

GRAFY TRANSFORMACJI ZMIENNYCH JAKO MODELE DRGAJĄCYCH UKŁADÓW CIĄGŁYCH

JÓZEF WOJNAROWSKI
ANDRZEJ NOWAK

Politechnika Śląska, Gliwice

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- A_k — pole przekroju k -tego elementu belkowego
 \mathbf{C} — macierz sztywności elementu sprężystego
 c — współczynnik sztywności
 D_k — funkcja charakterystyczna układu
 D — funkcja wyznacznikowa grafu przekształconego
 E — moduł Younga na rozciąganie
 I — geometryczny moment bezwładności przekroju belki
 K_1, K_2, K_3, K_4 — funkcje Kryłowa-Pragera
 \mathbf{M} — macierz bezwładności elementu inercyjnego
 S_k — siła osiowa w k -tym przekroju
 \mathbf{T}_{ij}^k — macierzowa waga krawędzi grafu drgań poprzecznych
 t_{ij}^k — waga krawędzi grafu dla drgań wzdłużnych
 \mathbf{T}^k — macierz przejścia k -tego elementu belkowego
 \mathbf{T}_{ij}^* — waga krawędzi grafu zredukowanego
 u_k — przemieszczenie osiowe w k -tym przekroju
 \mathbf{v}_k — macierz zmiennych w k -tym przekroju
 ${}_1x_k$ — wierzchołek grafu odpowiadający k -tej zmiennej biegunowej
 ${}_2x_k$ — wierzchołek grafu odpowiadający k -tej zmiennej przepływowej
 X_T — oznaczenie grafu transformacji zmiennych
 \tilde{X}_T — oznaczenie grafu przekształconego
 \mathbf{Y}_k — macierz podatności w k -tym przekroju
 Y_k — podatność przemieszczeniowa układu w k -tym przekroju
 β — pierwiastek charakterystyczny
 Δ_{ij} — funkcja wyznacznikowa grafu dla drgań wzdłużnych
 $\mathbf{\Delta}_{ij}$ — macierz wyznacznikowa grafu dla drgań poprzecznych
 δ — transmitancja ścieżki głównej grafu zredukowanego

- Δ — macierz charakterystyczna układu
 ρ — gęstość masy
 Θ_k — podatność kątowna w k -tym przekroju
 μ_k — współczynnik określający iloraz pierwiastków charakterystycznych
 $\bar{\mathbf{1}}$ — macierz $[1, 0]$
 $\underline{\mathbf{1}}$ — macierz $[0, 1]$.

1. Wprowadzenie

W formułowaniu zadań modelowania drgań układów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły stosuje się metody: klasyczna metoda rozdzielania zmiennych, macierzy przeniesienia [10] oraz metodę elementów skończonych [1]. Niektóre z tych metod są wygodnym narzędziem w analizie drgań układów prętowych, co wymaga przyjęcia postaci funkcji kształtu.

W pracy sformułowano nową interpretację modelowania drgań układów ciągłych przy zastosowaniu formalizmu grafów [5, 7]. Metodę grafów wykorzystano w agregacji podukładów prostych, które mogą być zarówno ciągłe jak i dyskretne. W przypadku układów złożonych powstaje problem ustalenia warunków zgodności przemieszczeń i sił pomiędzy podukładami nazywanymi prostymi o znanych podatnościach dynamicznych. Konstruując grafy transformacji zmiennych elementu prętowego oraz podstawowych elementów dyskretnych, sposób modelowania sprowadzono do wyznaczania ścieżek głównych w grafie układu [2, 3, 4].

Zastosowania grafów przepływu sygnałów i reguły Masona znane są w analizie układów elektrycznych [8, 9] i dotyczą one równań cząstkowych rzędu 2-go. W sformułowanej metodzie opisuje się układy prętowe drgające wzdłużnie i skrętnie, których modelem matematycznym są równania rzędu 2-go oraz układy wykonujące drgania giętne, modelowane równaniami rzędu 4-go. Zakres metody ograniczono do wyznaczenia równania charakterystycznego oraz dynamicznych podatności układów ciągłych.

Dla układów o strukturze szeregowej podano rekurencyjne związki, umożliwiające redukcję grafu do grafu czwórnika z wierzchołkami brzegowymi. W grafie tym jedna z transformacji zastępczych określa równanie charakterystyczne układu. Możliwe jest również badanie postaci drgań własnych układu na etapie kolejnych kroków redukcji grafu. Zakres metody rozszerzono na układy o strukturze nieszeregowej dzięki zastosowaniu dekompozycji układu na podukłady oraz agregacją ich grafów. W tym przypadku konieczne jest wyznaczenie dynamicznych podatności podukładów w punkcie sprzężenia.

Ponadto rozważono zagadnienie badania wrażliwości strukturalnej częstości własnych układu ciągłego przy modyfikacji struktury układu. W przedstawionym przykładzie badań wpływ położenia punktu sprzężenia podukładów na wartości pierwiastków charakterystycznych. Analiza wykazała, że w niektórych położeniach częstości własne układu głównego są niewrażliwe na modyfikację struktury tego układu, przez przyłączenie drugiego podukładu.

2. Grafy transformacji zmiennych elementów

Układy ciągle można modelować za pośrednictwem belek prostych, wykonujących drgania wzdłużne oraz poprzeczne. W obydwu przekrojach brzegowych elementu wyróżnia się macierze kolumnowe zmiennych reprezentujących wielkości kinematyczne oraz siłowe^{*)}. Pomiedzy zmiennymi wyodrębnionymi w przekrojach brzegowych zachodzi relacja macierzowa:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{T}\mathbf{v}_1, \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{v}_i = \text{col}[u, y, \vartheta, s, Q, M]_i$, $i = 1, 2$,

$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\beta)$ jest macierzą transformacji zmiennych elementu macierzą przejścia elementu,

β jest pierwiastkiem charakterystycznym.

Dokonując specyfikacji macierzy \mathbf{T} oddzielnie dla drgań wzdłużnych i poprzecznych otrzymujemy szczegółowe jej postacie [1]

— dla drgań wzdłużnych:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \frac{l}{EA\beta} \sin \beta \\ -\frac{EA}{l} \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

— dla drgań poprzecznych:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie wyróżnione podmacierze są następujące:

$$\mathbf{T}_{11} = \mathbf{T}_{22} = \begin{bmatrix} K_1 & \frac{l}{\beta} K_2 \\ \frac{\beta}{l} K_4 & K_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-l^3}{EI\beta^3} K_4 & \frac{-l^2}{EI\beta^2} K_3 \\ \frac{-l^2}{EI\beta^2} K_3 & \frac{-l}{EI\beta} K_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{-EI\beta^3}{l^3} K_2 & \frac{-EI}{l^2} \beta^2 K_3 \\ \frac{-EI\beta^2}{l^2} K_3 & \frac{-EI\beta}{l} K_4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

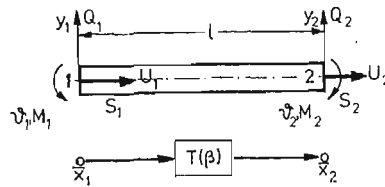
gdzie przez $K_i = K_i(\beta)$, $i = \pm 1, 2, 3, 4$ oznaczono funkcje Kryłowa.

