

FALE POWIERZCHNIOWE W TERMOSPŁĘŻYSTOŚCI Z CZASAMI RELAKSACJI

RYSZARD WOJNAR

IPPT PAN, Warszawa

1. Wstęp

Stacjonarne fale powierzchniowe (F. P.) stanowią tę klasę zjawisk fizycznych, które z jednej strony dostępne są bezpośredniej obserwacji i mają dzięki temu duże znaczenie dla zastosowań praktycznych, z drugiej zaś strony, podobnie jak i inne procesy stacjonarne poddają się stosunkowo łatwo opisowi matematycznemu. Szczególna prostota opisu matematycznego F. P. wynika z podwójnego warunku koniecznego na istnienie tych fal, narzuconego przez jednorodność równań pola oraz brak obciążeń na powierzchni brzegowej ośrodka.

Poniżej zajmiemy się opisem fal powierzchniowych korzystając z równań uogólnionej termosprężystości, [1]. W teorii tej propagacja impulsu termosprężystego ma charakter falowy, por. Dodatek A. Nie występuje więc tutaj znany w teorii klasycznej paradoks nieskończonej prędkości rozchodzenia się impulsu termosprężystego.

Znane są dwie podstawowe teorie uogólnionej termosprężystości, teoria z jednym czasem relaksacji, [2, 3] oraz teoria z dwoma czasami relaksacji, [4].

Fale powierzchniowe w półprzestrzeni termosprężystej z jednym czasem relaksacji badane były przez Nayfeha i Nemat-Nassera, [5], (N, N-N). Wyprowadzili oni równanie dyspersji dla F. P. w półprzestrzeni. Powierzchnia półprzestrzeni była swobodna od obciążeń mechanicznych. Jednocześnie zniknęła na niej składowa normalna strumienia cieplnego. Analiza równania dyspersji pozwoliła podać zależność prędkości fali termosprężystej od czasu relaksacji t° dla różnych częstości.

Równania dyspersji F. P. w półprzestrzeni termosprężystej z dwoma czasami relaksacji t_0 i t_1 otrzymane zostały przez Agarwala [6], oraz Chandrasekharaiaha i Sri-kantaiaha, [7]. Autorzy ci szukali rozwiązań w oparciu o równania potencjałów Lamego. Autor pracy [6] przy okazji swojego wywodu uogólnia spostrzeżenie Knowlesa, tzn. pokazuje słuszność równania dyspersji dla szerszej klasy fal niż fale płaskie. Autorzy pracy [7] rozważają powierzchnię z pewnym nieklasycznym mechanicznym warunkiem brzegowym, na której jednocześnie panuje warunek izotermiczności.

W obecnym artykule badamy fale powierzchniowe również w półprzestrzeni z dwoma czasami relaksacji, a więc zajętej przez materiał Greena-Lindsaya, [4]. Zakładamy, że

ciało jest jednorodne i izotropowe. Ponadto przyjmujemy że powierzchnia półprzestrzeni jest swobodna od obciążeń mechanicznych oraz, że panuje na niej warunek swobodnej wymiany ciepła. Wychodząc bezpośrednio z równań przemieszczeniowo-temperaturowych otrzymujemy związek dyspersyjny zawierający częstość, długość wektora falowego, stałą sprzężenia termosprężystego ε , dwa czasy relaksacji t_0 i t_1 oraz współczynniki wymiany ciepłej na brzegu η_1 i η_2 . Dla szczególnego przypadku warunku brzegowego rozważanego przez N, N-N, [5], przeprowadzamy asymptotyczną oraz numeryczną analizę wyprowadzonego równania dyspersji. Analizę tę ułatwia zauważona analogia między równaniem dyspersji dla ośrodka z jednym a dwoma czasami relaksacji.

2. Związki podstawowe

Dla liniowego, izotropowego i jednorodnego ciała termosprężystego, przy braku sił masowych i braku źródeł ciepła, w prostokątnym prostoliniowym układzie współrzędnych x_i , $i = 1, 2, 3$, podstawowe równania obu wymienionych teorii są, [1]:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ S_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i, \\ S_{ij} &= 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} - (1 + t_1 \partial/\partial t) \Theta \delta_{ij}, \\ -q_{i,i} &= C_E (1 + t_0 \partial/\partial t) \dot{\Theta} + \gamma \Theta_0 \dot{E}_{kk}, \\ (1 + t^0 \partial/\partial t) q_i &= -K \Theta_{,i}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Powyżej kropka ($\dot{}$) nad symbolem jest równoważna pochodnej czasowej ($\partial/\partial t$). Wielkości u_i , E_{ij} , S_{ij} , q_i oraz Θ przedstawiają kolejno składowe przemieszczenia, odkształcenia, naprężenia, strumienia ciepła oraz temperaturę powyżej temperatury naturalnego stanu odniesienia Θ_0 . Współczynniki ρ , λ i μ , C_E oraz K przedstawiają kolejno gęstość ośrodka, moduły Lamégo, ciepło właściwe przy zerowej deformacji oraz współczynnik przewodnictwa ciepła. Ponadto

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \gamma_0, \quad (2.2)$$

gdzie γ_0 oznacza liniowy współczynnik rozszerzalności termicznej, zaś t^0 , t_0 i t_1 są czasami relaksacji. Jeśli

$$t_1 = t_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad t^0 > 0 \quad (2.3)$$

mamy ośrodek z 1 czasem relaksacji, [2, 3]; jeśli

$$t_1 \geq t_0 > 0 \quad \text{oraz} \quad t^0 = 0 \quad (2.4)$$

mamy ośrodek z 2 czasami relaksacji, [4].

Eliminując E_{ij} , S_{ij} oraz q_i z układu (2.1) dochodzimy do przemieszczeniowo-temperaturowych równań termosprężystości, które dla przypadku (2.4) są:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,i} - \gamma (\Theta + t_1 \dot{\Theta})_{,i} &= \rho \ddot{u}_i, \\ K \Theta_{,ii} &= C_E (\Theta + t_0 \dot{\Theta}) + \gamma \Theta_0 u_{j,j}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Niech w kierunku x_1 rozchodzi się zaburzenie termosprężyste niezależne od x_3 ,

$$u_i = u_i(x_\alpha, t), \quad \Theta = \Theta(x_\alpha, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2.$$

Wtedy postać r-ń (2.5) jest:

$$\begin{aligned} \mu u_{\alpha, \beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta, \beta\alpha} - \gamma(\Theta + t_1 \dot{\Theta})_{,\alpha} &= \rho \ddot{u}_\alpha \\ \mu u_{3, \beta\beta} &= \rho \ddot{u}_3 \\ K \Theta_{,\alpha\alpha} &= C_E (\dot{\Theta} + t_0 \ddot{\Theta}) + \gamma \Theta_0 \dot{u}_{\alpha, \alpha} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Składowa u_3 jest opisywana zwykłym, izotermicznym równaniem falowym. Nie jest ona sprzężona z pozostałymi polami (u_1, u_2, Θ) i nie będziemy się nią dalej zajmować.

