

ANALIZA NIELINIOWYCH DRGAŃ WŁASNYCH BELEK WIELOPRZEŚŁOWYCH

ROMAN LEWANDOWSKI

Politechnika Poznańska

W niniejszej pracy podano numeryczne rozwiązanie dla geometrycznie nieliniowych drgań własnych belek ciągłych których końce są sprężyste podparte w kierunku poziomym. Pominięto poziome i obrotowe siły bezwładności a belki traktuje się jako układy z ciągłym rozkładem masy. Zastosowano podejście wariacyjne, metodę elementów skończonych oraz pewną procedurę iteracyjną do wyznaczenia nieliniowych częstości i postaci drgań. Podano wyniki przykładowych obliczeń numerycznych.

1. Wstęp

Belki poddane drganiom o dużych amplitudach należy traktować jako układy nieliniowe. Analiza drgań własnych oraz ustalonych, harmonicznie wymuszonych drgań belek jednoprzęsłowych była przedmiotem szeregu publikacji spośród których dla przykładu można wymienić prace [1 ÷ 14]. W pracach [1 ÷ 7] do rozwiązania problemu używano przybliżonych metod analitycznych, a metodę elementów skończonych zastosowano w pracach [8 ÷ 14].

Przeprowadzono szczegółowe analizy wpływu poszczególnych parametrów belki na częstości drgań własnych. We wszystkich pracach zgodnie stwierdza się zasadniczy wpływ odkształceń osi belki oraz braku swobody przesuwu końców belki w poziomie na jej nieliniowe zachowanie. W pracach [7, 12] wykazano również, że sprężyste podparcie końców belki w poziomie znacząco zwiększa częstości drgań własnych. Ponadto w [3, 13] stwierdza się nieznaczny wpływ poziomych sił bezwładności na częstości drgań. Belki jednoprzęsłowe charakteryzują się wzrostem częstości drgań wraz ze wzrostem amplitudy. Rzadko występujące przypadki dla których następuje zmniejszenie częstości drgań przy wzrastających amplitudach omówiono w [12].

W pracy [6] wykazano istotny wpływ nieliniowego, sprężystego podparcia belki w kierunku pionowym na częstości i postacie drgań.

Problem sprzężenia postaci drgań w stanie ustalonym drgań harmonicznie wymuszonych analizowano w pracy [5], a w [14] podano nową numeryczną metodę analizy drgań ustalonych w otoczeniu rezonansu głównego.

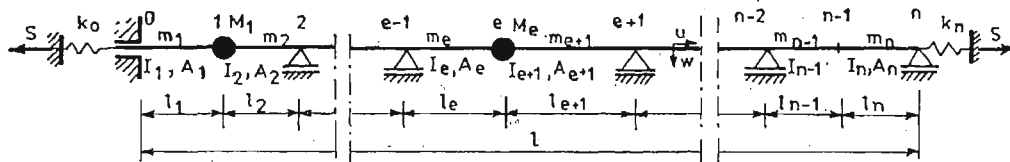
Autorowi nie są znane prace dotyczące problemów nieliniowej dynamiki belek ciągłych.

Niniejsza praca podaje przybliżone rozwiązanie zagadnienia drgań własnych geometrycznie nieliniowych belek ciągłych. W szczególności wyznacza się nieliniowe częstotliwości i postacie drgań.

Podano wariacyjne sformułowanie problemu. Założono rozwiązanie harmonicznie zmienne względem czasu, a względem zmiennej przestrzennej problem sprowadzono do rozwiązania nieliniowego zadania na wartości własne. Nieliniowy problem własny rozwiązano numerycznie. Zastosowano metodę elementów skończonych oraz wyprowadzono dynamiczne macierze mas i sztywności elementów.

2. Sformułowanie problemu i jego rozwiązanie

W pracy analizuje się drgania własne belek wieloprzęsłowych opartych na niepodatnych podporach. Skrajne podpory mają więzy sprężyste o współczynnikach podatności k_0 i k_n kępujące swobodę przemieszczania końców belki w kierunku poziomym. Na belkę



Rys. 1. Widok rozpatrywanej belki

działa osiowa siła statyczna, S , masa belki jest rozłożona w sposób ciągły na jej długości, a ponadto w pewnych punktach są skoncentrowane masy skupione. Moment bezwładności $I(x)$, pole przekroju poprzecznego $A(x)$ oraz jednostkowa masa belki $m(x)$ są stałe na pewnych odcinkach belki. Przykładową belkę wraz z używanymi oznaczeniami pokazano na rys. 1.

Związki geometryczne dla rozpatrywanej belki mają postać:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

gdzie u , w , ε , κ oznaczają kolejno: poziome i pionowe przemieszczenie belki, odkształcenie osi belki oraz jej krzywiznę.