Równanie (1) można odwzorować geometrycznie w postaci grafu przepływu informacji elementu belkowego (rys. 1).

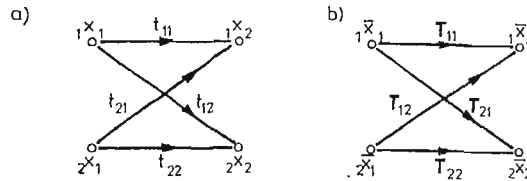
Odpowiednie grafy transformacji zmiennych elementu ilustrują rys. 2a, b.

W tablicy 1 zamieszczono schematy fizyczne, postacie macierzy przejścia oraz grafy transformacji zmiennych elementów dyskretnych — sztywności i masy, dokonując ich specyfikacji dla drgań wzdłużnych i poprzecznych.

^{*)} Zmienne biegunowe oraz przepływowo zgodnie z przyjętą terminologią zaproponowaną przez Firestona [6].



Rys. 1. Model elementu ciągłego



Rys. 2. Grafy elementu belkowego

Tablica 1

Lp	schemat elementu	macierz przejścia elementu	graf transformacji zmiennych elementu
1		$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
2		$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_y & 0 \\ 0 & c_\varphi \end{bmatrix}$	
3		$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix}$	
4		$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -I\omega^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\tilde{M} = \begin{bmatrix} -m\omega^2 & 0 \\ 0 & -I\omega^2 \end{bmatrix}$	

Dla układów złożonych z większej liczby elementów zachodzi potrzeba uzależniania ich pierwiastków charakterystycznych, wykorzystując wzory:
— dla drgań wzłużnych:

$$\beta_1 = \sqrt{\omega^2 \frac{\rho_1 l_1^2}{E_1}}, \quad \beta_K = \chi_K \beta_1, \quad \chi_K = \sqrt{\frac{E_1 \rho_K l_K^2}{E_K \rho_1 l_1^2}}, \quad (6)$$

— dla drgań poprzecznych:

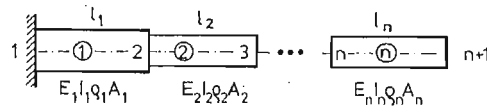
$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\omega^2 \frac{\rho_1 A_1 l_1^4}{E_1 I_1}}, \quad \lambda_K = \lambda_1 \nu_K,$$

$$\nu_K = \sqrt[4]{\frac{E_1 I_1 \rho_K A_K l_K^4}{E_K I_K \rho_1 A_1 l_1^4}}.$$

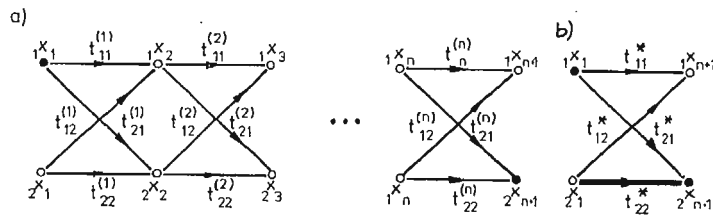
Gałęzie grafu przypadku drgań wzdłużnych są obciążone wagami w spostaci skalarnej natomiast gałęzie grafu modelującego drgania poprzeczne mają reprezentację macierzową. Zauważmy, że tak skonstruowane grafy posiadają własności grafów przepływu informacji [5].

3. Redukcja grafu transformacji zmiennych układu ciągłego

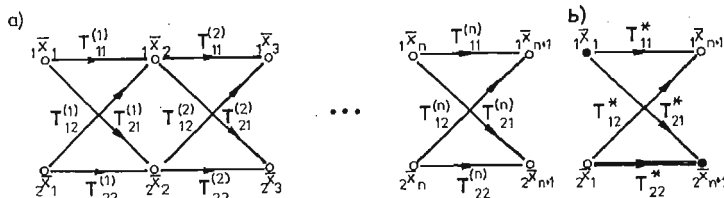
Rozważmy układ złożony z n elementów kontinualnych (rys. 3), którego grafy dla drgań wzdłużnych i poprzecznych ilustrują rys. 4a, 5a. Dokonując redukcji węzłów wewnętrznych $1x_k, 2x_k$ grafów otrzymujemy grafy czwórnikowe przedstawione na rys. 4b, 5b o odpowiednich transmitancjach zastępczych.



Rys. 3. Układ złożony z n elementów



Rys. 4. Graf układu jako model drgań wzdłużnych



Rys. 5. Graf układu jako model drgań poprzecznych

Redukcję grafu z rys. 4a przeprowadza się wykorzystując rekurencyjne zależności (4):

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^{(k)} &= t_{11}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + t_{12}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{12}^{(k)} &= t_{11}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + t_{12}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)}, \\ \Delta_{21}^{(k)} &= t_{21}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + t_{22}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{22}^{(k)} &= t_{21}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + t_{22}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)},\end{aligned}\quad (7)$$

gdzie: $k = 2, 3, \dots, n$

$$\Delta_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Transmitancje krawędzi grafu zredukowanego (rys. 4b) wynoszą:

$$t_{ij} = \Delta_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Z uwagi na warunki brzegowe zachodzi: $\Delta_{11}^{(1)} = \Delta_{21}^{(1)} = 0$. W analogiczny sposób dokonuje się redukcji grafu łańcuchowego z rys. 5a, wykorzystując rekurencyjne zależności macierzowe:

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^{(k)} &= \mathbf{T}_{11}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{12}^{(k)} &= \mathbf{T}_{11}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)}, \\ \Delta_{21}^{(k)} &= \mathbf{T}_{21}^{(k)} \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\ \Delta_{22}^{(k)} &= \mathbf{T}_{21}^{(k)} \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)},\end{aligned}\quad (8)$$

gdzie: $k = 2, 3, \dots, n$

$$\Delta_{ij}^{(1)} = \mathbf{T}_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Z uwagi na warunki brzegowe zachodzi $\Delta_{11}^{(1)} = \mathbf{0}$, $\Delta_{21}^{(1)} = \mathbf{0}$. Transmitancje krawędzi grafu zredukowanego (rys. 4b) wynoszą:

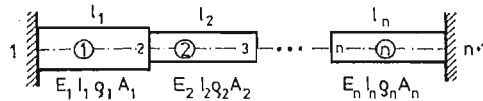
$$\mathbf{T}_{ij}^* = \Delta_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Równanie charakterystyczne układu jest określone za pośrednictwem transmitancji krawędzi łączącej wierzchołek — źródło z wierzchołkiem — upustem i w rozważanym przypadku posiada postać:

