeprowadzili optymalizację kształtu jednostronnie utwierdzonego słupa mimośrodowo obciążonego w zakresie dużych ugięć: warunek ograniczający związany z tworzeniem się pierwszych pęknięć w sensie hipotezy Kaczanowa. Słup optymalny różni się tu od słupa równomiernej wytrzymałości.

Do omawianego działu zaliczymy również prace N. Ch. Arutiuniana i A. A. Ziewina [5, 6] poświęcone optymalizacji słupów o wysokości narastającej np. w wyniku procesu technologicznego. Autorzy określają kształt słupa, który przy stałej objętości minimalizuje przyrost przemieszczeniu swobodnego końca do chwili t_1 po przyłożeniu obciążenia; uwzględniono wpływ ciężaru własnego a pełzanie materiału opisane jest równaniem liniowym ujmującym starzenie. Optymalizacji słupów zbrojonych poświęcone są prace L. W. Genkina i W. B. Kołmanowskiego [25], W. B. Kołmanowskiego i W. W. Mietłowa [33] (ta ostatnia w ujęciu procesów losowych). Wiele uwagi zagadnieniom tego typu poświęca monografia N. Ch. Arutiuniana i W. B. Kołmanowskiego [4].

6. Ustroje prętowe

Optymalnemu kształtowaniu ustrojów prętowych w zakresie sprężystym oraz plastycznym poświęcono w literaturze wiele uwagi, z uwzględnieniem możliwości utraty stateczności elementów ściskanych lub bez. W przeciwieństwie do tego, w zakresie pełzania problemy te są prawie nietknięte, a w każdym razie brak teorii o szerszym zasięgu. G. A. Hegemier i W. Prager [32] wykazali, że ustroje kratowe typu Michella są konstrukcjami optymalnymi również w zakresie ustalonego pełzania; warunki ograniczające związane przy tym z podatnością wyrażoną mocą obciążeń zewnętrznych, natomiast ewentualnej utraty stateczności elementów ściskanych nie uwzględniono. Stateczność uwzględniono natomiast w pracach R. Wojdanowskiej i M. Życzkowskiego [76, 78], poświęconym doborowi optymalnych konfiguracji prostych dwu- i trójprętowych ustrojów kratowych. W pracy [78] wiążano stateczność z teorią Kempnera-Hoffa dla prętów z imperfekcjami, podczas gdy w pracy [76] zastosowano teorię Rabotnowa-Szestierikowa dla prętów idealnych; w obu pracach warunki ograniczające dla prętów rozciąganych sformułowano w nawiązaniu do hipotezy kruchego pęknięcia zaproponowanej przez Kaczanowa.

Praca R. Wojdanowskiej i M. Życzkowskiego [80] poświęcona jest optymalnemu przeniesieniu siły skupionej na sztywny kontur oporowy. Konstrukcją optymalną jest tu z reguły kratownica dwuprętowa. W pracy wykorzystano metodę konturów całkowitej niejednoznaczności, zaproponowaną przez M. Markiewicza i M. Życzkowskiego [44, 45] dla konstrukcji sprężystych i sprężystoplastycznych; w przypadku pełzania kontury takie zależą od założonego czasu pracy konstrukcji. Dla prętów ściskanych zastosowano teorię Rabotnowa-Szestierikowa, dla rozciąganych — Kaczanowa.

Optymalnemu kształtowaniu konstrukcji ramowych w warunkach pełzania poświęcają nieco uwagi Ju. B. Goldsztejn i M. A. Sołomieszcz [26, 27], jednakże autorzy podali jedynie wytyczne projektowania przy warunku sztywności bez żadnego przykładu.

Do omawianego działu zaliczymy również prace W. Nachbara i J. B. Schipmöldera [50] oraz A. Trojneckiego i M. Życzkowskiego [73], poświęcone optymalnemu doborowi reologicznych własności samochodowych pasów bezpieczeństwa; pasy takie po napięciu traktowano jako konstrukcje kratowe. Problem optymalizacji polegał na doborze takich własności reologicznych, które zapewnią maksimum prędkości pojazdu przy ograniczeniu przemieszczenia osoby chronionej i siły oddziaływującej w chwili zderzenia; w pracy [73] uwzględniono dodatkowo efekty plastycznego zgniotu nadwozia przy zderzeniu.

7. Tarcze i płyty

Kilka prac poświęcono optymalnemu kształtowaniu tarcz w warunkach pełzania. Obok wspomnianych już prac A. G. Kostiuka [34] (tarcze wirujące równomiernej wytrzymałości) i W. Pragera [57] (tarcze w spoczynku optymalizowane przy warunku minimum mocy obciążeń zewnętrznych) wymienimy tu prace A. Gajewskiego [20], O. Gunneskova [28] i Ja. Lellepa [39]. Gajewski rozważał zależność optymalnych kształtów tarcz wirujących, obciążonych ciśnieniem zewnętrznym, od prawa pełzania przy różnych warunkach ograniczających; stwierdził on, że przy warunku wytrzymałościowym i przy warunku

ograniczonej mocy uzupełniającej kształty optymalne nie zależą od prawa pełzania, natomiast przy ograniczeniu przemieszczenia brzegu tarczy — zależą. Gunneskov stosował metodę małego parametru do optymalizacji tarcz wirujących obciążonych ciśnieniem zewnętrznym przy warunku stałej prędkości przemieszczenia promieniowego na obwodzie tarczy. Leliep uogólnił rozwiązanie Pragera dla tarcz pierścieniowych na przypadek materiałów o odmiennych własnościach po stronie rozciągania i ściskania.