Zakładając, że poziome oraz obrotowe siły bezwładności są pomijalnie małe, z warunku równowagi $\sum x = 0$ i po uwzględnieniu (2.1)₁, otrzymamy następujące wyrażenie na siłę normalną w belce wywołaną odkształceniami osi belki:

$$N(t) = EA(x) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.2)$$

Całkując (2.2) w granicach od 0 do l oraz uwzględniając warunki brzegowe $u(0) = k_0 N(t)$, $u(l) = -k_n N(t)$ możemy wyrażenie na siłę $N(t)$ zapisać w postaci:

$$N(t) = \frac{EA}{2lk} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.3)$$

gdzie $k = d + \frac{EA}{l} (k_0 + k_n)$, $d = \sum_{e=1}^n l_e A_e / l A_e$, A oznacza porównawcze pole przekroju poprzecznego belki. Ze wzoru (2.3) wynika, że siła normalna $N(t)$ jest stała na długości belki.

Po wykorzystaniu powyższych spostrzeżeń energię potencjalną i kinetyczną rozpatrywanego układu można zapisać w postaci:

$$U = \int_0^l \frac{EI(x)}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{SN(t)}{EA(x)} dx + \int_0^l \frac{N^2(t)}{2EA(x)} dx +$$

$$+ SN(t) \cdot (k_0 + k_n) + \frac{1}{2} N^2(t) \cdot (k_0 + k_n), \quad (2.4)$$

$$K = \int_0^l \frac{1}{2} m(x) \dot{w}^2(x, t) dx + \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} M_e \dot{w}_e^2(t). \quad (2.5)$$

Dwa ostatnie składniki w (2.4) uwzględniają wpływ podatności skrajnych podpór.

Ponieważ poszukujemy rozwiązań okresowych, więc zakładamy, że w pierwszym przybliżeniu przemieszczenia dynamiczne belki można aproksymować funkcją o postaci:

$$w(x, t) = \alpha v(x) \cos \omega t, \quad (2.6)$$

gdzie $v(x)$ oznacza nieliniową postać drgań unormowaną w ten sposób aby dla $x = \bar{x}$, $v(\bar{x}) = 1$, α amplitudę drgań punktu $x = \bar{x}$ belki a ω nieliniową częstość drgań. Rozwiązanie powyższe spełnia warunki początkowe o postaci: $w(x, 0) = \alpha v(x)$, $\dot{w}(x, 0) = 0$. Jak wynika, np. z pracy [15], przyjęcie w omawianym przypadku harmonicznego przebiegu drgań w czasie dobrze przybliża rozwiązanie dokładne.

Podstawiając (2.6) do całki działania $W = \frac{1}{T} \int_0^T (K - U) dt$ oraz całkując względem czasu w przedziale równym poszukiwanemu okresowi drgań $T = 2\pi/\omega$ otrzymamy funkcjonał o postaci:

$$W(v) = \frac{1}{4} \int_0^l \omega^2 \alpha^2 m(x) v^2(x) dx + \frac{1}{4} \sum_{e=1}^n \alpha^2 M_e v_e^2 - \frac{1}{4} \int_0^l \alpha^2 EI(x) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx -$$

$$- \int_0^l \frac{SC(v, \alpha^2)}{2EA(x)} dx - \int_0^l \frac{3C^2(v, \alpha^2)}{16EA(x)} dx - \left(\frac{1}{2} SC + \frac{3}{16} C^2 \right) (k_0 + k_n) \quad (2.7)$$

gdzie:

$$C(v, \alpha^2) = \frac{EA\alpha^2}{2lk} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = \text{const.}$$

Warunek stacjonarności funkcjonału (2.7) dla $m(x) = m$, $M_e = 0$, $A(x) = A$, $I(x) = I$ prowadzi do równania różniczkowego o postaci:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \left[S + \frac{3}{4} C(v, \alpha^2) \right] \frac{d^2 v}{dx^2} - \omega^2 m v(x) = 0. \quad (2.8)$$

Jak wykazano w pracy [7] rozwiązanie równania (2.8) dla jednoprzęsłowej belki ma postać:

$$v(x) = D_1 \operatorname{ch} \delta \frac{x}{l} + D_2 \operatorname{sh} \delta \frac{x}{l} + D_3 \cos \nu \frac{x}{l} + D_4 \sin \nu \frac{x}{l}, \quad (2.9)$$

gdzie D_1, D_2, D_3, D_4 to stałe, oraz:

$$\delta = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + \beta^4} + \frac{\gamma^2}{2}}, \quad \nu = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + \beta^4} - \frac{\gamma^2}{2}}, \quad (2.10)$$

$$\beta^4 = \omega^2 m l^4 / (EI), \quad \gamma^2 = l^2 \left(S + \frac{3}{4} C \right) / (EI).$$

Nieliniowość zadania wymaga ustalenia właściwej wartości stałej C . Można ją wyznaczyć stosując iteracyjny sposób postępowania podany w pracy [7].

Dla belki ciągłej stosuje się metodę elementów skończonych dla wyznaczenia nieliniowej postaci drgań $v(x)$. Belkę dzieli się na elementy w ten sposób aby w każdym typowym elemencie e masa jednostkowa belki $m(x) = m_e$, pole przekroju poprzecznego $A(x) = A_e$, oraz jego moment bezwładności $I(x) = I_e$ były stałe. Ponadto miejsca występowania podpór oraz mas skupionych winny pokrywać się z brzegami elementów. Związek (2.9) można teraz przyjąć jako rozwiązanie dla pojedynczego elementu skończonego, a stałe D_i potraktować jako uogólnione parametry węzłowe.