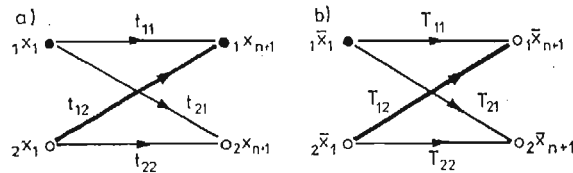
$$t_{22}^*(\beta) = 0, \quad \det \mathbf{T}_{22}^*(\beta) = 0. \quad (9)$$

Dla układu z utwierdzonymi obustronnie brzegami (rys. 6) grafy zredukowane posiadają wierzchołki — upusty ${}_1x_{n+1}$ i ${}_1\bar{x}_{n+1}$ (rys. 7). W tym przypadku równania charakterystyczne przyjmują postać:

$$t_{12}^*(\beta) = 0, \quad \det \mathbf{T}_{12}^*(\beta) = 0. \quad (10)$$



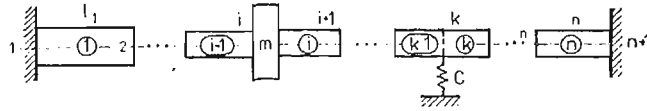
Rys. 6. Model układu



Rys. 7. Grafy zredukowane układu

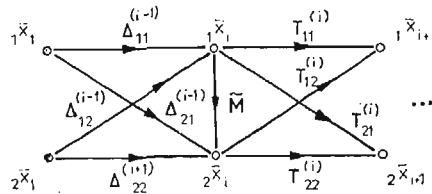
Równania charakterystyczne (9) i (10) rozwiązuje się stosując jedną z metod iteracyjnych np. metodę siecznych. Przedstawiona metoda redukcji grafu z wykorzystaniem równań (7) i (8) posiada własności algorytmiczne i stanowi podstawę do opracowania programów numerycznych.

Dokonyamy modyfikacji równań (8) w przypadku analizy drgań układów ciągłych z elementami dyskretnymi. Rozważmy układ drgający (rys. 8), w którym w i -tym przekroju występuje masa skupiona m oraz podpora sprężysta w przekroju k -tym.



Rys. 8. Model układu

Przeprowadzając redukcję grafu do przekroju i -tego uzyskujemy graf częściowo zredukowany przedstawiony na rys. 9.

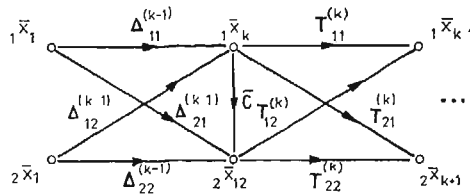


Rys. 9.

Redukcję grafu w następnym kroku przeprowadza się według równań:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(i)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{11}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \Delta_{21}^{(i-1)}, \\
 \Delta_{12}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(i)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{12}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(i)} \Delta_{22}^{(i-1)}, \\
 \Delta_{21}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{21}^{(i)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{11}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \Delta_{21}^{(i-1)}, \\
 \Delta_{22}^{(i)} &= (\mathbf{T}_{21}^{(i)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}) \Delta_{12}^{(i-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(i)} \Delta_{22}^{(i-1)}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

W następnych krokach redukcji dokonuje się z wykorzystaniem równań (8) dochodząc do przekroju k -tego, w którym występuje element sprężysty. Graf częściowo zredukowany pokazano na rys. 10



Rys. 10.

W k -tym kroku redukcję przeprowadza się według równań:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^{(k)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(k)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)}, \\
 \Delta_{12}^{(k)} &= (\mathbf{T}_{11}^{(k)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{12}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)},
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$\Delta_{21}^{(k)} = (\mathbf{T}_{21}^{(k)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{11}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{21}^{(k-1)},$$

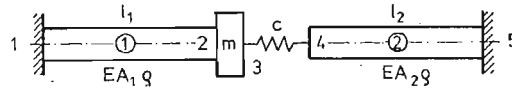
$$\Delta_{22}^{(k)} = (\mathbf{T}_{21}^{(k)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}) \Delta_{12}^{(k-1)} + \mathbf{T}_{22}^{(k)} \Delta_{22}^{(k-1)}.$$

Postacie macierzy $\tilde{\mathbf{M}}$ i $\tilde{\mathbf{C}}$ podano w tablicy 1. Redukcję pozostałych podgrafów przeprowadza się już dalej wg równań (8).

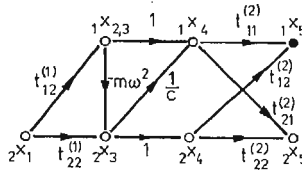
4. Metoda ścieżek głównych grafu transformacji zmiennych

W rozpatrywanej klasie grafów występują jedynie ścieżki otwarte, których redukcja polega na mnożeniu transmitancji składowych krawędzi. Przez ścieżkę główną rozumiemy łańcuch w grafie prowadzący od wierzchołka — źródła do wierzchołka — upustu. Dokonując geometrycznej redukcji ścieżek głównych w grafie możemy wyznaczyć postać analityczną równania charakterystycznego układu, które otrzymuje się jako sumę transmitancji zastępczych wszystkich ścieżek głównych. Sposób taki jest efektywny dla układów złożonych z mniejszej liczby elementów a szczególnie w analizie drgań wzdłużnych układów dyskretno-ciągłych ze względu na skalarną reprezentację grafu.

Rozpatrzmy w formie przykładu układ jak na rys. 11 wykonujący drgania wzdłużne, którego graf ilustruje rys. 12.



Rys. 11. Model układu



Rys. 12. Graf transformacji zmiennych układu

W grafie daje się wyodrębnić pięć ścieżek głównych pomiędzy wierzchołkami $2x_1$ i $1x_5$, które przedstawiono na rys. 13. Wagi krawędzi grafu są następujące:

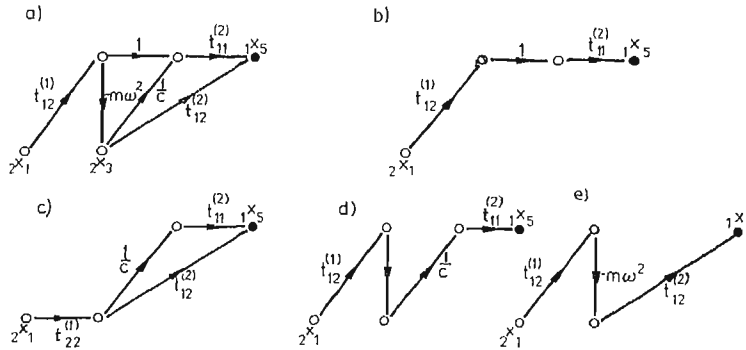
$$t_{22}^{(1)} = \cos \beta, \quad t_{12}^{(1)} = \frac{1}{c_{01} \beta} \cdot \sin \beta, \quad t_{11}^{(2)} = t_{22}^{(2)} = \cos \beta,$$

$$t_{12}^{(2)} = \frac{1}{\mu c_{02} \cdot \beta} \sin \mu \beta, \quad t_{21}^{(2)} = -\mu c_{02} \beta \sin \mu \beta, \quad (13)$$

$$\mu = l_2/l_1, \quad c_{01} = \frac{EA_1}{L_1}, \quad c_{02} = \frac{EA_2}{L_2}, \quad m_{01} = \rho A_1 l_1.$$