Dotychczasowe osiągnięcia w dziedzinie optymalnego kształtowania płyt w warunkach pełzania dotyczą głównie płyt kołowych i pierścieniowych przy obciążeniach kołowo-symetrycznych. Warunki ograniczające związane są przede wszystkim z wytrzymałością i ze sztywnością. Pierwsze rozwiązania dla płyt kołowych równomiernej wytrzymałości pod działaniem równomiernego obciążenia ciągłego podali niemal jednocześnie Ju. W. Niemirowskij i B. S. Reznikow [54] oraz I. G. Tieriegułow [72]. Ogólniejsze podejście należy do A. A. Czirasa i W. M. Dulmana [13, 18], którzy za kryterium utraty wytrzymałości przyjęli jednostkową energię rozproszoną do chwili przejścia pełzania ustalonego w pełzanie nieustalone trzeciego okresu. Prace te nawiązują do metody elementów skończonych.

Optymalizację płyt przy warunkach sztywności rozpoczęli również Ju. W. Niemirowskij i B. S. Reznikow [55]. Warunek ograniczający wiązali oni z osiągnięciem przez przemieszczenie w ustalonym punkcie płyty pewnej zadanej wartości; w przypadku płyt kołowych punkt ten przyjmowano w środku płyty, co z reguły jest w pełni uzasadnione. Wiele uwagi optymalnemu kształtowaniu płyt kołowych poświęcił A. Gajewski [20], który formułował warunek sztywności poprzez energię potencjalną, energię dopełniającą i ugięcie w środku płyty; w dwóch pierwszych przypadkach optymalny kształt nie zależy od przyjętego prawa fizycznego, w trzecim — zależy. G. E. Faktorowicz [19] stosował zasadę maksimum Pontriagina do optymalizacji płyt przy ograniczeniu sztywnościowym związanym z prędkością ugięcia w środku płyty. Ju. M. Pocztman [56] określał optymalne kształty płyt metodą programowania dynamicznego przy warunkach wytrzymałości i sztywności.

Problemy optymalizacji płyt przy obciążeniach dynamicznych rozpatrywał Ju. R. Lepik [41, 43]. Określał on optymalne kształty sandwiczowych płyt pierścieniowych o utwierdzonym brzegu wewnętrznym, poddanych impulsowi obciążenia o danej energii kinetycznej, przy ustalonej wartości własnej układu, charakteryzującej przebieg ruchu. W pracy [43] podano ogólniejszy algorytm, uwzględniający dodatkowo możliwość ograniczenia maksymalnej grubości warstw nośnych płyty.

8. Powłoki, cylindry, rurociągi

Optymalne kształtowanie powłok w warunkach pełzania jest dziedziną najmniej rozwiniętą: ogólniejszych teorii w tym zakresie dotychczas brak. Tym niemniej, podano kilka rozwiązań szczegółowych, które stanowią dogodny wstęp do dalszego rozwijania tematyki.

Wzmiankę o powłokach równomiernej wytrzymałości w stanie błonowo-giętnym można znaleźć w pracy I. G. Tieriegułowa [72]; proponuje on — bez specjalnego uzasadnienia — wyrównanie intensywności naprężeń uśrednionej po grubości powłoki. Przeciwnie, w stanie

błonowym powłok obrotowo-symetrycznych rozkład naprężeń jest wewnętrznie statycznie wyznaczalny i równomierny po grubości, tak, że powłoki optymalne w zakresie sprężystym są równocześnie optymalne przy pełzaniu (o ile zniszczenie może być określone tą samą hipotezą wyężeniową). Z nowszych prac wykorzystujących hipotezę Hubera-Misesa-Hencky'ego wymienimy tu J. Krużeleckiego [35], który nawiązuje również do hipotezy kruchego zniszczenia przy pełzaniu w ujęciu Kaczanowa-Leckiego-Hayhursta.