3. Rozwiązanie stacjonarne

Szukamy rozwiązania r-ń (2.6)_{1,3} w postaci fali harmoniczej z poprzecznie tłumioną amplitudą:

$$(u_1, u_2, \Theta) = (U, V, \vartheta) \exp[-ax_2 + i(kx_1 - \Omega t)], \quad (3.1)$$

gdzie a jest współczynnikiem zaniku na głębokości (w kierunku x_2), k jest wektorem falowym, zaś Ω częstotnością. Wstawiając (3.1) do (2.6)_{1,3} dostajemy następujący układ równań na stałe U, V, ϑ :

$$\begin{aligned} \mu[(ik)^2 + a^2]U + (\lambda + \mu)[(ik)^2 U - aikV] - (1 - it_1 \Omega) ik &= -\rho \Omega^2 U, \\ \mu[(ik)^2 + a^2]V + (\lambda + \mu)[-ikaU + a^2 V] - (1 - it_1 \Omega)(-a) &= -\rho \Omega^2 V, \\ K[(ik)^2 + a^2]\vartheta &= C_E[-i\Omega + t_0(-i\Omega)^2]\vartheta - \gamma \Theta_0 i\Omega(ikU - aV), \end{aligned}$$

co można też zapisać jako:

$$\begin{aligned} (\omega^2 + \beta^{-2}\alpha^2 - q^2)U - (1 - \beta^{-2})\alpha iqV - mc_1^{-1}\kappa iq(1 - i\omega\tau_1)\vartheta &= 0, \\ -(1 - \beta^{-2})\alpha iqU + (\omega^2 + \alpha^2 - \beta^{-2}q^2)V + mc_1^{-1}\kappa\alpha(1 - i\omega\tau_1)\vartheta &= 0, \\ -h\omega qU - h i\omega\alpha V + c_1^{-1}[\alpha^2 - q^2 + \omega(i + \tau_0\omega)] &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie:

$$\omega = \Omega/\Omega^*, \quad \alpha = ac_1/\Omega^*, \quad q = kc_1/\Omega^*, \quad \varepsilon = mh\kappa, \quad \beta^2 = c_1^2 c_2^{-2} \quad (3.3)$$

$$\tau_0 = \Omega^* t_0, \quad \tau_1 = \Omega^* t_1, \quad (3.4)$$

zaś $\Omega^* = c_1^2/\kappa$ jest jednostką częstotliwości Chadwicka-Sneddona. Ponadto:

$$c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad c_2^2 = \mu/\rho, \quad m = \gamma/(\lambda + 2\mu), \quad h = \gamma\Theta_0/K, \quad \kappa = K/C_E, \quad (3.5)$$

Wyznacznik układu (3.2) po prostym przekształceniu jest:

$$D = \frac{1}{\alpha iq} \begin{vmatrix} \omega^2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2), & [\omega^2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2)]iq, & 0 \\ (1 - \beta^{-2})\alpha q^2, & (\omega^2 + \alpha^2 - \beta^{-2}q^2)iq, & mc_1^{-1}\kappa\alpha iq(1 - i\omega\tau_1) \\ -h\omega q, & -h i\omega\alpha, & c_1^{-1}[\alpha^2 - q^2 + \omega(i + \tau_0\omega)] \end{vmatrix},$$

lub

$$D = \begin{vmatrix} \omega^2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2), & 0, & 0 \\ (1 - \beta^{-2})q^2, & \omega^2 + \alpha^2 - q^2, & mc_1^{-1}\kappa(1 - i\omega\tau_1) \\ -h\omega iq^2, & -(\alpha^2 - q^2)h\omega i, & c_1^{-1}[\alpha^2 - q^2 + \omega(i + \tau_0\omega)] \end{vmatrix}.$$

Warunek istnienia niezerowych rozwiązań układu (3.2) jest więc po skorzystaniu jeszcze z (3.3)₄ postaci:

$$[\omega_2 + \beta^{-2}(\alpha^2 - q^2)][(\alpha^2 + \tilde{P})(\alpha^2 + \tilde{Q}) + (\alpha^2 - q^2)\tilde{R}] = 0, \quad (3.6)$$

gdzie:

$$\tilde{P} = \omega^2 - q^2, \quad \tilde{Q} = -q^2 + \omega^2\tau_0 + i\omega, \quad \tilde{R} = \varepsilon\omega(i + \omega\tau_1). \quad (3.7)$$

Wartości własne problemu spełniają zatem zależności:

$$\alpha_1^2 = q^2 - \beta^2\omega^2, \quad \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -\tilde{P} - \tilde{Q} - \tilde{R}, \quad \alpha_2^2\alpha_3^2 = \tilde{P}\tilde{Q} - q^2\tilde{R}. \quad (3.8)$$

Wartości te wstawiamy do r-ń (3.2) i dostajemy następujące równania na U , V , ϑ :

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= -\frac{q}{i\alpha_1} U^{(1)}, & \vartheta^{(1)} &= 0, \\ V^{(j)} &= -\frac{\alpha_j}{iq} U^{(j)}, & \vartheta^{(j)} &= \frac{\omega^2 + \alpha_j^2 - q^2}{m\kappa iq(1 - i\omega\tau_1)} c_1 U^{(j)}, \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. Fale powierzchniowe

Zakładamy, że półprzestrzeń $x_2 \geq 0$ jest nieobciążona, $S_{13}(x_1, 0, x_3, t) = 0$, oraz że na powierzchni półprzestrzeni zachodzi swobodna wymiana ciepła. Zatem dla pól niezależnych od x_3 , na powierzchni $x_2 = 0$ spełnione są następujące warunki brzegowe:

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0, \quad \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{2,2} - \gamma(\Theta + t_1\dot{\Theta}) = 0, \quad u_{3,2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\eta_1\Theta + \eta_2\partial\Theta/\partial x_2 = 0 \quad \text{dla stałych} \quad 1 \geq \eta_1 \geq 0, \quad \eta_2 \geq 0, \quad (4.2)$$

Aby otrzymać (4.1) skorzystano z r-nia (2.1)₃. Kładąc

$$A_j = \alpha_j c_1 / \kappa, \quad (4.3)$$

wstawiamy teraz ogólną postać naszej fali bieżącej

$$(u_1, u_2, \Theta) = \sum_{j=1}^3 (U^{(j)}, V^{(j)}, \vartheta^{(j)}) \exp[-A_j x_2 + i(kx_1 - \Omega t)] \quad (4.4)$$

do r-ń (4.1)_{1,2} i (4.2). Dostajemy po skorzystaniu z (3.9):