Suma transmitancji zastępczych tych ścieżek generuje funkcję charakterystyczną układu:

$$\Delta = t_{11}^{(2)} \left[\left(1 - \frac{m\omega^2}{c} \right) t_{12}^{(1)} + \frac{1}{c} t_{22}^{(1)} \right] + t_{12}^{(2)} (t_{22}^{(1)} - m\omega^2 t_{12}^{(1)}), \quad (14)$$



Rys. 13.

gdzie w miejsce częstości ω należy podstawić wyrażenie:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{01}}{m_{01}}} = \sqrt{\frac{E}{\rho l_1^2}} \quad (15)$$

Podstawiając do wyrażenia (14) zależności (13), (15) i przyrównując je do zera wyznaczamy po prostych przekształceniach postać funkcji charakterystycznej układu:

$$A = \frac{1}{c \cdot c_{01} \cdot \beta} \cos \beta \cos \mu \beta \left[1 + \frac{c}{\mu c_{02} \beta} \operatorname{tg} \mu \beta \left(1 - \frac{m\beta}{m_{01}} \operatorname{tg} \beta \right) + \right. \\ \left. + \frac{c}{c_{01} \beta} \operatorname{tg} \beta \cdot \left(1 - \frac{m}{m_{01}} \frac{c_{01}}{c} \beta^2 \right) \right] \quad (16)$$

oraz równania charakterystycznego:

$$1 + \frac{c}{\mu c_{02} \beta} \operatorname{tg} \mu \beta \left(1 - \frac{m\beta}{m_{01}} \operatorname{tg} \beta \right) + \frac{c}{c_{01} \beta} \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{m}{m_{01}} \frac{c_{01}}{c} \beta^2 \right) = 0. \quad (17)$$

Przyjmując wartości parametrów:

$$m = 2m_{01}, \quad c = \frac{1}{2} c_{01}, \quad \mu = 1, \quad c_{02} = c_{01}$$

otrzymujemy szczegółową postać równania (16):

$$\beta \operatorname{tg}^2 \beta + (2\beta^2 - 1) \operatorname{tg} \beta - \beta = 0. \quad (18)$$

Z równania (17) wyznaczamy wartości pierwiastków charakterystycznych

$$\beta_1 = 0,7475, \quad \beta_2 = 3,2944, \quad \beta_k \cong T(k-1)\pi, \quad \text{dla } k \geq 3.$$

Na podstawie grafu z rys. 12 wyznaczamy również wartości zmiennych biegunowych i przepływowych układu a następnie współczynniki postaci drgań.

Ogólne wyrażenia na te wielkości są następujące:

1) w przekroju 2:

$$u_2 = t_{12}^{(1)}, \quad S_1 = \frac{1}{c_{01} \beta} \sin \beta, \quad S_1 = 1,$$

$$S_2 = t_{22}^{(1)} S_1 = \cos \beta.$$

2) $x = l_1^+$ w przekroju 3: $u_3 = u_2$,

$$S_3 = t_{22}^{(1)} S_1 - m\omega^2 u_2 = \cos \beta - \frac{m}{m_{01}} \beta \sin \beta.$$

3) w przekroju 4:

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{c} S_3 = \frac{1}{c_{01} \beta} \sin \beta + \frac{1}{c} \left(\cos \beta - \frac{m}{m_{01}} \beta \sin \beta \right),$$

$$S_4 = S_3.$$

4) w przekroju 5:

$$u_5 = 0,$$

$$S_5 = t_{21}^{(2)} u_4 + t_{22}^{(2)} S_4 = -\mu c_{02} \alpha \sin \mu \beta \cdot u_4 + \cos \mu \beta \cdot S_4.$$

Wartości tych zmiennych w przekrojach wewnętrznych elementów 1 i (2) wyznacza się na podstawie równań „uzmiennionych”:

1) $0 \leq x_1 \leq l_1$ dla elementu 1:

$$u^{(1)}(\xi) = \frac{1}{c_{01} \beta} \sin \beta \xi, \quad \xi = x_1 / l_1,$$

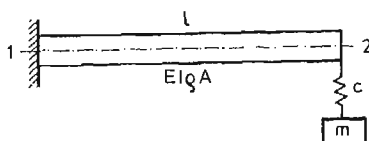
$$S^1(\xi) = \cos \beta \xi,$$

2) $u^2(\xi) = \cos \mu \beta \xi \cdot u_4 + \frac{1}{c_{02} \mu \beta} \sin \mu \beta \xi \cdot S_4, \quad \xi = \frac{x_2}{l_2},$

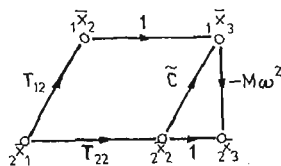
$$S^2(\xi) = -\mu c_{02} \beta \sin \mu \beta \xi \cdot u_4 + \cos \mu \beta \xi \cdot S_4.$$

Normując przemieszczenia układu względem wartości maksymalnej możemy określić współczynniki postaci drgań.

Zastosowanie metody ścieżek głównych pokazemy również na przykładzie drgań poprzecznych układu z rys. 14, dla którego odpowiedni graf pokazano na rys. 15.



Rys. 14.



Rys. 15.

Macierze występujące jako wagi krawędzi grafu wynoszą:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Redukując graf metodą ścieżek głównych wyznaczamy macierz charakterystyczną układu:

$$\mathbf{\Delta} = (\mathbf{1} - \mathbf{M}\omega^2\mathbf{C})\mathbf{T}_{22} - \mathbf{M}\omega^2\mathbf{T}_{1,2}, \quad (20)$$

gdzie:

$$\omega = \beta^2 \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}, \quad c_0 = \frac{EI}{l^3}, \quad m_0 = \rho AI.$$

Uwzględniając zależności (4), (5), (19) i obliczając wyznacznik macierzy (20) wyznaczamy postać równania charakterystycznego

$$(1 - \kappa_1 \kappa_2 \beta)(K_1^2 - K_2 K_4) - \kappa_2 \beta(K_2 K_3 - {}_1 K_4) = 0, \quad (21)$$

gdzie:

$$\kappa_1 = \frac{c_0}{c}, \quad \kappa_2 = \frac{m}{m_0}.$$

5. Wyznaczenie podatności układów ciągłych

Pod pojęciem podatności Y rozumiemy odpowiedź układu na wymuszenie jednostkowe w przekroju x , co zapisujemy:

$$Y = Y(\omega, x). \quad (22)$$

Przyjmując $x = x_k$ wyznaczamy wartość funkcji (22) w tym punkcie, którą umownie nazywamy podatnością podukładu w k -tym przekroju i oznaczamy przez Y_k .