Optymalnemu kształtowaniu przekroju rurociągów pod działaniem ciśnienia, zginania i rozciągania przy ograniczeniu wytrzymałościowym w nawiązaniu do hipotezy kruchego zniszczenia przy pełzaniu typu Kaczanowa poświęconych jest kilka prac M. Rysza i M. Życzkowskiego; przyjęto prawo fizyczne nieliniowego ustalonego pełzania Nortona-Odqvista. W pracy [87] autorzy kształtują cienkościenny przekrój rurociągu o zmiennej grubości ścianki w nawiązaniu do hipotezy Kaczanowa-Galileusza; linię środkową profilu wyznaczono z warunku eliminacji stanów giętnych (profil kolisty), grubość ścianki z warunku równomiernej wytrzymałości, natomiast promień podlegał optymalizacji parametrycznej. Praca [88] uogólnia to rozwiązanie na przypadek dodatkowego skręcania i hipotezy Kaczanowa-Sdobyriewa. Skręcanie z jednej strony komplikuje problem, z drugiej go jednak upraszcza, gdyż algebraicznie największe naprężenie główne jest określone wtedy jednolitym wzorem i podział przekroju na strefy przestaje być potrzebny. M. Rysz w pracy [63] określa optymalny cienkościenny przekrój kołowy o stałej grubości ścianki wzmocniony żebrami podłużnymi przenoszącymi większą część momentu zginającego; kształt taki jest znacznie łatwiejszy do wykonania od kształtu o zmiennej grubości. Praca [64] uogólnia te rozważania na przypadek dodatkowego skręcania. Prace [61, 62, 65] poświęcone są optymalnym cylindrom grubościennym: w [61, 62] określano zmienną grubość ścianki metodą małego parametru, natomiast w [65] dobierano optymalne wymiary cylindrów o stałej grubości ścianki. N. Ch. Arutiunian i A. A. Ziewin [5] rozważali problem optymalnego owijania cylindrów wykazujących własności reologiczne taśmą sprężystą o wysokiej wytrzymałości.

Optymalizacji parametrycznej powłok wykonanych z kompozytów z wypełniaczem o własnościach reologicznych poświęcone są prace G. A. Tetersa, R. B. Rikardsa i W. L. Narusberga [71, 51, 60]. Analizowane były powłoki ściskane osiowo, materiał wypełniacza był opisany równaniami liniowego pełzania, a warunki ograniczające związane były z natychmiastową utratą stateczności i z ograniczeniem ugięć w trakcie pełzania.

Zaliczamy tu również pewne specyficzne zagadnienie optymalizacji, które rozważali A. E. Dubberley, D. P. Johnson, J. R. Punches i R. J. McCandless [17]: optymalizowali oni sześciokątną rurę, stanowiącą element reaktora, pod działaniem pola temperatury i strumienia neutronów, wpływających bezpośrednio na charakterystyki pełzania materiału.

9. Problemy optymalizacji związane z relaksacją naprężeń

Naprężenia resztkowe, pozostające w konstrukcji po zdjęciu obciążeń, mogą wywoływać w tej konstrukcji bądź efekty korzystne (np. w przypadku konstrukcji sprężonych), bądź też niekorzystne (gdy rozpatrujemy korozję naprężeniową, wpływ na póź-

niejszą utratę stateczności, zmęczenie itp.). Ponieważ relaksacja — jako typowy proces reologiczny — powoduje częściowe lub całkowite zanikanie tych naprężeń, więc odnośnie problemy optymalizacji mogą bądź zmierzać do minimalizacji efektów relaksacji, bądź też do ich maksymalizacji.

Problemy minimalizacji efektów relaksacji sformułował i badał w pracy [84] M. Życzkowski. Dla przykładu określono optymalne parametry kształtu prostego statycznie niewyznaczalnego ustroju prętowego, powodujące zachowanie możliwie największych reakcji bądź przy danych wartościach początkowych tych reakcji, bądź też przy danym przemieszczeniu początkowym. Rozpatrywano konstrukcje jednorodne i niejednorodne; zwłaszcza w tych ostatnich wynik zależał w sposób istotny od sformułowania zagadnienia.

Całkowicie odmiennie sformułowane problemy rozważali O. N. Szablij i W. I. Zareckij. W pracy [67] określili oni dla powłoki walcowej, a w pracy [68] dla tarczy pierścieniowej takie przebiegi nagrzewania indukcyjnego, które w ciałach liniowo termolepkosprężystych spowodują w wyniku relaksacji możliwie małe naprężenia resztkowe.

Problemy optymalizacji związane z relaksacją naprężeń — typowe dla ośrodków reologicznych — są więc jeszcze bardzo słabo zbadane zarówno pod względem filozoficznym (sformułowanie właściwych celów działania), jak i odnośnie ogólnych twierdzeń i metod obliczeniowych.

10. Problemy optymalnego kształtowania konstrukcji lepkoplastycznych

Kształtowanie konstrukcji lepkoplastycznych wyodrębnimy z uwagi na pewne specyficzne cechy i dla podkreślenia stopnia trudności. Lepkoplastyczność — stanowiąca najbardziej adekwatny opis własności licznych materiałów, zwłaszcza przy obciążeniach dynamicznych — łączy trudności teorii plastyczności i klasycznej reologii: efektywny czynnik czasu, a jednocześnie konieczność rozróżnienia procesów plastycznie czynnych i plastycznie biernych, co w lepkoplastyczności nie zawsze jest określone jednoznacznie i doświadczalnie sprawdzonymi kryteriami. Takie problemy jak stateczność konstrukcji lepkoplastycznych czy narażenie ich na różne formy lokalnego zniszczenia są znacznie mniej zbadane, niż w teorii plastyczności i teorii lepkosprężystości, co utrudnia właściwe sformułowanie warunków ograniczających przy kształtowaniu.