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + q^2) U^{(1)} + 2\alpha_1\alpha_2 U^{(2)} + 2\alpha_1\alpha_3 U^{(3)} &= 0, \\ 2q^2 U^{(1)} + (2q^2 - \beta^2\omega^2) U^{(2)} + (2q^2 - \beta^2\omega^2) U^{(3)} &= 0, \\ (\eta_0 - \eta_2\alpha_2)(\omega^2 + \alpha_2^2 - q^2) U^{(2)} + (\eta_0 - \eta_2\alpha_3)(\omega^2 + \alpha_3^2 - q^2) U^{(3)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie:

$$\eta_0 = \eta_1 \kappa / c_1. \quad (4.6)$$

Warunek istnienia niezerowego rozwiązania układu (4.5) prowadzi po pewnych przekształceniach do szukanego związku dyspersyjnego (por. [6]):

$$\begin{aligned} [qG\eta_2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \omega^2 - q^2 + \alpha_2\alpha_3) + \eta_0(q^2 - \omega^2 + \alpha_2\alpha_3)]^2 &= \\ = (qG\eta_0 + \eta_2\alpha_2\alpha_3)^2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3), \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie zdefiniowaliśmy:

$$G = \frac{q}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1^2 + q^2}{2q^2} \right)^2.$$

5. Dyskusja równania

R-nie (4.7) dla granicznej wartości $\varepsilon = 0$ dopuszcza rozwiązania

$$G^2 = 1 - \omega^2/q^2, \quad q^2 = \omega^2 \tau_0 + i\omega. \quad (5.1)$$

Pierwsze z tych równań jest klasycznym równaniem na prędkość fali Rayleigha, drugie jest równaniem dyspersji fali termicznej.

Dla innego szczególnego przypadku: $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$, r-nie (4.7) redukuje się do (por. [7]):

$$\begin{aligned} G^2 [q^2 - \omega^2(\tau_0 + \varepsilon\tau_1) - i\omega(1 + \varepsilon) + \alpha_2 \alpha_3]^2 = \\ = (\alpha_2^2 \alpha_3^2 / q^2) [2q^2 - \omega(1 + \tau_0 + \varepsilon\tau_1) - i\omega(1 + \varepsilon) + 2\alpha_2 \alpha_3]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Jeśli $\omega \rightarrow 0$ oraz $q \rightarrow 0$ w taki sposób, że $\omega/q \rightarrow \text{constans}$, wtedy dla każdego $\tau_1 \geq \tau_0 > 0$ odzyskujemy z (5.2) wynik Locketta, [8]:

$$G^2 = (1 + \varepsilon - \omega^2/q^2)/(1 + \varepsilon). \quad (5.3)$$

Aby dojść do tego wyniku, kładziemy:

$$X = \frac{\omega^2}{q^2}, \quad (5.4)$$

co pozwala zapisać r-nie (5.2) w postaci:

$$\mathcal{G} [1 - X(T_0 + \varepsilon T_1) + A]^2 = A^2 [2 - X - X(T_0 + \varepsilon T_1) + 2A], \quad (5.5)$$

gdzie:

$$\mathcal{G} \equiv G^2 = \left(1 - \frac{\beta^2}{2} X \right)^4 (1 - \beta^2 X), \quad (5.6)$$

$$A^2 \equiv (\alpha_2 \alpha_3 / q^2)^2 = (1 - X)(1 - XT_0) - \varepsilon XT_1, \quad (5.7)$$

oraz:

$$T_0 = \tau_0 + \frac{i}{\omega}, \quad T_1 = \tau_1 + \frac{i}{\omega}. \quad (5.8)$$

Jeśli teraz $\omega \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, ale $X \rightarrow \text{constans}$, wtedy

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{\left\{ (1 - X) \left[1 - X \left(\tau_0 + \frac{i}{\omega} \right) \right] - \varepsilon X \left(\tau_1 + \frac{i}{\omega} \right) \right\}}{\left\{ 1 - X \left[\tau_0 + \frac{i}{\omega} + \varepsilon \left(\tau_1 + \frac{i}{\omega} \right) \right] + A \right\}^2} \\ &\cdot \left\{ 2 - X - X \left[\tau_0 + \frac{i}{\omega} + \varepsilon \left(\tau_1 + \frac{i}{\omega} \right) \right] + 2A \right\} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{i^2 \{ -(1 - X)X - \varepsilon X \} \{ -X(1 + \varepsilon) \}}{-\{X(1 + \varepsilon)\}^2}, \end{aligned}$$

albo

$$\mathcal{G} \rightarrow \frac{1 + \varepsilon - X}{1 + \varepsilon},$$

stąd, uwzględnivszy (5.4) dostajemy (5.3).

Jeśli z kolei mamy przypadek równych czasów relaksacji:

$$\tau_1 = \tau_0 \equiv \tau^0 \quad \text{czyli} \quad T_1 = T_0 = T^0 \equiv \tau^0 + \frac{i}{\omega}. \quad (5.9)$$

r -nie (5.5) przyjmuje postać równania dyspersji wyprowadzonego przez N , N - N , por. r -nie (4.9a) w [5], w ramach teorii z jednym czasem relaksacji,

$$\mathcal{G}[1 - (1 + \varepsilon)XT^0 + A]^2 = A^2[2 - X - (1 + \varepsilon)XT^0 + 2A], \quad (5.10)$$

gdzie:

$$A^2 = (1 - X)(1 - XT^0) - \varepsilon XT^0.$$

Tak więc również dla fal powierzchniowych zachodzi analogia wskazana przez Agarvala, [9], dla fal płaskich w przestrzeni nieskończonej. Analogia ta, słuszna jeśli idzie o równanie dyspersji, nie obowiązuje w odniesieniu do amplitud: nasze wyrażenia (3.9) nie są przy założeniu (5.9) takie same jak ich odpowiedniki (4.2), (4.3) w [5].

Dokonajmy jeszcze, wbrew założeniu $\tau_1 \geq \tau_0$, formalnego przejścia granicznego:

$$T_1 = (\tau_1, 1/\omega) \rightarrow (0, 0). \quad (5.11)$$

Otrzymujemy wtedy ten sam wynik co dla $\varepsilon \rightarrow 0$, tzn:

$$[\mathcal{G} - (1 - X)](1 - XT_0)[\sqrt{1 - X} + \sqrt{1 - XT_0}]^2 = 0. \quad (5.12)$$

Ponieważ ostatni nawias po P. S. nie może zniknąć, więc r -nie (5.12) daje:

$$\mathcal{G} = 1 - X, \quad 1 - XT_0 = 0, \quad (5.13)$$

a więc znów mod fali Rayleigha i mod entropowy. Wynik ten pozwoli lepiej zinterpretować przebieg numerycznego rozwiązania równania dyspersji.