Można wykazać, że podatność daje się bezpośrednio wyznaczyć z grafu układu, przyjmując następujące określenie [5]:

$$Y_k = \frac{D_k(\omega)}{D(\omega)}, \quad (23)$$

gdzie:

$D(\omega)$ — jest funkcją charakterystyczną układu równą funkcji wyznacznikowej grafu X_T ,

$D_k(\omega)$ — jest funkcją wyznacznikową grafu przekształconego X_T .

Zagadnienie wyznaczania podatności metodą grafów sprowadza się do skonstruowania grafu przekształconego X_T , który otrzymuje się z grafu X_T stosując proste topologiczne przekształcenia.

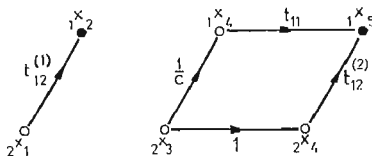
Sposób przekształcenia prowadzi do:

- 1° Przyjęcia zerowego wierzchołka-upustu ${}_1 x_k$ odpowiadającego przemieszczeniu układu w k -tym przekroju.
- 2° Przyjęcia jednostkowej wartości zmiennej przepływowej w k -tym przekroju co odpowiada przyjęciu wierzchołka-źródła ${}_2 x_k$.
- 3° Usunięcia wszystkich krawędzi grafu X_T wychodzących z wierzchołka ${}_1 x_k$.
- 4° Usunięcia wszystkich krawędzi grafu X_T wchodzących do wierzchołka ${}_2 x_k$.

Opisany czynnościowy sposób wyznaczania podatności układów ciągłych zilustrujemy na przykładzie układu przedstawionego na rys. 11, którego graf ilustruje rys. 12.

Wyznamy podatność układu w przekroju 2, generując funkcję charakterystyczną grafu przekształconego pokazanego na rys. 16. Graf ten powstaje z grafu jak na rys. 12 przez przyjęcie zerowego wierzchołka ${}_1 x_{2,3}$ oraz wierzchołka-źródła ${}_2 x_3$. Wówczas graf przekształcony przyjmuje postać dwóch rozłącznych grafów (rys. 16).

Funkcja wyznacznikowa grafu przekształconego jest iloczynem funkcji wyznacznikowych składowych podgrafów.



Rys. 16.

Funkcja wyznacznikowa grafu przekształconego jest postaci:

$$\Delta_2(\beta) = t_{12}^{(1)} \left(t_{12}^{(2)} + \frac{1}{c} t_{11}^{(2)} \right) \quad (24)$$

a po wstawieniu wag krawędzi:

$$\Delta_2(\beta) = \frac{1}{cc_{01}\beta} \cos\beta \cos\mu\beta \frac{1}{\mu c_{02}\beta} \operatorname{tg}\beta \left(\frac{\mu c_{02}\beta}{c} \operatorname{tg}\mu\beta + 1 \right). \quad (25)$$

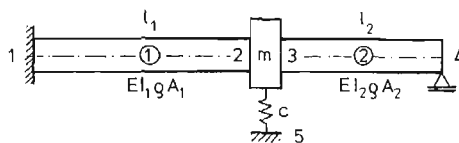
Iloraz funkcji (16), (25) określa podatność dynamiczną układu obliczaną w przekroju 2:

$$Y_2 = \frac{1}{\mu c_{02}\beta} \frac{\operatorname{tg}\beta \left(1 + \frac{\mu c_{02}\beta}{c} \operatorname{tg}\mu\beta \right)}{1 + \frac{c}{\mu c_{02}\beta} \operatorname{tg}\mu\beta \left(1 - \frac{m\beta}{m_{01}} \operatorname{tg}\beta \right) + \frac{c}{c_{01}\beta} \operatorname{tg}\beta \left(1 - \frac{m}{m_{01}} \frac{c_{01}}{c} \beta^2 \right)}, \quad (26)$$

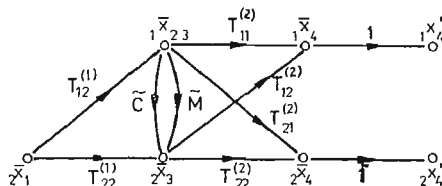
gdzie w miejsce parametru β należy podstawić wyrażenie:

$$\beta = \omega/\omega_{01}\omega_{01} = \sqrt{\frac{c_{01}}{m_{01}}}, \quad c_{01} = \frac{EA_1}{l_1}, \quad m_{01} = \rho A_1 l_1. \quad (27)$$

Rozważmy z kolei model układu dyskretno-ciągłego wykonującego drgania poprzeczne (rys. 17), którego macierzowy graf przedstawiono na rys. 18.



Rys. 17.



Rys. 18.

Macierz charakterystyczną układu przedstawiamy w postaci macierzy o strukturze blokowej:

$$\Delta = \begin{bmatrix} {}_1\Delta \\ {}_2\Delta \end{bmatrix}, \quad (28)$$

gdzie podmacierz ${}_1\Delta$ jest generowana przez ścieżki główne grafu zawarte pomiędzy wierzchołkami ${}_2x_1$ i ${}_1x_4$ i ma postać:

$$\Delta_1 = \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{11}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{12}^{(2)} [\mathbf{T}_{22}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)}] \}. \quad (29)$$

Podmacierz ${}_2\Delta$ jest generowana przez ścieżki główne zawarte między wierzchołkami ${}_2x_1, {}_2x_4''$ i ma postać:

$$\Delta_2 = \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{21}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{22}^{(2)} [(\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{22}^{(1)}] \}. \quad (30)$$

Zauważmy, że wymiar macierzy charakterystycznej Δ wynosi $\dim \Delta = \langle 2, 2 \rangle$ a jej wyznacznik przyrównany do zera określa równanie charakterystyczne układu:

$$\Delta(\beta) = \det \Delta(\beta) = 0. \quad (31)$$

Dla układów ciągłych wykonujących drgania poprzeczne możemy w każdym przekroju określić trzy niezależne funkcje podatności dynamicznej, które generują macierz podatności układu w k -tym przekroju:

$$\mathbf{Y}_k(\beta) = \begin{bmatrix} Y_k & \tilde{\Theta}_k \\ \tilde{\Theta}_k & \Theta_k \end{bmatrix}, \quad (32)$$

gdzie:

Y_k i Θ_k są odpowiednio podatnością przemieszczeniową i kątową, które wyznacza się przy jednostkowej wartości siły skupionej $\Theta_k = 1$ oraz jednostkowym momencie $M_k = 1$ w tym przekroju,

$\tilde{\Theta}_k$ jest podatnością przemieszczeniową kątową przy jednostkowym momencie M_k sile skupionej Q_k .

W rozważanym przykładzie wyznaczmy macierz podatności układu w przekroju 2. Odpowiednie grafy przekształcone umożliwiające wyznaczenie podatności $Y_k, \Theta_k, \tilde{\Theta}_k$ pokazano na rys. 19a, b, c.