Szczególnie wiele uwagi optymalnemu kształtowaniu konstrukcji lepkoplastycznych, zarówno przy obciążeniach quasi-statycznych, jak i dynamicznych, poświęcił E. Cegielski. Ograniczenia optymalizacji zostały przy tym podzielone na ograniczenia o charakterze globalnym i lokalnym. Do pierwszej grupy zaliczono między innymi energię dysypowaną w trakcie procesu i normę przemieszczeń resztkowych (np. największe ugięcie resztkowe). Lokalne ograniczenia były nakładane na jednostkową energię dysypowaną, maksymalne (w czasie) naprężenie zredukowane w poszczególnych punktach ciała, największy lub najmniejszy wymiar przekroju itp. Ograniczeń związanych ze statecznością konstrukcji nie stawiano.

Obciążenia quasi-statyczne rozważano w pracy [10], badającej dla przykładu optymalne kształty belki wspornikowej. Zbadano zależność kształtów od praw fizycznych,

od rozkładu obciążeń w przestrzeni i w czasie, oraz od przyjętej formy ograniczeń. Pozostałe prace poświęcono obciążeniom dynamicznym: kształtom optymalnym prętów uderzanych osiowo [11], kształtowaniu belek przy udarze poprzecznym [86], kształtowaniu powłok walcowych przy dynamicznych obciążeniach złożonych [12] (te trzy prace zostały opublikowane wspólnie z M. Życzkowskim) oraz kształtowaniu belek przy różnych formach impulsu [9].

Pomimo różnorodności omówionej powyżej tematyki można stwierdzić, że optymalne kształtowanie konstrukcji lepkoplastycznych przedstawia jeszcze pole niemal całkowicie otwarte.

11. Inne zagadnienia optymalizacji przy pełzaniu

Niezależnie od problemów optymalnego kształtowania konstrukcji, własności reologiczne materiałów stwarzają możliwości sformułowania zagadnień optymalizacji procesów w ustalonym punkcie ciała, nawet w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia. Problem optymalnej ścieżki $\varepsilon = \varepsilon(t)$, zapewniającej minimalną pracę odkształcenia przy osiągnięciu danego odkształcenia końcowego w zadanym czasie T , sformułował S. Breuer [8]; podał on rozwiązanie dla pewnych szczególnych przypadków liniowej lepkosprężystości. Ogólny przypadek liniowych praw fizycznych rozpatrywali G. Leitmann [36], M. E. Gurtin, R. C. MacCamy i L. F. Murphy [29]; w tej ostatniej pracy autorzy stwierdzili, że bez dodatkowych ograniczeń przyjętych przez Leitmanna ścieżka optymalna wykazuje nieciągłości w punktach $t = 0$ i $t = T$. Dalsze rezultaty w tym kierunku uzyskali M. A. Day [15] (oszacowanie minimalnej pracy odkształcenia) i S. J. Spector [66] (dowód monotoniczności ścieżki). Optymalne sterowanie procesu temperaturą rozpatrywali M. E. Gurtin i L. F. Murphy [30, 31] oraz Y. Weitsman i D. Ford [74, 75] (optymalne chłodzenie zapewniające minimalizację naprężeń reszkowych).

12. Uwagi końcowe i wnioski

Optymalne kształtowanie konstrukcji w warunkach pełzania stanowi stosunkowo nową gałąź kształtowania, technicznie ważną zarówno z uwagi na pracę konstrukcji metalowych w podwyższonych temperaturach, strumieniu neutronów itp., jak i na stosowanie materiałów pełzających w temperaturze pokojowej, np. betonu i tworzyw sztucznych.

Problemy kształtowania w warunkach pełzania wyróżniają się następującymi specyficznymi cechami:

- 1) Istnienie czynnika czasu, który z jednej strony prowadzi do projektowania konstrukcji na określoną żywotność a z drugiej powoduje wzrost liczby wymiarów zagadnienia — np. równania stanu dla elementów jednowymiarowych stają się równaniami różniczkowymi cząstkowymi w miejsce zwyczajnych;
- 2) Równania stanu cechuje z reguły nieliniowość, co często uniemożliwia stosowanie metod dogodnych dla zagadnień liniowych; ponadto duża różnorodność równań stanu często rzutuje na wynik optymalizacji;

3) Formy ograniczeń optymalizacji są również bardzo różnorodne — tak na przykład istnieje wiele teorii wybożenia pełzającego, zniszczenia przy pełzaniu itp.

4) Występują tu całkowicie nowe typy ograniczeń (lub kryteriów optymalizacji), np. w związku z ograniczeniem lub minimalizacją relaksacji naprężeń, z minimalizacją pracy odkształcenia w trakcie procesu itp.