Macierzowa postać zależności (2.9) jest następująca:

$$v(x) = \mathbf{N}^t \mathbf{q}_e, \quad (2.9a)$$

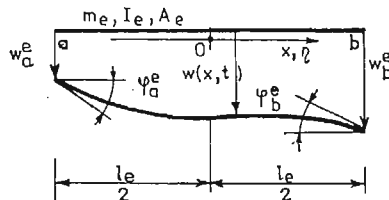
gdzie: $\mathbf{N}^t(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$, $\mathbf{q}_e = \{D_1^e, D_2^e, D_3^e, D_4^e\}$,

$$N_1 = \operatorname{ch} \delta_e \xi, \quad N_2 = \operatorname{sh} \delta_e \xi, \quad N_3 = \cos \nu_e \xi, \quad N_4 = \sin \nu_e \xi,$$

$$\xi = x/l_e, \quad \beta_e^4 = \omega^2 m_e l_e^4 / (EI_e), \quad \gamma_e^2 = l_e^2 \left(S + \frac{3}{4} C \right) / (EI_e),$$

$$\delta_e = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma_e^4}{4} + \beta_e^4} + \frac{\gamma_e^2}{2}}, \quad \nu_e = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma_e^4}{4} + \beta_e^4} - \frac{\gamma_e^2}{2}},$$

a ()' oznacza transpozycję macierzy.



Rys. 2. Element belkowy

Kinematyczne warunki na brzegach elementu $v(-0,5l_e) = v_a^e$, $v(0,5l_e) = v_b^e$,

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=-0,5l_e} = \varphi_a^e, \quad \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0,5l_e} = \varphi_b^e \quad (\text{porównaj rys. 2}) \text{ pozwalają na napisanie równań:}$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{q}_e, \quad \mathbf{q}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{v}_e, \quad (2.11)$$

gdzie: $\mathbf{v}_e^t = \{v_a^e, \varphi_a^e, v_b^e, \varphi_b^e\}$,

$$\mathbf{A}_e = \frac{1}{2F_1 F_2} \begin{bmatrix} \nu_e \tilde{S} F_1, & -l_e \tilde{C} F_1, & \nu_e \tilde{S} F_1, & l_e \tilde{C} F_1 \\ \nu_e \tilde{C} F_2, & l_e \tilde{S} F_2, & -\nu_e \tilde{C} F_2, & l_e \tilde{S} F_2 \\ \delta_e \tilde{S} F_1, & l_e \tilde{C} F_1, & \delta_e \tilde{S} F_1, & -l_e \tilde{C} F_1 \\ -\delta_e \tilde{C} F_2, & -l_e \tilde{S} F_2, & \delta_e \tilde{C} F_2, & -l_e \tilde{S} F_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \delta_e \tilde{C} \tilde{c} - \nu_e \tilde{S} \tilde{s}, \quad F_2 = \nu_e \tilde{C} \tilde{s} + \delta_e \tilde{S} \tilde{c}, \quad \tilde{c} = \cos \nu_e / 2, \quad \tilde{s} = \sin \nu_e / 2, \\ \tilde{C} &= \text{ch } \delta_e / 2, \quad \tilde{S} = \text{sh } \delta_e / 2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Podstawiając (2.9a) i (2.11) do (2.7) możemy funkcjonal $W(v)$ zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$W(\mathbf{V}) = \frac{1}{4} \omega^2 \alpha^2 \mathbf{V}' \mathbf{M} \mathbf{V} - \frac{1}{4} \alpha^2 \mathbf{V}' \mathbf{K} \mathbf{V} - \frac{Slk}{2EA} C(\mathbf{V}, \alpha^2) - \frac{3lk}{16EA} C^2(\mathbf{V}, \alpha^2), \quad (2.7a)$$

gdzie:

$$C(\mathbf{V}, \alpha^2) = \frac{EA \alpha^2}{2lk} \sum_{e=1}^n \mathbf{v}_e^t \mathbf{B}_e \mathbf{v}_e = \frac{EA \alpha^2}{2lk} \mathbf{V}' \mathbf{B} \mathbf{V}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{V}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_e, \dots, \mathbf{v}'_n\},$$

$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, \mathbf{M}_1 oznacza diagonalną macierz utworzoną z mas skupionych. Globalne macierze \mathbf{M}_2 , \mathbf{K} , \mathbf{B} powstały w wyniku agregacji odpowiednio macierzy \mathbf{M}_e , \mathbf{K}_e , \mathbf{B}_e elementu. Postacie \mathbf{M}_e , \mathbf{K}_e , \mathbf{B}_e podano poniżej:

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{A}_e^t \mathbf{X}_e \mathbf{A}_e, \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{A}_e^t \mathbf{Y}_e \mathbf{A}_e, \quad \mathbf{B}_e = \mathbf{A}_e^t \mathbf{Z}_e \mathbf{A}_e,$$

$$\mathbf{X}_e = \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} m(x) \mathbf{N} \mathbf{N}' dx = ml \begin{bmatrix} \frac{1}{2\delta} F_3, & 0, & \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_2, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2\delta} F_4, & 0, & \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_1 \\ \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_2, & 0, & \frac{1}{2\nu} F_5, & 0 \\ 0, & \frac{2}{\delta^2 + \nu^2} F_1, & 0, & \frac{1}{2\nu} F_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_e = \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} EI(x) \mathbf{N}' \mathbf{N}''' dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{\delta^3}{2} F_3, & 0, & -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_2, & 0 \\ 0, & \frac{\delta^3}{2} F_4, & 0, & -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_1 \\ -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_2, & 0, & \frac{\nu^3}{2} F_5, & 0 \\ 0, & -\frac{2\delta^2\nu^2}{\delta^2+\nu^2} F_1, & 0, & \frac{\nu^3}{2} F_6 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{z}_e &= \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} \mathbf{N}'\mathbf{N}'' dx = 1/l \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} F_4, & 0, & -\frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_1, & 0 \\ 0, & \frac{\delta}{2} F_3, & 0, & \frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_2 \\ -\frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_1, & 0, & \frac{\nu}{2} F_6, & 0 \\ 0, & \frac{2\delta\nu}{\delta^2+\nu^2} F_2, & 0, & \frac{\nu}{2} F_5 \end{bmatrix}, \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$F_3 = \delta + 2\tilde{S}\tilde{C}, \quad F_4 = 2\tilde{S}\tilde{C} - \delta, \quad F_5 = \nu + 2\tilde{z}\tilde{c}, \quad F_6 = \nu - 2\tilde{z}\tilde{c}, \quad (') = \frac{d}{dx}.$$

We wzorach (2.14), dla uproszczenia zapisu, opuszczono indeks e przy l, m, I, δ, ν .

Warunek stacjonarności funkcjonału (2.7a) $\delta W(\mathbf{V}) = 0$ prowadzi do poniższego równania:

$$\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{V} - \mathbf{K}\mathbf{V} - \left[S + \frac{3}{4} C(\mathbf{V}, \alpha^2) \right] \mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Równanie (2.15) łącznie z odpowiednimi warunkami brzegowymi definiuje tzw. nieliniowy problem własny [6, 10, 16÷18]. Kwadrat częstości drgań własnych jest nieliniową wartością własną, a wektor \mathbf{V} nieliniowym wektorem własnym. Zauważmy, że macierze $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{B}$ oraz stała C są złożonymi funkcjami ω i \mathbf{V} .

Rozwiązując powyższy problem własny wyznaczmy ω i \mathbf{V} a tym samym rozwiążemy postawione w pracy zagadnienie. Rozwiązanie problemu liniowych drgań własnych otrzymamy po rozwiązaniu równania macierzowego (2.15) w którym formalnie podstawimy $\alpha \doteq 0$.

Metodę rozwiązania nieliniowego problemu własnego opisano w następnym punkcie pracy.

3. Rozwiązanie nieliniowego problemu własnego

Teoria nieliniowych problemów własnych jest do tej pory stosunkowo słabo opracowana. Tym niemniej opracowano już kilka efektywnych metod numerycznych za pomocą których można uzyskać rozwiązanie. Omówienie tych metod można znaleźć w pracach

[17, 18]. W pracy [19] podano nową metodę rozwiązania będącą rozszerzeniem metody wektorów iterowanych na przypadek nieliniowy.

Przystępując do opisu metody rozwiązania problemu własnego opisanego równaniem (2.15) zakładamy, że interesuje nas tylko jedno z rozwiązań które dla α zmierzającego do zera przechodzi w wybraną postać i częstość drgań belki traktowanej jako układ liniowy. Ponadto dążymy do numerycznego wyznaczenia krzywej szkieletowej i wobec tego zamierzamy określić ω i \mathbf{V} dla ciągu rosnących wartości parametru α .

Rozwiązanie uzyskuje się za pomocą opisanego poniżej procesu iteracyjnego. Zakładamy, że dla danej wartości α znane jest przybliżenie początkowe C , ω i \mathbf{V} oznaczone przez C_i , ω_i , \mathbf{V}_i (indeks i oznacza numer iteracji).

Wybór początkowego przybliżenia rozwiązania w zasadniczy sposób wpływa na zbieżność procesu iteracyjnego. Na podstawie doświadczeń numerycznych stwierdzono, że szybką zbieżność uzyskuje się przyjmując pierwsze przybliżenia w sposób następujący:

- dla $\alpha = 0$ (poszukiwanie rozwiązania liniowego problemu własnego) $C_1 = 0$, $\mathbf{V}_1 = 0$, $\omega_1 = a \neq 0$, gdzie a jest oszacowaniem poszukiwanej liniowej częstości drgań ω_1 ,
- dla $\alpha = \Delta\alpha$ (pierwszy przyrost amplitudy drgań) jako pierwsze przybliżenie postaci drgań przyjmuje się wybraną liniową postać, ω_1 i C_1 wyznacza się ze wzorów:

$$\omega_1^2 = \omega_i^2 + \frac{3EA}{8lk} \cdot \frac{(\mathbf{V}'\mathbf{B}\mathbf{V})^2}{\mathbf{V}'\mathbf{M}\mathbf{V}} \Delta\alpha^2 = \omega_i^2 + \eta\Delta\alpha^2, \quad (3.1)$$

$$C_1 = \frac{EA}{2lk} \mathbf{V}'\mathbf{B}\mathbf{V}\Delta\alpha^2, \quad (3.2)$$

gdzie elementy macierzy \mathbf{B} , \mathbf{M} określa się przyjmując $C = 0$, $\omega = \omega_i$,

- dla kolejnych przyrostów amplitudy drgań (np. $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\alpha$) jako pierwsze przybliżenie postaci drgań wybiera się postać wyznaczoną dla α_n a ω_1 i C_1 wyznacza się ze wzorów:

$$\omega_1^2 = \omega_i^2 + \eta \cdot \alpha_{n+1}^2, \quad (3.3)$$

$$C_1 = C(\alpha_n) \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right)^2. \quad (3.4)$$

Wykorzystując związki (2.12) i (2.14) można, znając C_i , ω_i , \mathbf{V}_i , określić macierze \mathbf{M}_e , \mathbf{K}_e , oraz \mathbf{B}_e a następnie wygenerować macierze globalne \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{B} . Operacji tych nie można wykonać tylko wtedy gdy ω_i pokrywa się z jedną z liniowych częstości drgań ω_{ei} elementu skończonego traktowanego jako izolowana belka obustronnie utwierdzona. W tym przypadku iloczyn występujący w mianowniku wzoru (2.12) $F_1 F_2 = 0$ gdyż jest on identyczny z lewą stroną równania charakterystycznego belki obustronnie utwierdzonej. Jeżeli więc $\omega_i \neq \omega_{ei}$ ale $\omega_i = \omega_{ei}$ to należy zmienić ω_i przyjmując np. $\omega_i = 0,98\omega_{ei}$. Jeżeli zaś $\omega_i = \omega_{ei}$ oraz $\omega_i = \omega$ to należy zmienić podział belki na elementy i w ten sposób doprowadzić do zmiany ω_{ei} .

Następnie podstawiamy macierze \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{B} oraz stałą C do równania (2.15) i rozwiązujemy otrzymany w ten sposób zlinearyzowany problem własny. Jako nowe przybliżenia ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} wybieramy to rozwiązanie zlinearyzowanego problemu własnego którego wektor własny jest bliski dotychczasowemu przybliżeniu postaci drgań \mathbf{V} .

Z kolei wykorzystując (2.13) wyznaczamy nowe przybliżenie stałej C . W zasadzie wymaga to zastosowania pomocniczego procesu iteracyjnego gdyż, dla zadanego ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} , elementy macierzy \mathbf{B}_e zależą od C poprzez parametr γ . Doświadczenia numeryczne pokazały jednak, że bez szkody dla zbieżności metody można zaniedbać to sprzężenie i określać elementy macierzy \mathbf{B}_e na podstawie dotychczasowego przybliżenia stałej C .

Mając nowe przybliżenia rozwiązania nieliniowego problemu własnego C_{i+1} , ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} przystępujemy do sprawdzenia warunków zbieżności iteracji. Mają one postać:

$$|C_{i+1} - C_i| \leq \varepsilon_1 C_{i+1}, |\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2| \leq \varepsilon_2 \omega_{i+1}^2, \|\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i\| \leq \varepsilon_3 \|\mathbf{V}_{i+1}\| \quad (3.5)$$

gdzie ε_1 , ε_2 , ε_3 oznaczają przyjęte dokładności obliczeń, a $\|\cdot\|$ normę euklidesową wektora. Jeżeli powyższe nierówności są spełnione to otrzymane ostatnio przybliżenie ω i \mathbf{V} traktujemy jako rozwiązanie nieliniowego problemu własnego. W przeciwnym wypadku powtarzamy opisanie powyżej postępowanie iteracyjne przyjmując C_{i+1} , ω_{i+1} , \mathbf{V}_{i+1} jako nowe przybliżenie poszukiwanego rozwiązania.

Podobny do opisanego powyżej sposób rozwiązania nieliniowego problemu własnego został podany w pracach [8 ÷ 11]. W niniejszej pracy został on rozszerzony na przypadek, w którym macierze \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{B} zależą od wartości własnej.