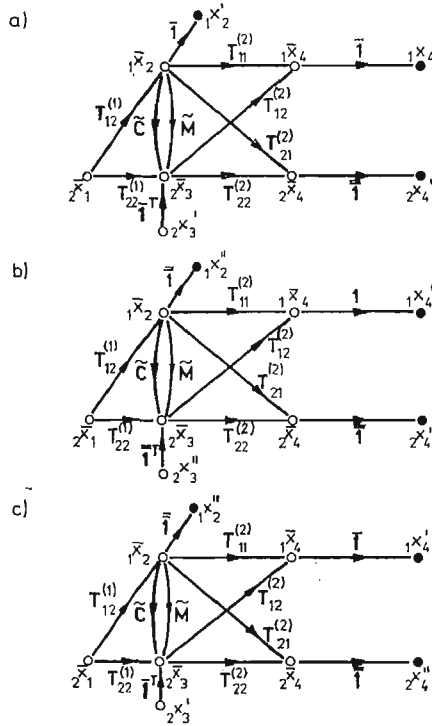
Redukując przykładowo graf z rys. 19a otrzymujemy pięć ścieżek głównych zaznaczone na rys. 20.

Transmitancje ścieżek głównych wynoszą:

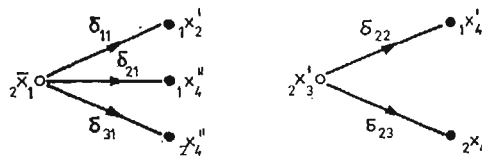
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \bar{\mathbf{1}} \mathbf{T}_{12}^{(1)}, \\ \delta_{21} &= \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{11}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} + \mathbf{T}_{12}^{(2)} [\mathbf{T}_{22}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)}] \}, \\ \delta_{31} &= \bar{\mathbf{1}} \{ \mathbf{T}_{22}^{(1)} [\mathbf{T}_{22}^{(1)} + (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{M}}) \mathbf{T}_{12}^{(1)}] + \mathbf{T}_{21}^{(2)} \mathbf{T}_{12}^{(1)} \}, \\ \delta_{22} &= \bar{\mathbf{1}} \mathbf{T}_{12}^{(2)} \mathbf{1}^\top, \quad \delta_{23} = \bar{\mathbf{1}} \mathbf{T}_{22}^{(2)} \mathbf{1}^\top. \end{aligned}$$

Na ich podstawie konstruujemy macierz wyznacznikową grafu z rys. 19a:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} \\ \delta_{31} & \delta_{23} \end{bmatrix}. \tag{34}$$



Rys. 19.



Rys. 20.

Obliczając wyznacznik macierzy (34) $\Delta_2(\beta) = \det \Delta_2$ i uwzględniając funkcję (31) wyznaczamy podatność przemieszczeniową układu w przekroju 2:

$$Y_2(\beta) = \frac{\Delta_2(\beta)}{\Delta(\beta)}. \tag{35}$$

W podobny sposób wyznacza się pozostałe podatności Θ_2 i $\tilde{\Theta}_2$ układu.

6. Metoda dekompozycji układu i agregacji grafów

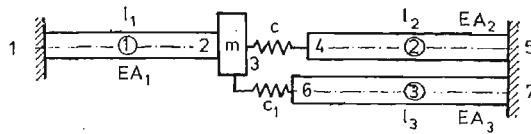
Metoda polega na dekompozycji, czyli podziale układu na prostsze podukłady, dla których niezależnie są konstruowane odpowiednie grafy transformacji zmiennych. W przekrojach podziału wyznacza się podatności dynamiczne poszczególnych podukładów. Dokonując agregacji podgrafów wyznaczamy podatność całego układu w wybranym przekroju. Dla układów sprzężonych poprzez tylko jedną zmienną kinematyczną (biegunową) wykorzystuje się następujący wzór:

$$Y_k(\beta) = \frac{Y_k^{(1)} \cdot Y_k^{(2)}}{Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)}}, \tag{36}$$

gdzie: $Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}$ są podatnościami podukładów w k -tym przekroju.

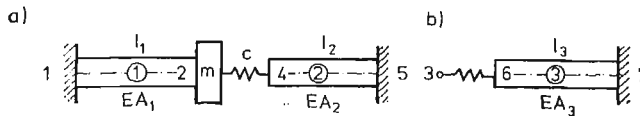
Równanie charakterystyczne otrzymuje się przez przyrównanie do zera mianownika funkcji (36).

Istotę metody zilustrujemy na przykładzie drgań wzdłużnych układu przedstawionego na rys. 21. Układ podzielono na dwa podukłady w przekroju 3, przedstawione na rys.



Rys. 21.

22a, b. Pierwszy z podukładów pokazany na rys. 22a był analizowany w punkcie 4 pracy jego graf ilustruje rys. 12. Dla tego podukładu wyznaczono podatność dynamiczną w przekroju 2, która jest opisana wzorem (27). Konstruując graf układu złożonego zre-



Rys. 22.

dukowano graf podukładu pierwszego do jednej krawędzi o wadze równej podatności $Y_2^{(1)}$ (wzór 27), do którego przyłączono następnie graf drugiego podukładu. Generując ścieżki główne otrzymanego grafu, pokazanego na rys. 23 wyznaczono ogólną postać równania charakterystycznego układu:

$$t_{11}^{(3)} \left(Y_3^{(1)} + \frac{1}{c_1} \right) + t_{12}^{(3)} = 0, \tag{37}$$

gdzie:

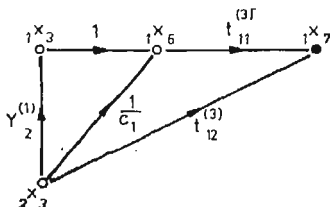
$$t_{11}^{(3)} = \cos \mu_1 \beta, \quad t_{12}^{(3)} = \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \sin \mu_1 \beta,$$

$$\mu_1 = \frac{l_3}{l_1}, \quad c_{03} = \frac{EA_3}{l_3}.$$

Po podstawieniu do (37) wag krawędzi grafu otrzymujemy postać równania charakterystycznego:

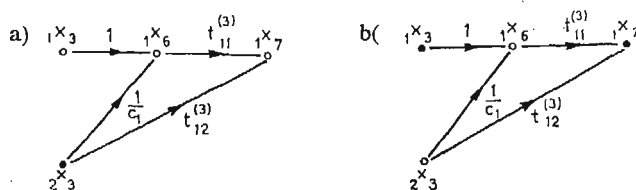
$$Y_2^{(1)} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \operatorname{tg} \mu_1 \beta = 0, \quad (38)$$

gdzie $Y_2^{(1)}$ jest podatnością pierwszego podukładu określoną wzorem (27).



Rys. 23.

Wyznamy również podatność układu złożonego z przekroju 3, wykorzystując grafy drugiego podukładu przedstawione na rys. 24a, b, przy czym graf z rys. 24b jest grafem przekształconym (przyjmując zerowy wierzchołek $1x_3$ oraz wierzchołek-źródło $2x_3$).



Rys. 24.