5) W przypadku konstrukcji lepkoplastycznych wszystkie te cechy nakładają się na cechy typowe dla plastyczności, związane przede wszystkim z rozróżnieniem procesów plastycznie czynnych i biernych.

W świetle omówionego bogactwa problematyki uzyskane w tym zakresie wyniki są jeszcze bardzo skromne. Z drugiej strony uwzględnianie pełzania w obliczeniach wytrzymałościowych bywa coraz częściej stosowane w praktyce inżynierskiej. Dziedzina optymalnego kształtowania konstrukcji w warunkach pełzania może więc liczyć na dalszy wszechstronny rozwój.

Literatura

1. H. M. ADELMAN, PATRICIA L. SAWYER, C. P. SHORE, *Optimum design of structures at elevated temperatures*, AIAA Journal **17** (1979), 6, 622 - 629.
2. M. ALBIŃSKA, A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej obciążonej siłami zewnętrznymi i ciężarem własnym w warunkach pełzania*, Mech. Teor. Śtos. **16** (1978), 4, 499 - 506.
3. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ, *Задача оптимизации в теории ползучести для неоднородных балок, подверженных старению*, Прикл. Механика **15** (1979), 10, 97 - 106.
4. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ, *Теория ползучести неоднородных тел*, Наука, Москва 1983.
5. Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. ЗЕВИН, *Задачи оптимизации в теории ползучести для нарастаемых тел, подверженных старению*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1979), I, 100 - 107.
6. Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. ЗЕВИН, *Оптимальная форма нарастаемой колонны*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1981), 5, 128 - 132.
7. J. BLACHUT, M. ŻYCZKOWSKI, *Bimodal optimal design of clamped — clamped columns under creep conditions*, Int. J. Solids Struct. **20** (1984), 6, 571 - 577.
8. S. BREUER, *The minimizing strain-rate history and the resulting greatest lower bound on work in linear viscoelasticity*, Z. angew. Math. Mech. **49** (1969), 209 - 213.
9. E. CEGIELSKI, *Optimization of rigid-viscoplastic bars and beams under dynamic loadings*, IV Bulg. Congr. Mech., Varna 1981, Vol. 1, 484 - 489.
10. E. CEGIELSKI, *Problemy optymalnego kształtowania wspornikowej belki lepkoplastycznej przy obciążeniu quasistatycznym*, Mech. Teor. Śtos. **23** (1985), 3-4, 381 - 396.
11. E. CEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Parametric optimization of viscoplastic bars under dynamic axial loading*, Rozpr. Inż. **29** (1981), 1, 27 - 37.
12. E. CEGIELSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimization of some viscoplastic structures under variable loads*, Euromech Coll. 174 on Inelastic Structures, Palermo 1983, COGRAS, Palermo 1984, 105 - 116.
13. А. А. ЧИРАС, В. М. ДУЛЬМАН, *Задачи оптимизации элементов конструкций в условиях ползучести*, Строит. Мех. Расч. Сооруж. (1984), 6, 19 - 22.
14. Р. И. ДАНЧАК, М. С. МИХАЙЛИШИН, О. Н. ШАБЛИЙ, *Оптимальное проектирование статически определимых балок, находящихся в условиях установившейся ползучести, с учетом напряжений поперечного сдвига*, Прикл. Механика **20** (1984), 7, 89 - 96.
15. M. A. DAY, *Improved estimates for least work in linear viscoelasticity*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **32** (1979), 1, 17 - 24.
16. N. DISTEFANO, *Quasilinearization and the solution of nonlinear design problems in structures undergoing creep deformations*, Int. J. Solids Struct. **8** (1972), 215 - 225.