6. Analiza numeryczna

Pełniejsza dyskusja równania dyspersji (5.5) może być przeprowadzona po analizie numerycznej jego rozwiązania. Rozwiązanie otrzymano metodą Newtona, tzn. metodą kolejnych przybliżeń wg. schematu:

$$X := X - f(X)/f'(X), \quad (6.1)$$

gdzie $f' = df/dX$, zaś:

$$f(X) = \mathcal{G}(1 - X\mathcal{F} + A)^2 - A^2(2 - X - X\mathcal{F} + 2A). \quad (6.2)$$

Tutaj:

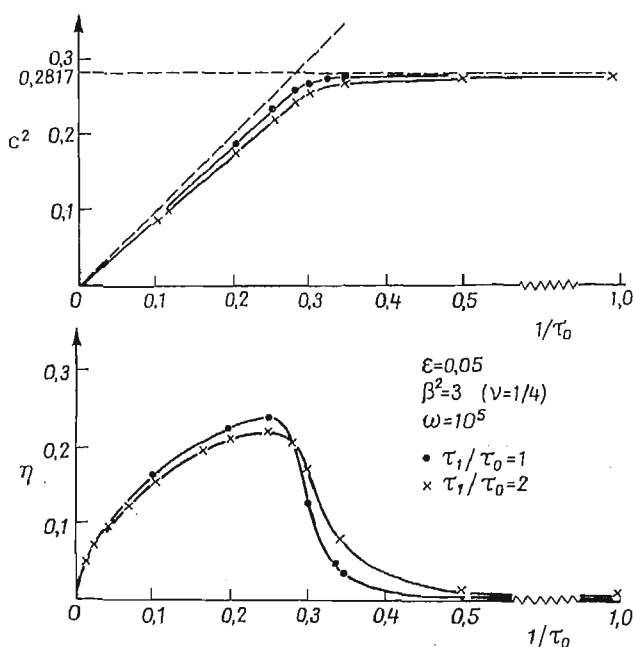
$$\mathcal{F} = T_0 + \varepsilon T_1. \quad (6.3)$$

zaś \mathcal{G} i A dane są formułami (5.6) i (5.7).

Za zerowe przybliżenie przyjęto dla $(1/\tau_0) < c_R^2 = 0.2817$ wartość X stanowiącą rozwiązanie modu termicznego (5.13)₂, zaś dla $(1/\tau_0) > c_R^2$, wartość $X = (c_R^2, 0)$ stanowiącą rozwiązanie modu Rayleigha (5.13)₁.

Zbieżność kolejnych przybliżeń była szybka. Na ogół potrzeba było mniej niż 10 iteracji na to, by moduł różnicy wartości X uzyskanych w dwu kolejnych przybliżeniach był mniejszy od 10^{-6} .

Na rys. 1 przedstawiono wyniki obliczeń przeprowadzonych dla wartości stałej sprężenia $\varepsilon = 0.05$, wartości ilorazu (3.3)₅ $\beta^2 = 3$ (co odpowiada liczbie Poissona $\nu = 1/4$),



Rys. 1. Kwadrat prędkości termosprężystej fali powierzchniowej c^2 oraz współczynnik jej tłumienia η w funkcji odwrotności czasu relaksacji $(1/\tau_0)$ dla dwu stosunków $\tau_1/\tau_0 = 1$ oraz $\tau_1/\tau_0 = 2$, w ośrodku z liczbą Poissona $\nu = 1/4$ i stałą sprężenia termosprężystego $\varepsilon = 0.05$ dla częstości $\omega = 10^5$

przy założeniu, że częstość jest liczbą rzeczywistą o wartości $\omega = 10^5$ i dla dwu wartości ilorazu τ_1/τ_0 , wynoszących 1 oraz 2.

Pierwszy wykres przedstawia prędkość fali:

$$c = \frac{\omega}{\operatorname{Re} q} = \frac{1}{\operatorname{Re}(1/\sqrt{X})}, \quad (6.4)$$

zaś drugi — tłumienie fali:

$$\eta = \operatorname{Im} q = \omega \operatorname{Im}(1/\sqrt{X}). \quad (6.5)$$

w funkcji $(1/\tau_0)$, tzn. w funkcji odwrotności mniejszego z dwu czasów relaksacji. Zgodnie z wynikiem (5.13), dla malejących wartości τ_1 , rozwiązanie zbliża się do prostych asymptotycznych, oznaczonych liniami przerywanymi.

Prędkość termosprężystej fali powierzchniowej nie przekracza nigdzie prędkości klasycznej fali Rayleigha c_R . Co do przebiegu jakościowego, nasze wyniki odpowiadają dolnej gałęzi rozwiązań podanych przez Tao i Prevost, [10], dla płaskiej fali termosprężystej w nieskończonej przestrzeni z czasami relaksacji, por. także Dodatek B.

Tłumienie fali termosprężystej rośnie z $(1/\tau_0)$, i osiąga maksimum w obszarze, w którym zaburzenie to wytraca stopniowo charakter fali termicznej nabierając charakteru fali sprężystej. Dla dużych $(1/\tau_0)$ fala ma charakter fali Rayleigha, tzn. charakter powierzchniowej fali sprężystej, która rozchodzi się bez strat z prędkością c_R .

7. Dyskusja wyników

Dalszą analizę otrzymanych wyników umożliwi nam rozwiązanie równania dyspersji (5.5) metodą rachunku zaburzeń, por. [5].

Celem uproszczenia postępowania zauważamy najpierw, że r-nie (5.5) z 2 czasami relaksacji można zapisać formalnie w postaci równania z 1 czasem relaksacji podanego przez N , $N-N$ w [5]:

$$\mathcal{G}[1 - XT_0(1 + \mathcal{E}) + A]^2 = A^2[2 - X - XT_0(1 + \mathcal{E}) + 2A], \quad (7.1)$$

gdzie:

$$A^2 = (1 - X)(1 - XT_0) - \mathcal{E}XT_0, \quad (7.2)$$

zaś:

$$\mathcal{E} = \varepsilon \frac{T_1}{T_0}. \quad (7.3)$$

Teraz jednak nowy współczynnik sprężenia \mathcal{E} nie jest już stałą materiałową lecz poprzez T_1 i T_0 zależy od ω : zarówno \mathcal{E} jak i T_0 są wielkościami zespolonymi.