Funkcje wyznacznikowe podgrafów wynoszą:

$$\Delta^{(2)} = t_{11}^{(3)} = \cos \mu_1 \beta, \quad (39)$$

$$\Delta_3^{(2)} = t_{12}^{(3)} + \frac{1}{c_1} t_{11}^{(3)} = \frac{1}{c_{03} \mu_1 \beta} \cos \mu_1 \beta \left(\operatorname{tg} \mu_1 \beta + \frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} \right). \quad (40)$$

Na ich podstawie wyznaczamy podatność drugiego podukładu:

$$Y_2^{(2)} = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta^{(2)}} = \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \left(\operatorname{tg} \mu_1 \beta + \frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} \right). \quad (41)$$

Wykorzystując wzór (36) wyznaczamy podatność układu złożonego:

$$Y_2 = \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \frac{Y_2^{(1)} \left(\operatorname{tg} \mu_1 \beta + \frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} \right)}{\Delta(\beta)}, \quad (42)$$

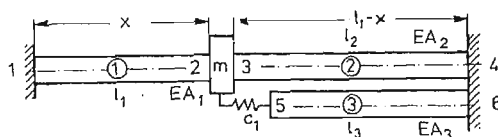
gdzie:

$$\Delta(\beta) = Y_2^{(1)} + \frac{1}{\mu_1 c_{03} \beta} \left(\frac{\mu_1 c_{03} \beta}{c_1} + \operatorname{tg} \mu_1 \beta \right).$$

Przedstawiony przykład ilustruje sposób analizy układów złożonych o strukturze nieszerogowej, polegający na dekompozycji układu na podukłady o strukturze szeregowej, dla których są wyznaczane podatności w przekrojach sprzężenia. Dokonując agregacji grafów podukładów możliwe jest wyznaczenie w sposób sekwencyjny równania charakterystycznego układu złożonego oraz jego podatności dynamicznej względem jednego z punktów sprzężenia.

7. Przykłady liczbowe

Rozważmy drgania wzdluzne układu przedstawionego na rys. 25, który otrzymuje się przez modyfikację układu z rys. 21, przyjmując nieskończenie dużą sztywność elementu sprzężonego c ($c = \infty$). Dla tak przyjętego modelu drgającego sformułowano zagadnienie oceny wpływu położenia masy m , określonego współrzędną x na wartości częstości własnych układu z jednoczesną zmianą długości l_2 elementu 3, przejmując $l_2 = l_1 - x$.



Rys. 25.

Równanie charakterystyczne układu otrzymujemy wykorzystując zależności (27), (38) i po podstawieniu wartości parametrów

$$c = \infty, \quad A_1 = A_2 = A_3, \quad m = 2m_{01}, \quad m_{01} = \rho A_1 l_1, \quad c_1 = 2c_{01}, \\ c_{01} = EA_1/l_1$$

sprowadzono je do postaci:

$$\operatorname{tg} \beta \xi \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta + [0,5\beta + \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta] [\operatorname{tg}(1 - \xi) \beta + \operatorname{tg} \beta \xi (1 - 2\beta \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta)] = 0, \quad (43)$$

gdzie:

$$\beta = \omega/\omega_{01}, \quad \omega_{01} = \sqrt{c_{01}/m_{01}}, \quad \xi = x/l_1.$$

Rozwiązując równanie (43) wyznaczono wartości pierwiastków charakterystycznych β w funkcji współrzędnej ξ , czyli położenia masy m . Wyniki obliczeń dla czterech początkowych postaci drgań opracowano graficznie w postaci krzywych, które pokazano na rys. 26.

W wyniku przeprowadzonej analizy stwierdzono, że w pewnych położeniach masy dyskretnej częstości własne układu pokrywają się z wartościami częstości własnych belki obustronnie utwierdzonej, które wynoszą $\beta = \pi$ oraz $\beta = 2\pi$.

Punkty niewrażliwości częstości własnych układu na modyfikację strukturalną, polegającą na przyłączeniu do niego innego podukładu są określone wzorami:

$$\xi = \frac{l}{k} \quad (l = 1, 2, \dots, k-1) \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} k\pi\xi = \frac{k^2\pi^2 - 1}{2k\pi}, \quad (45)$$

gdzie k oznacza numer postaci drgań.

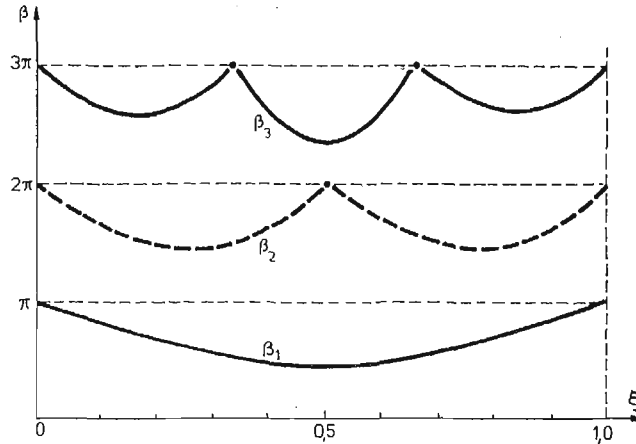
W pierwszym przypadku punkty te pokrywają się z węzłami drgań belki obustronnie utwierdzonej.

Przyjmujemy umownie, że belka z masą dyskretną m stanowi układ główny. Zbadajmy również przebiegi częstości własnych układu głównego, pomijając element sprężysty c_1 , tzn. przyjmując $c_1 = 0$.

Równanie charakterystyczne (40) dla układu głównego jest postaci:

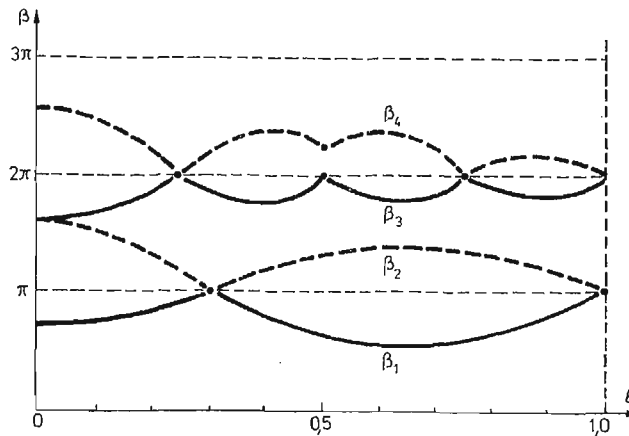
$$\operatorname{tg}(1-\xi)\beta + \operatorname{tg}\beta\xi[1-2\beta\operatorname{tg}(1-\xi)\beta] = 0. \quad (45)$$

Pierwiastki równania (45) w funkcji współrzędnej ξ pokazano na rys. 26.



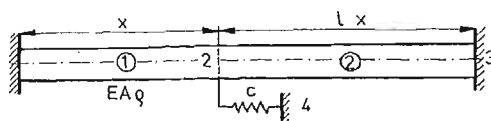
Rys. 26.