17. A. E. DUBBERLEY, D. P. JOHNSON, J. R. PUNCHES, R. J. MCCANDLESS, *LMFBR fuel assembly channel wall cross section optimization*, Trans. 4th SMiRT Congr. San Francisco 1977, D2/1 - 2/9.
18. В. М. Дульман, *Оптимизация круговых осесимметрично нагруженных пластинок в условиях установившейся ползучести, Постановка и Решение Задач Строительной Механики*, Вильнюс 1981.
19. Г. Е. Факторович, *Оптимальное проектирование круглой пластины при ползучести*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1978), 6, 163 - 165.
20. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiału o nieliniowości fizycznej*, Zesz. Nauk. Pol. Krak. 5, Kraków 1975.
21. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej z materiału nieliniowego fizycznie obciążonej ciężarem własnym*, Rozpr. Inż. 24 (1976), 3, 453 - 467.
22. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wirującego pręta z uwzględnieniem nieliniowości fizycznej materiału*, Mech. Teor. Stos. 14 (1976), 2, 261 - 271.
23. A. GAJEWSKI, *Effect of physical nonlinearities on optimal design of structures*, Proc. IUTAM Symp. on Physical Nonlinearities Senlis 1980, Springer 1981, 81 - 84.
24. A. GAJEWSKI, T. SĄBIK, *Optymalne kształtowanie swobodnie podpartej belki, obciążonej silami zewnętrznymi i ciężarem własnym, w warunkach pełzania ustalonego*, Czasopismo Techn. 84 (1984), 2-M, 1 - 7.
25. Л. В. Генкин, В. Б. Колмановский, *Оптимизация по прочности формы вязкоупругого армированного стержня*, Прикл. Мат. Мех. 46 (1982), 683 - 690.
26. Ю. Б. Гольдштейн, М. А. Соломещ, *Некоторые задачи оптимального проектирования упруго-вязких стержневых систем*, Уч. Зап. Петрозаводск. Унив. 18 (1972), 4, 184 - 193.
27. Ю. Б. Гольдштейн, М. А. Соломещ, *Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем*, Изд. Ленингр. Унив. Ленинград 1980.
28. O. GUNNESKOV, *Optimal design of rotating disks in creep*, J. Struct. Mech. 4 (1976), 2, 141 - 160.
29. M. E. GURTIN, R. C. MACCAMY, L. F. MURPHY, *On optimal strain paths in linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math. 37 (1979), 151 - 156.
30. M. E. GURTIN, L. F. MURPHY, *On optimal temperature paths for thermorheologically simple viscoelastic materials*, Quart. Appl. Math. 38 (1980), 2, 179 - 189.
31. M. E. GURTIN, L. F. MURPHY, *Optimal temperature paths for thermorheologically simple viscoelastic materials with constant Poisson's ratio are canonical*, Quart. Appl. Math. 41 (1984), 4, 457 - 460.
32. G. A. HEGEMIER, W. PRAGER, *On Michell trusses*, Int. J. Mech. Sci. 11 (1969), 2, 209 - 215.
33. В. Б. Колмановский, В. В. Метлов, *Оптимальная форма армированной колонны, наращаемой со случайной скоростью*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1983), I, 91 - 101.
34. А. Г. Костюк, *Расчет профиля вращающегося диска для условий ползучести*, Прикл. Мат. Мех. 17 (1953), 5, 615 - 618.
35. J. KRUŻELECKI, *Pewne problemy kształtowania powłok osiowo-symetrycznych w stanie blonowym*, Mech. Teor. Stos. 17 (1979), 1, 79 - 92; str. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 27 (1979), 8/9, 353 - 360.
36. G. LEITMANN, *Some problems of scalar and vector-valued optimization in linear viscoelasticity*, J. Optimiz. Theory Appl. 23 (1977), 1, 93 - 99.
37. T. LEKSZYCKI, N. OLHOFF, *Optimal design of viscoelastic structures under forced steady state vibration*, DCAMM rep. 195 (1980); J. Struct. Mech. 9 (1981), 4.
38. Я. А. Леллеп, *Оптимальное проектирование балок в условиях установившейся ползучести*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1977), I, 202 - 206.
39. Я. А. Леллеп, *К оптимальному проектированию кольцевых пластин при установившейся ползучести*, Уч. Зап. Тартуск. Унив. 487 (1979), 8 - 15.
40. Ю. Р. Лепик, *Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения*, Уч. Зап. Тартуск. Унив. 430 (1977), 132 - 143.
41. Ю. Р. Лепик, *Оптимальное проектирование нелинейно-вязких кольцевых пластин при импульсном нагружении*, Труды XII Всес. Конф. Обол. и Пластин, т. III, Ереван 1980, 5 - 10.
42. Ü. LERİK, *Application of the control theory for optimal design of nonelastic beams under dynamic loading*, Proc. IUTAM Symp. Structural Control, Waterloo 1979, North Holland 1980, 447 - 457.