4. Wyniki obliczeń numerycznych

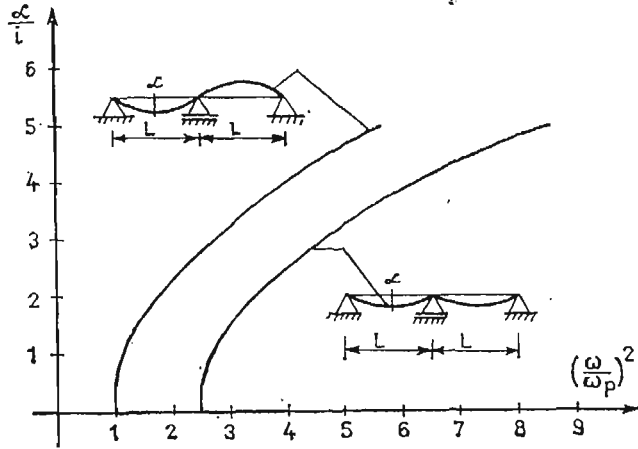
Posługując się opisaną powyżej metodą uzyskano rozwiązania szeregu przykładowych zadań. Wyniki obliczeń wykonanych za pomocą maszyny cyfrowej przedstawiono na rys. 3 ÷ 16. Uwagę skoncentrowano na analizie wpływu różnych parametrów belki na zmianę stosunku nieliniowej częstości drgań do częstości tej samej belki traktowanej jako układ geometrycznie liniowy.

W opisywanych poniżej przykładach każde przęsło belki dzielono na dwa elementy skończone. W wielu przypadkach można jednak bez szkody dla dokładności obliczeń przyjąć długość elementu skończonego równą długości przęsła belki, ponieważ przyjęte funkcje kształtu są identyczne z funkcjami analitycznymi opisującymi nieliniową postać drgań belki jednoprzęsłowej o stałym przekroju poprzecznym.

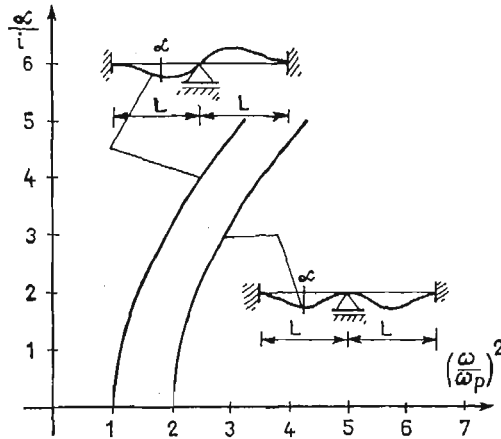
Obliczenia wykonano przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,001$ jako dopuszczalne względne błędy obliczeń. Ponadto we wszystkich przykładach dotyczących belek dwuprzęsłowych α oznacza amplitudę drgań punktu położonego w środku lewego przęsła, a ω_p podstawową liniową częstość drgań własnych rozpatrywanej belki. We wszystkich analizowanych przypadkach maksymalna liczba wykonywanych iteracji nie była większa od trzech przy czym bezwymiarowy przyrost amplitudy przyjęto równy $\Delta\alpha/i = 0,5$ (i oznacza promień bezwładności przekroju lewego przęsła). Dane podane w przykładzie pierwszym należy traktować jako dane bazowe, w kolejnych przykładach zmieniać się będą tylko te dane których zmiana jest niezbędna do przeprowadzenia opisywanej analizy. Poza przykładem pierwszym wszystkie pozostałe analizy dotyczą podstawowej częstości drgań.

4.1. Przykład 1. Przykład ten ilustruje dokładność rozwiązywania otrzymywanego za pomocą metody elementów skończonych. Wyznaczono krzywe szkieletowe dla dwóch pierwszych częstości drgań belki dwuprzęsłowej o równych rozpiętościach przęseł L ,

masach jednostkowych $m(x) = m$ i charakterystykach geometrycznych $I(x) = I$, $A(x) = A$. Ponadto przyjęto $k_0 = k_n = 0$, $S = 0$. Na rys. 3 pokazano krzywe szkieletowe dla belki spoczywającej na podporach przegubowych, a na rys. 4 podobne krzywe dla belki



Rys. 3. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej



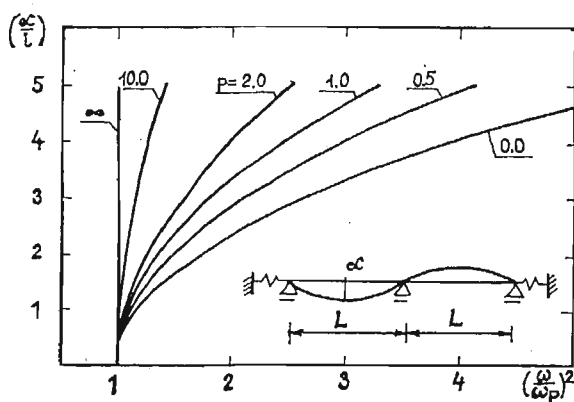
Rys. 4. Krzywe szkieletowe belki utwierdzonej na końcach

utwierdzonej na końcach. Dla dużych amplitud drgań brak swobody przesuwu końców belki w poziomie znacząco zwiększa częstoty drgań własnych. Ponieważ pierwsza postać drgań belki przegubowej jest antysymetryczna, więc każde jej przesło zachowuje się tak jak izolowana belka jednoprzęsłowa. Podstawowa częstota drgań jednoprzęsłowej belki przegubowo podpartej wyznacza się ze wzoru [7]:

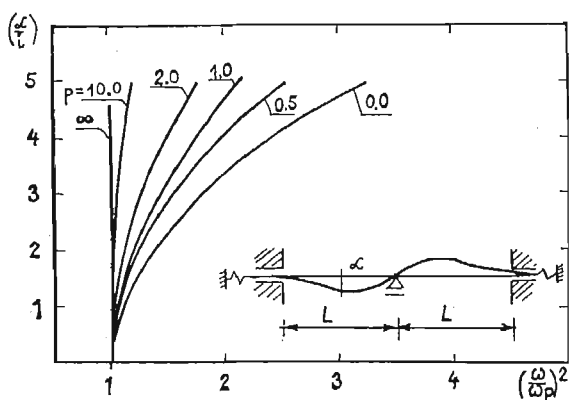
$$\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 = 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{\alpha}{i}\right)^2 \quad (4.1)$$

Wyniki pokazane na rys. 3 są identyczne z wynikami analitycznymi. W podobny sposób wykorzystując rezultaty obliczeń zamieszczone w [7], sprawdzono pozostałe krzywe szkieletowe uzyskując całkowitą zgodność wyników.

4.2. Przykład 2 — wpływ podatności poziomej skrajnych podpór. Dla omówionych powyżej belek dwuprzęsłowych wykonano obliczenia zakładając, że $k_0 = k_n \neq 0$. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5,6 dla różnych stosunków $p = k_0 EA/L$ podatności skrajnej pod-



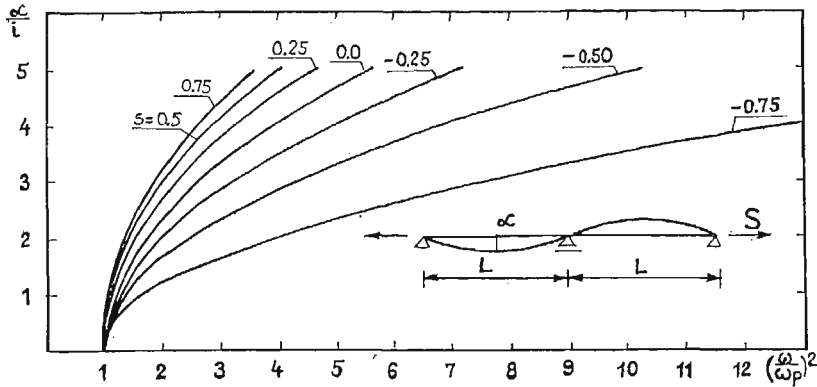
Rys. 5. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej o różnej podatności poziomej podpór skrajnych



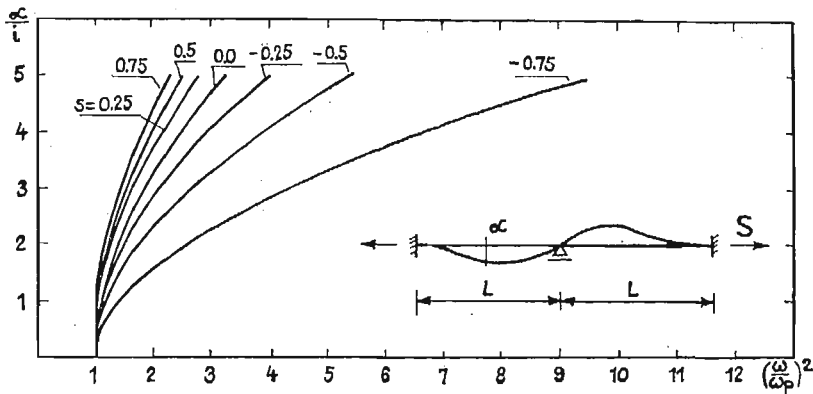
Rys. 6. Krzywe szkieletowe belki utwierdzonej o różnych podatnościach poziomych podpór skrajnych

pory do podatności jednego przęsła na rozciąganie. Znaczące efekty nieliniowe występują również w przypadku dużej podatności podpór — przykładowo dla belki przegubowej o $k_0 = L/EA$ i $\alpha/l = 5,0$ $\omega = 1,83 \omega_p$. Dla belek o swobodnych końcach mamy $k_0 = k_n = \infty$, co prowadzi do $N(t) = 0$, znikania członów nieliniowych w (2.15) i liniowego zachowania układu.

4.3. Przykład 3 — wpływ statycznej siły osiowej S . Na rys. 7 i 8 przedstawiono krzywe szkieletowe belek poddanych działaniu statycznej siły osiowej S . Parametr $s = S/S_{kr}$ określa stosunek siły osiowej do pierwszej siły krytycznej wyznaczonej według teorii



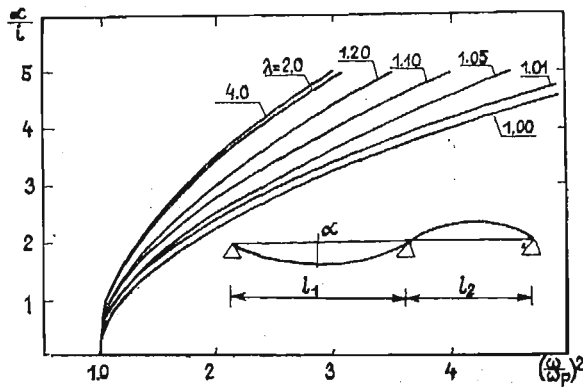
Rys. 7. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej poddanej działaniu siły osiowej