Dzieląc stronami (7.1), (7.2) przez X^2 dostajemy:

$$\mathcal{G} \left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) + \mathcal{A} \right]^2 = \mathcal{A}^2 \left[\frac{2}{X} - 1 - T_0(1 + \mathcal{E}) + 2\mathcal{A} \right] X, \quad (7.4)$$

gdzie:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{X^2} A^2 = \left(\frac{1}{X} - 1 \right) \left(\frac{1}{X} - T_0 \right) - \mathcal{E} T_0 \frac{1}{X}. \quad (7.5)$$

Pamiętamy przy tem, że na mocy definicji X , (5.4):

$$\frac{1}{X} = \frac{q^2}{\omega^2}. \quad (7.6)$$

Usuwamy niewymierność w (7.4) otrzymując:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{G} \frac{1}{X} \left\{ \left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) \right]^2 + \mathcal{A}^2 \right\} - \mathcal{A}^2 \left[\frac{2}{X} - 1 - T_0(1 + \mathcal{E}) \right] \right)^2 = \\ = \left\{ \mathcal{A}^2 - \mathcal{G} \frac{1}{X} \left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) \right] \right\}^2 4\mathcal{A}^2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Mała wartość parametru sprzężenia \mathcal{E} skłania do szukania rozwiązań r-nia (7.7) metodą rachunku zaburzeń. Nasuwają się przy tym, ze względu na własność graniczną (5.1), dwa sposoby poszukiwania takiego rozwiązania: 1° szukamy rozwiązania wychodząc z równania fali Rayleigha:

$$\mathcal{G} = 1 - R, \quad (7.8)$$

gdzie R jest kwadratem prędkości fali Rayleigha

$$R = c_R^2, \quad (7.9)$$

zaś $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X)$ brane jest w punkcie $X = R$; 2° szukamy rozwiązania wychodząc z zależności dla fali termicznej

$$X = \frac{1}{T_0}, \quad (7.10)$$

gdzie T_0 dane jest przez (5.8)₁.

7.1. Rozwiązanie od strony fali Rayleigha. Szukamy rozwiązania w postaci $X = R/\mathcal{H}$ czyli (por. (4.15a) w [5])

$$\frac{1}{X} = \frac{\mathcal{H}}{R}, \quad (7.11)$$

gdzie:

$$\mathcal{H} = 1 + \mathcal{E}h_1 + \mathcal{E}^2h_2 + \dots \quad (7.12)$$

Pisząc jeszcze:

$$\mathcal{H} = 1 + \mathcal{E}H_1, \quad (7.13)$$

gdzie:

$$H_1 = h_1 + \mathcal{E}h_2 + \dots$$

nadajemy rozwinięciu (7.11) postać:

$$\frac{1}{X} = \frac{1 + \mathcal{E}H_1}{R}. \quad (7.14)$$

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia:

$$r = \frac{1}{R} - 1, \quad s = \frac{1}{R} - T_0. \quad (7.15)$$

Wtedy (7.5) przyjmuje postać:

$$\mathcal{A}^2 = rs + \mathcal{E}a_1 + \mathcal{E}^2a_2, \quad (7.16)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{1}{R} [H_1(r+s) - T_0], \quad a_2 = \frac{H_1}{R} \left(\frac{H_1}{R} - T_0 \right).$$

zaś wyraz w nawiasie klamrowym {...} po L. S. r-nia (7.7) daje się zapisać następująco:

$$\left[\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) \right]^2 + \mathcal{A}^2 = (r+s)s + \mathcal{E}w_1 + \mathcal{E}^2w_2, \quad (7.17)$$

gdzie:

$$w_1 = (r+3s)\frac{H_1}{R} - \left(2s + \frac{1}{R}\right)T_0, \quad w_2 = \left(\frac{H_1}{R} - T_0\right)\left(2\frac{H_1}{R} - T_0\right).$$

Z kolei wyraz w drugim nawiasie kwadratowym po L. S. r-nia (7.7) wynosi:

$$\frac{2}{X} - 1 - T_0(1+\mathcal{E}) = r+s+\mathcal{E}\left(2\frac{H_1}{R} - T_0\right), \quad (7.18)$$

zaś wyraz w nawiasie kwadratowym po P. S. r-nia (7.7) jest:

$$\frac{1}{X} - T_0(1+\mathcal{E}) = s+\mathcal{E}\left(\frac{H_1}{R} - T_0\right). \quad (7.19)$$

Czynnik \mathcal{G} rozwijamy w szereg potęgowy:

$$\mathcal{G} = g_R + \mathcal{E}\mathcal{G}' + \mathcal{E}^2\mathcal{G}'' + \dots, \quad (7.20)$$

gdzie:

$$g_R = \mathcal{G}|_{X=R}, \quad (7.21)$$

oraz

$$\mathcal{G}' = \left.\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{E}}\right|_{\mathcal{E}=0}. \quad (7.22)$$

Korzystając z (7.21) zapisujemy r-nie (7.8) w postaci:

$$g_R = 1 - R. \quad (7.23)$$

Obliczamy pochodną (7.22); mamy:

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{E}} = \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial\mathcal{E}} = \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial\mathcal{E}} \left(\frac{R}{1+\mathcal{E}H_1} \right),$$

lub

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{E}} = -R \left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial X} \right) \frac{1}{(1+\mathcal{E}H_1)^2} \left(H_1 + \mathcal{E} \frac{\partial H_1}{\partial\mathcal{E}} \right). \quad (7.24)$$

Ponieważ $X|_{\mathcal{E}=0} = R$, więc:

$$\mathcal{G}' = \left.\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathcal{E}}\right|_{\mathcal{E}=0} = -h_1 R \left.\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial X}\right|_{X=R}. \quad (7.25)$$

Zapisujemy jeszcze (7.23) w postaci skrótowej:

$$\mathcal{G} = g_R + \mathcal{E}g, \quad (7.26)$$

gdzie:

$$g = \mathcal{G}' + \mathcal{E}\mathcal{G}'' + \dots$$

Wstawiamy (7.26, 7.17, 7.16, 7.18) i (7.19) do (7.7). Ze względu na wynikającą z (7.23) i (7.15)₁ tożsamość:

$$g_R \frac{1}{R} = r \quad (7.27)$$

spostrzegamy, że znikają wyrazy rzędu $O(\mathcal{E}^0) = O(1)$ po każdej stronie tak otrzymanego równania. Pozostają wyrazy, których najniższy rząd po każdej stronie jest $O(\mathcal{E}^2)$. Współczynnikiem przy \mathcal{E}^2 po lewej stronie równania jest $(\mathcal{L}^0)^2$, zaś po prawej stronie $(\mathcal{P}^0)^2$ 4rs. Przy tym:

$$\mathcal{L}^0 = -(r+s)sh_1 \left(1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \Big|_{X=R} \right) + sT_0, \quad (7.28)$$

zaś:

$$\mathcal{P}^0 = sh_1 \left(1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \Big|_{X=R} \right) - T_0. \quad (7.29)$$