43. Ю. Лепик, *Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения*, Валгус, Таллин 1982.
44. M. MARKIEWICZ, *Kształtowanie prostych ustrojów kratowych metodą wyznaczania konturu całkowitej niejednoznaczności*, Rozpr. Inż. 28 (1980), 4, 569 - 584.
45. M. MARKIEWICZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Contour of complete nonuniqueness as a method of structural optimization with stability constraints*, J. Optimiz. Theory Appl. 35 (1981), 1, 23 - 30.
46. J. B. MARTIN, *The optimal design of beams and frames with compliance constraints*, Int. J. Solids Struct. 7 (1971), 1, 63 - 81.
47. J. B. MARTIN, A. R. S. PONTER, *The optimal design of a class of beam structures for non-convex cost function*, J. de Mécanique 11 (1972), 2, 341 - 360.
48. Z. MRÓZ, *Mode approach to rational synthesis of structures under impulsive and dynamic pressure loading*, Trans. 4th Conf. SMiRT, San Francisco 1977, L2.4/1 - 8.
49. З. Мроз, Ю. Р. Лепик, *Оптимальное проектирование конструкций при импульсном нагружении*, Мех. Полимеров (1977), 6, 1021 - 1028.
50. W. NACHBAR, J. B. SCHIRMÖLDER, *Optimization of a viscoelastic structure, the seat-belt problem*, J. Appl. Mech. 36 (1969), 4, 565 - 572.
51. В. Л. НАРУСВЕРГ, *Оптимизация цилиндрической оболочки из композита с вязкоупругим наполнителем, работающим на длительную устойчивость*, Мех. Полимеров (1977), 4, 679 - 684.
52. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Оптимальное проектирование ползучих конструкций*, III Всес. Съезд по Теор. Прикл. Мех., Москва 1968.
53. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Об учете веса при проектировании конструкций в условиях ползучести*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1970), 4, 113 - 123.
54. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Б. С. РЕЗНИКОВ, *Равнопрочные в условиях ползучести балки и плиты*, Машиноведение (1969), 2, 58 - 64.
55. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Б. С. РЕЗНИКОВ, *Об оптимальном по условиям эксплуатации проектировании балок и пластин подверженных ползучести*, Машиноведение (1969), 3, 75 - 80.
56. Ю. М. ПОЧТМАН, *Динамическое программирование в задачах оптимизации конструкции подверженных ползучести*, Докл. АН СССР 196 (1971), 3, 553 - 556.
57. W. PRAGER, *Optimal structural design for given stiffness in stationary creep*, Z. angew. Math. Physik 19 (1968), 2, 252 - 256.
58. Ю. Н. РАВОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, Москва 1966.
59. М. И. РЕЙТМАН, *К теории оптимального проектирования пластмассовых конструкций с учетом фактора времени*, Мех. Полимеров (1967), 357 - 360.
60. Р. Б. РИКАРДС, Г. А. ТЕТЕРС, *Оптимизация цилиндрической оболочки из композитного материала с вязкоупругим наполнителем при осевом сжатии*, Мех. Полимеров (1975), 3, 442 - 446.
61. M. RYSZ, *Optimal design of a thick-walled pipe-line cross-section in creep conditions*, IV Bulg. Congr. Mech., Varna 1981, Vol. 1, 478 - 483.
62. M. RYSZ, *Wymiarowanie cylindrów grubościennych pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i rozciągania z uwagi na kruche pękanie przy pełzaniu*, Rozpr. Inż. 33 (1985), 4, 445 - 459.
63. M. RYSZ, *Optimal rib-reinforcement of a thick-walled pipeline with respect to creep rupture*, J. of Pipelines (Elsevier), 5, (1985) 125-136.
64. M. RYSZ, *Optimal design of ribbed pipelines in creep conditions*, J. of Pipelines (w druku).
65. M. RYSZ, *Optimal design of a thick-walled pipe-line cross-section against creep rupture* (w druku).
66. S. J. SPECTOR, *On monotonicity of the optimal strain path in linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math. 38 (1980), 369 - 373.
67. О. Н. ШАБЛИЙ, В. И. ЗАРЕЦКИЙ, *Оптимальное управление напряженно-деформированным состоянием упруговязкой цилиндрической оболочки*, Прикл. Мех. 17 (1981), 7, 42 - 47.
68. О. Н. ШАБЛИЙ, В. И. ЗАРЕЦКИЙ, *Оптимальное управление напряженно-деформированным состоянием диска*, Прикл. Мех. 17 (1981), 8, 69 - 74.
69. W. ŚWISTERSKI, *Optimization of statically indeterminate, geometrically non-linear beams in creep conditions*, IV Bulg. Congr. Mech., Varna 1981, Vol. 1, 472 - 477.
70. W. ŚWISTERSKI, A. WRÓBLEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically non-linear eccentrically compressed*