Analizując wykresy pokazane na rys. 27 zauważa się dla wyższych postaci drgań zjawisko „dudnienia” częstości własnych. Punkty nieczułości pokrywają się również z węzłami drgań belki. Dołączenie masy dyskretnnej powoduje zmniejszenie częstości własnych belki, co jest zgodne z ogólnym stwierdzeniem, że ze wzrostem masy częstości własne układu maleją.



Rys. 27.

Odwrotne zjawisko obserwuje się, gdy układ poddamy dodatkowym więzom sprężystym. Rozważmy układ złożony z belki obustronnie utwierdzonej, do której w przekroju x przyłączono element sprężysty c (rys. 28). Układ ten jest szczególnym przypadkiem modyfikacji modelu z rys. 25.



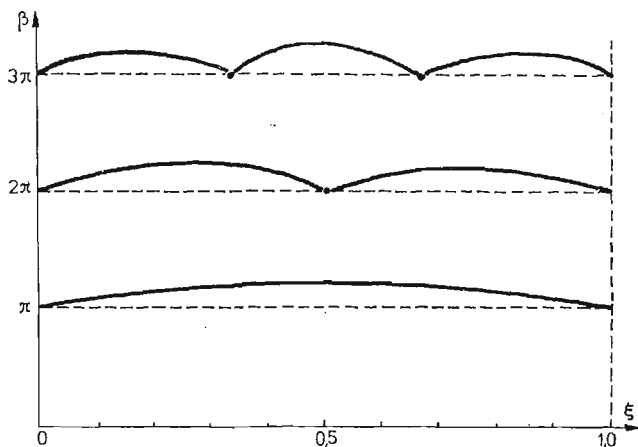
Rys. 28.

Równanie charakterystyczne układu ma postać:

$$\beta \operatorname{tg} \beta \xi + (\beta + 0,5 \operatorname{tg} \beta \xi) \cdot \operatorname{tg}(1 - \xi) \beta = 0, \quad (46)$$

gdzie założono, że $\frac{1}{2} c_0$, $c_0 = EA/l$.

Zmiany częstości własnych układu w funkcji współrzędnej przedstawiono na rys. 29.



Rys. 29.

Przy dołączeniu do belki elementu sprężystego zauważa się wzrost częstości własnych. Zmiany częstości są większe przy dołączeniu do belki elementu masowego, co ilustruje porównanie krzywych z rys. 27 i 29.

8. Podsumowanie i wnioski

Przedstawiony w pracy sposób modelowania drgań układów ciągłych posiada własności algorytmiczne w zakresie wyznaczania równania charakterystycznego i postaci drgań układów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. Trzeba zaznaczyć, że w literaturze analizę drgań układów mechanicznych na gruncie modeli kontinualnych przeprowadza się na przykładach stosunkowo prostych modeli [10, 11]. Dla bardziej złożo-

nych układów analizę prowadzi się w oparciu o modele dyskretne, np. z zastosowaniem metody elementów skończonych. Niemniej istnieje potrzeba rozwijania metod analizy drgań układów na gruncie modeli kontinualnych, ponieważ wyniki tej analizy nie są obciążone błędami aproksymacji. W pracy [10] przedstawiono metodę wyznaczania równania charakterystycznego i dynamicznych podatności złożonych układów ciągłych z zastosowaniem schematów blokowych. W metodzie tej wymaga się znajomości podatności podukładów w punkcie ich sprzężenia.

W prezentowanej pracy wykorzystano również ten sposób analizy formułując metodę agregacji grafów podukładów (rozdział 6), przy czym podatności podukładów wyznaczone są na podstawie grafu przekształconego podukładu metodą opisaną w rozdziale 5. W tym zakresie przedstawiony sposób analizy jest równoważny metodzie macierzy przeniesienia oraz metodzie układów blokowych [10]. W literaturze nie spotyka się jednak prób zastosowań metody grafów przepływu sygnałów w modelowaniu drgań układów ciągłych.

Zaletą przedstawionego w pracy sposobu modelowania jest możliwość bezpośredniego wyznaczania równania charakterystycznego układu wprost z grafu, metodą poszukiwania ścieżek głównych pomijając etap określania warunków brzegowych dla układu. Przedstawione w pracy rekurencyjne zależności stanowią podstawę do opracowania szczegółowych programów obliczeń.

Literatura

1. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych.*, Arkady, Warszawa 1970.
2. A. NOWAK, J. WOJNAROWSKI, *Modelowanie drgań układów dyskretno-ciągłych metodą grafów transformacji zmiennych*, Zbiór referatów XXII Sympozjonu „Modelowanie w mechanice”, Gliwice—Szczyrk 1984, prace PTMTS nr 49, s. 329 - 337.
3. A. NOWAK, J. WOJNAROWSKI, *Modelowanie drgających układów ciągłych metodą grafów transformacji zmiennych*. Zbiór streszczeń XI Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, Poznań—Biażejewko 1984.
4. A. NOWAK, J. WOJNAROWSKI, *Modelowanie drgań swobodnych układów dyskretno-ciągłych metodą grafów transformacji zmiennych*, Problemy Dynamiki Maszyn nr 2, 3, 1984.
5. J. WOJNAROWSKI, *Zastosowania grafów w analizie drgań układów mechanicznych*, PAN, Komitet Budowy Maszyn PWN, Warszawa—Wrocław 1981.
6. F. A. FIRESTONE, *Twixt Earth and Sky with Roel and Tube. The Mobility and Classical Impedence Analogies*, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 28, 1958, s. 1117 - 1153.
7. L. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Grafy przepływu sygnałów*, PWN Warszawa 1968.
8. F. KAMIŃSKI, *Synteza obwodów liniowych o stałych rozłożonych*, PWN Warszawa 1976.:
9. M. SKOWROŃSKA, *Teoria filtru elektromechanicznego o drganiach skręcających lub podłużnych*, Z. N. Politech. Warsz. 86, Elektryka 33, 1964.
10. R. BISHOP, G. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT Warszawa 1972.
11. А. Филиппов, *Колебания деформируемых систем*, Машиностроение 1970.

Резюме

ГРАФЫ ТРАНСФОРМАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ КАК МОДЕЛИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ
НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

В работе представлен анализ колебаний непрерывных систем при применении графов трансформации переменных. Метод заключается в определении главных путей в графе системы. Этот способ применяется для определения характеристического уравнения и динамических податливостей системы. В случае сложных систем применено метод декомпозиции системы на подсистемы и агрегации их подграфов. Представленные примеры иллюстрируют использование метода в анализе продольных колебаний непрерывных систем.

Summary

GRAPHS OF VARIABLES TRANSFORMATIONS AS THE MODELS OF VIBRATING
CONTINUOUS SYSTEMS

A method of analysis of the vibrations of continuous systems has been presented by the application of the graphs of variables transformation. The method consists in the determination of the principal paths in the system graph, and has been applied in determining the characteristic equation and the dynamical flexibility of the system.

In the case of complex systems a method has been applied to the decomposition of the system into subsystems and the aggregation of their subgraphs.

The examples illustrate the application of the method in the analysis of the longitudinal vibrations of continuous systems.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 maja 1986 roku.