Zatem nasze równanie (7.7) w przybliżeniu $O(\mathcal{E}^2)$ jest:

$$(\mathcal{L}^0)^2 = (\mathcal{P}^0)^2 4rs,$$

skąd:

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}^0 2\sqrt{rs}.$$

Po skorzystaniu z (7.28) - (7.29) dostajemy:

$$(\sqrt{r} + \sqrt{s})^2 sh_1 \left(1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \Big|_{X=R} \right) = (s + 2\sqrt{rs}) T_0.$$

Stąd:

$$h_1 = T_0 \frac{1 - r/(\sqrt{r} + \sqrt{s})^2}{s(1 + \partial \mathcal{G}/\partial X|_{X=R})}. \quad (7.30)$$

Jest to wyrażenie identyczne z otrzymanym wg teorii z 1 czasem relaksacji, por. wzór (4.15b) w pracy [5]. Zauważmy jednak, że sama pierwsza poprawka w rachunku zaburzeń, wynosząca $\mathcal{E}h_1$, na mocy definicji (7.3) zależy liniowo od T_1 , zaś od T_0 zależy w sposób bardziej skomplikowany poprzez funkcję s , por. (7.15)₂.

7.2. Rozwiązanie od strony fali termicznej. Szukamy rozwiązania w postaci (por. wzór (4.14 a) w [5])

$$\frac{1}{X} = T_0(1 + \mathcal{E}\xi_1 + \mathcal{E}^2\xi_2 + \dots), \quad (7.31)$$

gdzie ξ_1, ξ_2 są na razie nieznanymi współczynnikami. Kładąc

$$W = 1 + \mathcal{E}\xi_1 + \mathcal{E}^2\xi_2 + \dots \quad (7.32)$$

lub:

$$W = 1 + \mathcal{E}W_1, \quad (7.33)$$

gdzie:

$$W_1 = \xi_1 + \mathcal{E}\xi_2 + \dots, \quad (7.34)$$

piszemy:

$$\frac{1}{X} = T_0(1 + \mathcal{E}W_1), \quad (7.35)$$

czyli

$$X = \frac{1}{T_0(1 + \mathcal{E}W_1)}. \quad (7.36)$$

Po wstawieniu (7.35) do (7.5) dostajemy:

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}T_0[T_0W(W_1 - 1) - W_1],$$

lub po skorzystaniu z (7.32) i (7.34):

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}T_0B, \quad (7.37)$$

gdzie:

$$B = Z_0 + \mathcal{E}T_0M^2 + \mathcal{E}^2T_0N,$$

zaś:

$$Z_0 = (T_0 - 1)\xi_1 - T_0, \quad (7.38)$$

oraz:

$$T_0M^2 = (T_0 - 1)\xi_2 + T_0\xi_1(\xi_1 - 1),$$

$$N = \xi_2(2\xi_1 - 1 + \mathcal{E}\xi_2).$$

W dalszym ciągu, zgodnie z (7.35) znajdujemy:

$$\frac{1}{X} - T_0(1 + \mathcal{E}) = \mathcal{E}T_0(\xi_1 - 1 + \mathcal{E}\xi_2), \quad (7.39)$$

oraz:

$$\frac{2}{X} - 1 - T_0(1 + \mathcal{E}) = T_0 - 1 + \mathcal{E}T_0(2\xi_1 - 1) + 2\mathcal{E}^2T_0\xi_2. \quad (7.40)$$

Ponadto z dokładnością do wyrazów liniowych w \mathcal{E} :

$$\mathcal{G} = g_0 + \mathcal{E}g_1, \quad (7.41)$$

gdzie:

$$g_0 = \mathcal{G} \Big|_{\mathcal{E}=0} = \frac{\left(1 - \frac{\beta^2}{2}X\right)^4}{1 - \beta^2X} \Big|_{\mathcal{E}=0},$$

czyli po skorzystaniu z (7.36):

$$g_0 = \left(1 - \frac{\beta^2}{2T_0}\right)^4 \Big| \left(1 - \frac{\beta^2}{T_0}\right).$$

Znajomość g_1 nie będzie nam dalej potrzebna. W rezultacie, na mocy (7.39) i (7.35) mamy:

$$\mathcal{G} \frac{1}{X} = g_0T_0 + \mathcal{E}T_0g, \quad (7.42)$$

gdzie:

$$g = g_1 + g_0W_1 + \mathcal{E}g_1W_1.$$

Wstawiamy (7.42, 7.39, 7.40, 7.37) do (7.7). Widzimy, że o ile P. S. tak otrzymanego równania zawiera wyrazy co najwyżej rzędu 0 (\mathcal{E}^1), to L. S. zawiera również wyrazy rzędu

0 (\mathcal{E}^0). Zatem suma tych ostatnich wyrazów winna znikać:

$$[g_0 T_0 - (T_0 - 1)] Z_0 = 0,$$

skąd:

$$Z_0 = 0,$$

lub zgodnie z definicją Z_0 (por. wzór (7.38)):

$$\xi_1 = \frac{T_0}{T_0 - 1}. \quad (7.43)$$

Ograniczając się do liniowego względem \mathcal{E} przybliżenia, z rozwinięcia (7.31) otrzymujemy:

$$\frac{1}{X} = T_0 \left(1 + \mathcal{E} \frac{T_0}{T_0 - 1} \right),$$

lub po skorzystaniu z definicji (7.3):

$$\frac{1}{X} = T_0 \left(1 + \varepsilon \frac{T_1}{T_0 - 1} \right). \quad (7.44)$$

Zatem, podobnie jak w rozwinięciu od strony fali Rayleigha, pierwsza poprawka w rozwinięciu od strony fali termicznej jest liniową funkcją T_1 ; natomiast zależność od T_0 jest w obu wypadkach różna i nieliniowa.