- columns of uniform creep strength vs optimal columns*, Int. J. Non - Linear Mechanics 18 (1983), 4, 287 - 296.
71. Г. А. ТЕТЕРГ, Р. Б. РИКАРДС, В. Л. НАРУСБЕРГ, *Оптимизация оболочек из слоистых композитов*, Зинатне, Рига 1978.
 72. И. Г. ТЕРЕГУЛОВ, *Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести*, Наука, Москва 1969.
 73. А. ТРОJНАСКИ, М. ЖЫЧКОВСКИ, *Effect of plastic crushing of the car body on optimization of rheological properties of safety belts*, Rozpr. Inż. 29 (1981), 1, 115 - 130.
 74. Y. WEITSMAN, *Optimal cool-down in linear viscoelasticity*, J. Appl. Mech. 47 (1980), 1, 35 - 39.
 75. Y. WEITSMAN, D. FORD, *On the optimization of cool-down temperatures in viscoelastic resins*, Proc. 14th Mtg. Soc. Engin. Sci. (1977), 323 - 339.
 76. R. WOJDAŃSKA, *Оптималне кшталтование устројов кратовых в warunkach pełzania w nawiązaniu do teorii wyboczenia Rabinowa-Szestierikowa*, Mech. Teor. Stos. 12 (1974), 3, 245 - 263.
 77. R. WOJDAŃSKA, *Optimal design of weakly curved compressed bars with Maxwell type creep effects*, Arch. Mech. Stos. 30 (1978), 6, 845 - 851.
 78. R. WOJDAŃSKA, M. ЖЫЧКОВСКИ, *Оптималне кшталтование устројов кратовых в warunkach pełzania w nawiązaniu do teorii wyboczenia Kempnera-Hoffa*, Arch. Inż. Łądowej 18 (1972), 4, 511 - 530; str. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 21 (1973), 6, 261 - 268.
 79. R. WOJDAŃSKA, M. ЖЫЧКОВСКИ, *On optimal imperfect columns subjected to linear creep buckling*, J. Appl. Mech. 47 (1980), 2, 438 - 439.
 80. R. WOJDAŃSKA, M. ЖЫЧКОВСКИ, *Optimal trusses transmitting a force to a given contour in creep conditions*, Int. J. Mech. Sci. 26 (1984), 1, 21 - 28.
 81. А. А. ЗЕВИН, *Об оптимальной форме стареющего наследственного тела*, Изв. АН СССР, Мех. Тверд. Тела (1979), 3, 127 - 134.
 82. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Some problems of creep buckling of homogeneous and non-homogeneous bars*, Proc. IUTAM Symp. on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Warsaw 1958, Pergamon Press London 1959, 353 - 363.
 83. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Creep buckling of continuously longitudinally non-homogeneous and non-prismatic bars*, Arch. Mech. Stos. 13 (1961), 2, 213 - 237.
 84. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Optimal structural design in rheology*, 12th. Int. Congr. Theor. Appl. Mechanics, Stanford 1968; J. Appl. Mech. 38 (1971), 1, 39 - 46.
 85. M. ЖЫЧКОВСКИ, *Recent results on optimal design in creep conditions*, Euromech Coll. 164 on Optimization Methods in Structural Design, Bibl. Inst. Zürich 1983, 444 - 449.
 86. M. ЖЫЧКОВСКИ, E. CEGIELSKI, *Parametryczna optymalizacja belek sztywno-lepkoplastycznych pod działaniem obciążeń dynamicznych*, Arch. Inż. Łądowej, 32 (1986), 1, 95 - 104.
 87. M. ЖЫЧКОВСКИ, M. RYSZ, *Optimal design of a thin-walled pipe-line cross-section in creep conditions*, Proc. Symp. on Mechanics of Inelastic Media and Structures, Warszawa 1978, PWN 1982, 329 - 339.
 88. M. ЖЫЧКОВСКИ, M. RYSZ, *Optimization of cylindrical shells under combined loading against brittle creep rupture*, Proc. IUTAM Symp. on Inelastic Behavior of Plates and Shells, Rio de Janeiro 1985, Springer 1986, 385 - 401.
 89. M. ЖЫЧКОВСКИ, W. ŚWISTERSKI, *Optimal structural design of flexible beams with respect to creep rupture time*, Proc. IUTAM Symp. on Structural Control, Waterloo 1979, North Holland 1980, 795 - 810.
 90. M. ЖЫЧКОВСКИ, R. WOJDAŃSKA-ZAJĄC, *Optimal structural design with respect to creep buckling*, Proc. IUTAM Symp. Creep in Structures II, Göteborg 1970, Springer 1972, 371 - 387.

Резюме

ОБЗОР ТРУДОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ
В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотрено проблематику и характерные черты оптимального проектирования конструкции в условиях ползучести; эту тему раскрыли четыре работы 1967 - 8 годов.

В дальнейшем рассмотрено результаты полученные в области проектирования отдельных конструктивных элементов, а именно: (4) стержни и балки, (5) колонны, стержни подвергающиеся продольному изгибу при ползучести, (6) стержневые системы, (7) диски и пластинки, (8) оболочки, цилиндры, трубопроводы, (9) проблемы оптимизации связанные с релаксацией напряжений, (10) проблемы оптимального проектирования вязкопластических конструкций, (II) другие задачи оптимизации при ползучести. Специфические черты разрабатываемой проблематики приведены в конечных выводах следующим образом: (I) существование фактора времени, (2) нелинейность уравнений состояния, (3) разнородность ограничений оптимизации, (4) новые типы ограничений, напр. связанные с релаксацией напряжений, (5) добавочные черты специфические при проектировании вязкопластических конструкций.

Summary

A SURVEY OF OPTIMAL STRUCTURAL DESIGN IN CREEP CONDITIONS

Typical problems and features of optimal design of structures in creep conditions are discussed; this branch of optimal design was initiated by four papers published in 1967 - 8. Subsequently, the results obtained in optimization of individual structural elements are reviewed, namely: (4) bars and beams, (5) columns, bars subject to creep buckling, (6) bar systems, (7) disks and plates, (8) shells, cylinders, pipelines, (9) problems of optimization under relaxation constraints, (10) problems of optimal design of viscoplastic structures, (11) other problems of optimization in creep conditions. Specific features of the problems discussed are summarized in final remarks as follows: (1) existence of the factor of time, (2) nonlinearity of equations of state, (3) great variety of optimization constraints, (4) new types of constraints, e.g. related to stress relaxation, (5) additional features when optimizing viscoplastic structures.

Praca wpłynęła do Redakcji 20 listopada 1985 roku