Biorąc pierwiastek kwadratowy z obu stron r-nia (7.44), w liniowym przybliżeniu mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = \sqrt{T_0} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{T_1}{T_0 - 1} \right), \quad (7.45)$$

lub:

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = \sqrt{T_0} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon B_1 - \frac{1}{2} \frac{i}{\omega} \varepsilon B_2 \right),$$

gdzie:

$$B_1 = \frac{\tau_1(\tau_0 - 1) + 1/\omega^2}{(\tau_0 - 1)^2 + 1/\omega^2}, \quad B_2 = \frac{\tau_1 - \tau_0 + 1}{(\tau_0 - 1)^2 + 1/\omega^2}.$$

Jeśli ponadto $\omega \gg 1$, wtedy w liniowym przybliżeniu:

$$\sqrt{T_0} = \sqrt{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i}{\omega \tau_0} \right),$$

$$B_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0 - 1}, \quad B_2 = \frac{\tau_1 - \tau_0 + 1}{(\tau_0 - 1)^2},$$

więc:

$$\operatorname{Re}(1/\sqrt{X}) = \sqrt{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\tau_1}{\tau_0 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Im}(1/\sqrt{X}) = \frac{\sqrt{\tau_0}}{2\omega} \left[\frac{1}{\tau_0} + \varepsilon \frac{(\tau_0 - 1)(\tau_1 + 2\tau_0) - 2\tau_1 \tau_0}{2\tau_0(\tau_0 - 1)^2} \right].$$

Założmy jeszcze, że $\tau_1 \geq \tau_0 \gg 1$; wtedy na mocy (6.4) - (6.5):

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\operatorname{Re}(1/\sqrt{X})} = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\tau_1}{\tau_0} \right), \\ \eta &= \omega \operatorname{Im}(1/\sqrt{X}) = \frac{1}{2\sqrt{\tau_0}} \left[1 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_1}{\tau_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Dla dużych wartości τ_0 , tzn. małych $(1/\tau_0)$ zarówno prędkość fali termosprężystej c jak i jej tłumienie η , ze względu na małość ε , są praktycznie liniowymi funkcjami $(1/\sqrt{\tau_0})$. Oznacza to zatem, co widać na rys. 1, że dla małych $(1/\tau_0)$, wielkość c^2 jest liniową funkcją $(1/\tau_0)$, zaś związek η z $(1/\tau_0)$ jest paraboliczny. Porównanie wartości c i η obliczonych wg formuł (7.46) z wartościami uzyskanymi na drodze numerycznej (por. rozdział 6) wskazuje na ich praktyczną zgodność (< 0.01) dla wartości $(1/\tau_0) < 0.2$.

Zauważmy jeszcze, że w tej granicznej sytuacji ($\omega \gg 1$, $\tau_1 \geq \tau_0 \gg 1$) prędkość fali i jej współczynnik tłumienia są dla fali powierzchniowej takie same jak dla płaskiej fali harmonicznnej w ciele nieskończonym (por. [10], a także Dodatek B); zatem panujące na powierzchni półprzestrzeni warunki brzegowe nie mają wpływu na propagację fali w tym zakresie parametrów.

Dodatek A

Elementarne wzbudzenia ciała stałego w modelu typu Debye'a zdefiniowane jako kwanty podłużnych fal dźwiękowych noszą nazwę fononów. Fonony poruszają się w kierunkach przypadkowych z prędkością c_1 . Jeśli c_x , c_y , c_z są składowymi prędkościami c_1 w kierunkach osi x , y , z to:

$$c_1^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2,$$

przy czym:

$$\langle c_x^2 \rangle = \langle c_y^2 \rangle = \langle c_z^2 \rangle = c_{11}^2,$$

gdzie $\langle \dots \rangle$ oznacza średnią. W związku z tym prędkości fali termicznej jest:

$$c_{11} = c_1/\sqrt{3}, \quad (A1)$$

por. [11], [12]. Wzór (A1) słuszny jest dla ciała, w którym przekazywanie energii odbywa się na drodze fononowej, a więc dla dielektryka, por. [12], [13].

Analiza kinetycznego równania Boltzmanna dla fononów [14], [15] jak i teoria liniowej odpowiedzi [16] wykazują, że można obserwować rozchodzenie się fal termicznych w „oknie” częstości

$$\tau_U^{-1} < \omega < \tau_E^{-1},$$

gdzie τ_U , τ_E są odpowiednio średnimi czasami zaniku strumienia ciepła i powrotu do lokalnej równowagi termicznej.

Dodatek B

Falę harmoniczną o stałej amplitudzie opisuje r-nie (3.1), jeśli położymy w nim $a = 0$. Ponieważ, zgodnie z (3.3)₂ oznacza to, że

$$\alpha = 0, \quad (\text{B1})$$

więc r-nie (3.6) redukuje się do:

$$(\omega^2 - \beta^{-2}q^2)(\tilde{P}\tilde{Q} - q^2\tilde{R}) = 0,$$

Stąd albo:

$$\omega^2 = \beta^{-2}q^2, \quad (\text{B2})$$

albo:

$$(\omega^2 - q^2)(-q^2 + \omega^2\tau_0 + i\omega) - q^2\varepsilon\omega(i + \omega\tau_1) = 0 \quad (\text{B3})$$

Skorzystalismy tutaj ze związków (3.7). R-nia (B2) i (B3) odpowiadają r -niom (14) i (15) w [10]. Korzystając z definicji (5.4) i (5.8) zapisujemy (B3) w postaci:

$$T_0X^2 - bX + 1 = 0, \quad (\text{B4})$$

gdzie:

$$b = 1 + T_0 + \varepsilon T_1.$$

Pierwiastki tego równania są:

$$X_+ = \frac{1}{2T_0}(b + \sqrt{\Delta}), \quad X_- = \frac{1}{2T_0}(b - \sqrt{\Delta}), \quad (\text{B5})$$

gdzie:

$$\Delta = b^2 - 4T_0. \quad (\text{B6})$$

Stąd (por. rys. 2):

$$\frac{1}{\sqrt{X_+}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - \sqrt{\Delta})^{1/2}, \quad \frac{1}{\sqrt{X_-}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + \sqrt{\Delta})^{1/2}. \quad (\text{B7})$$

Pamiętajmy, że pierwiastki liczb zespolonych występujące w (B5) i dalej są obliczane wg wzoru:

$$\sqrt{a+ib} = x+iy,$$

gdzie:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{1/2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{1/2} \frac{b}{|b|},$$

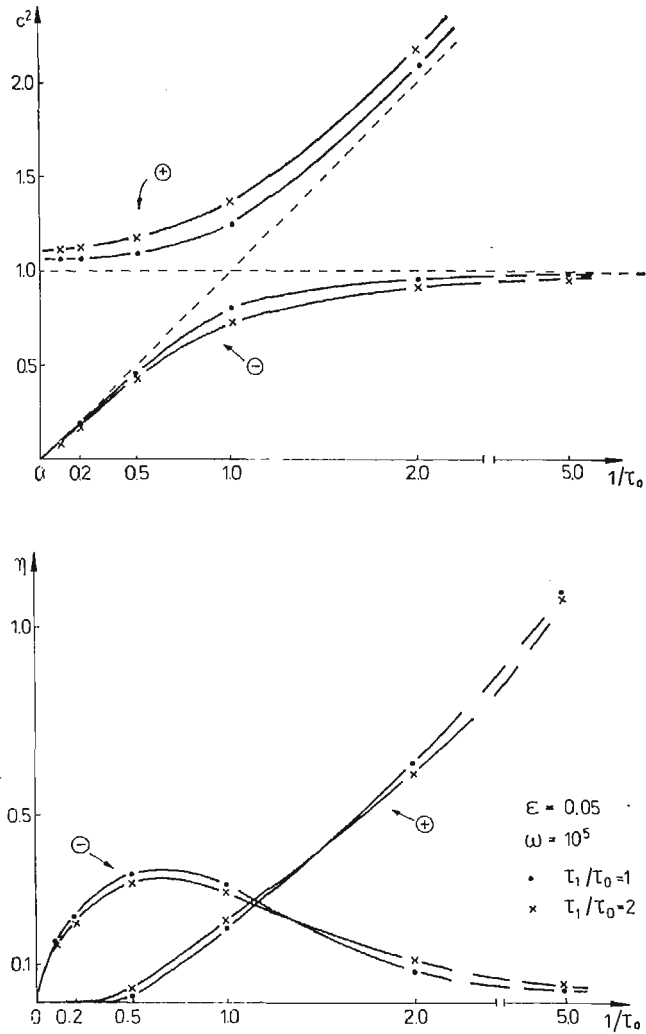
zaś a oraz b są liczbami rzeczywistymi.

Pierwiastek kwadratowy z wyróżnika (B6) możemy zapisać w postaci:

$$\sqrt{\Delta} = -(1-T_0) \left[1 + 2\varepsilon T_1 \frac{1+T_0}{(1-T_0)^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{T_1}{1-T_0} \right)^2 \right]^{1/2},$$

lub w przybliżeniu liniowym ze względu na małość ε :

$$\sqrt{\Delta} = -(1-T_0) - \varepsilon T_1 \frac{1+T_0}{1-T_0}. \quad (\text{B8})$$



Rys. 2. Kwadrat prędkości harmonicjnej fali termosprężystej c^2 oraz współczynnik jej tłumienia η w funkcji odwrotności czasu relaksacji $1/\tau_0$. Krzywe oznaczone kołeczkami \oplus lub \ominus zostały wykreślone odpowiednio na podstawie funkcji X_+ lub X_- , z wykorzystaniem wzorów (6.4), (6.5).

Parametry rozpatrywanego ośrodka są takie same jak na rys. 1

Wstawiając (B8) do (B7) znajdujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{X_+}} = 1 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{T_1}{1-T_0}, \quad \frac{1}{\sqrt{X_-}} = \sqrt{T_0} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon \frac{T_1}{1-T_0} \right). \quad (\text{B9})$$

Zauważmy, iż r-nie (B9)₂ jest identyczne z (7.45).

Literatura

1. J. IGNACZAK, *Linear Dynamic Thermoelasticity — a Survey*, The Shock and Vibration Digest 13, 3 - 8 (1981)
2. S. KALISKI, *Wave Equations in Thermoelasticity*, Bull. Acad. Pol. Sci. techn. 13, 253 - 260 (1965).
3. H. W. LORD, Y. SHULMAN, *A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids 15, 299 - 309 (1967).
4. A. E. GREEN, K. A. LINDSAY, *Thermoelasticity*, J. Elasticity 2, 1 - 7 (1972).
5. A. NAYFEH, S. NEMAT-NASSER, *Thermoelastic Waves with Thermal Relaxation*, Acta Mech. 12, 53 - 69 (1971).
6. V. K. AGARVAL, *On Surface Waves in Generalized Thermoelasticity*, J. Elasticity 8, 171 - 177 (1978).
7. D. S. CHANDRASEKHARAI AH, K. R. SRIKANTAI AH, *On Temperature — Rate Dependent Thermoelastic Rayleigh Waves in Halfspace with Material Boundary*, Gerlands Beitr. Geophys. 93, 133 - 141 (1984).
8. F. J. LOCKETT, *Effect of Thermal Properties of a Solid on the Velocity of Rayleigh Waves*, J. Mech. Phys. Solids 7, 71 - 75 (1958).
9. V. K. AGARVAL, *On Plane Waves in Generalized Thermoelasticity*, Acta Mech., 31, 185 - 198 (1979).
10. D. TAO, J. H. PREVOST, *Relaxation Effects on Generalized Thermoelastic Waves*, J. Therm. Stresses 7, 79 - 89 (1984).
11. J. C. WARD, J. WILKS, *Second Sound and the Thermo-Mechanical Effect at very low Temperatures*, Phil. Mag. 43, 48 - 50 (1952).
12. M. CHESTER, *Second Sound in Solids*, Phys. Rev. 131, 2013 - 2015 (1963).
13. M. J. MAURER, *Relaxation Model for Heat Conduction in Metals*, J. Appl. Phys. 40, 5123 - 5130 (1969).
14. E. W. PROHOFKY, J. A. KRUMHANSL, *Second — Sound Propagation in Dielectric Solids*, Phys. Rev. 133, A 1403 - 1410 (1964).
15. W. E. BRON, ed., *Nonequilibrium Phonon Dynamics*, Plenum Press, New York and London, 1985.
16. A. GRIFFIN, *On the Detection of Second Sound in Crystals by Light Scattering*, Phys. Letters 17, 208 - 210 (1965).

Р е з ю м е

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ТЕРМОУПРУГОСТИ С ВРЕМЕНАМИ
РЕЛАКСАЦИИ

Исследуем поверхностные волны в изотропном однородном полупространстве используя теорию линейной термоупругости с двумя временами релаксации. Предполагается, что поверхность полупространства свободна от механической нагрузки, и что на нее возможен свободной теплообмен. Выводится дисперсионное соотношение и представляется его численной и асимптотический анализ. Указана аналогия найденных результатов с результатами теории с одним временем релаксации. При отсутствии сопряжения термических и механических полей получается классическую волну Рэлея. Для низких значений частоты и волнового вектора задача сводится к решению Лёккетта.

S u m m a r y

SURFACE WAVES IN THERMOELASTICITY WITH RELAXATION TIMES

Surface waves in an isotropic homogeneous semi-infinite space are studied within the linear thermoelasticity with two relaxation times. The boundary of the semi — space is assumed to be free of stresses and through it there is a heat exchange with environment. Associated dispersion relation is derived and its

numerical and asymptotic analysis are presented. The analogy of our results with those of a theory with one relaxation time is discussed. Also, Rayleigh's classical result for isothermal elastodynamics, and Lockett's thermoelastic solution corresponding to low frequencies and small wave vectors are recovered.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1987 roku.