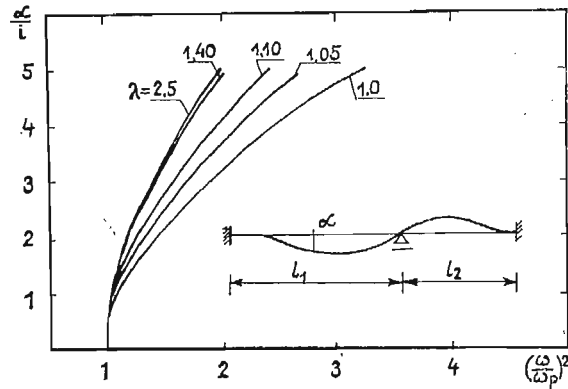
Rys. 8. Krzywe szkieletowe belki utwardzonej poddanej działaniu siły osiowej

Eulera. Osiowe siły rozciągające zmniejszają efekty geometrycznej nieliniowości w odróżnieniu od sił ściskających, które mogą w bardzo znacznym stopniu je zwiększyć.

4.4. Przykład 4 — wpływ różnic w rozpiętości przęseł. Analizowano belkę dwuprzęsłową o stałej długości równej $2L$, i różnych proporcjach długości przęseł $\lambda = l_1/l_2$. Wyniki



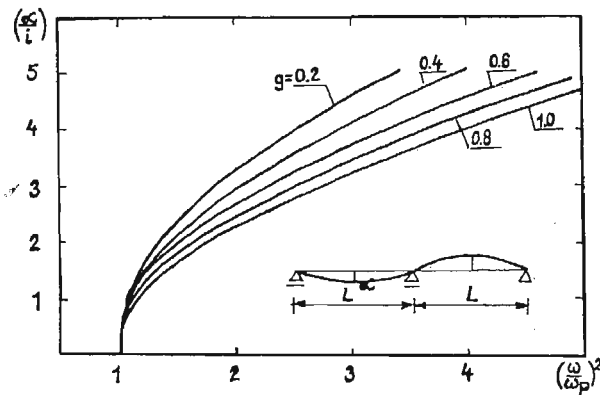
Rys. 9. Wpływ różnic w rozpiętości przęseł belki swobodnie podpartej na podstawową częstość drgań własnych



Rys. 10. Wpływ różnic w rozpiętości przęseł belki utwierdzonej na podstawową częstość drgań własnych

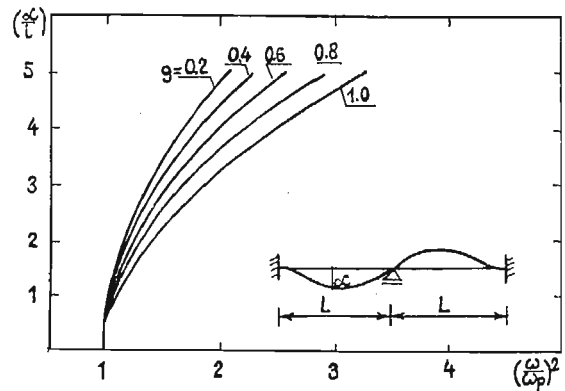
obliczeń przedstawiono na rys. 9 i 10. Występuje wyraźna redukcja efektów geometrycznej nieliniowości, w tym także dla przęseł o małych różnicach rozpiętości. Przykładowo dla belki przegubowej dla której $\lambda = 1,10$ i $\alpha/i = 5,0$ efekty nieliniowe są w przybliżeniu o połowę mniejsze niż dla belki o równych rozpiętościach przęseł ($\lambda = 1,0$).

4.5. Przykład 5 — wpływ różnic w szerokości przekroju belki. W przykładach 5 i 6 założono, że belka ma prostokątny przekrój poprzeczny o wymiarach b i h , różny w każdym przęśle.



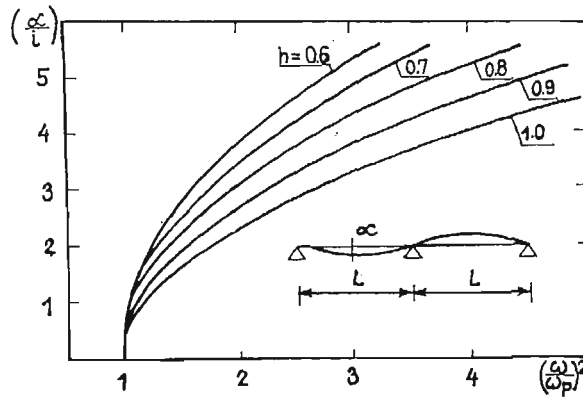
Rys. 11. Krzywe szkieletowe belki swobodnie podpartej w zależności od szerokości przekroju poprzecznego

Rys. 12. Krzywe szkieletowe belki utwierdzonej w zależności od szerokości przekroju poprzecznego

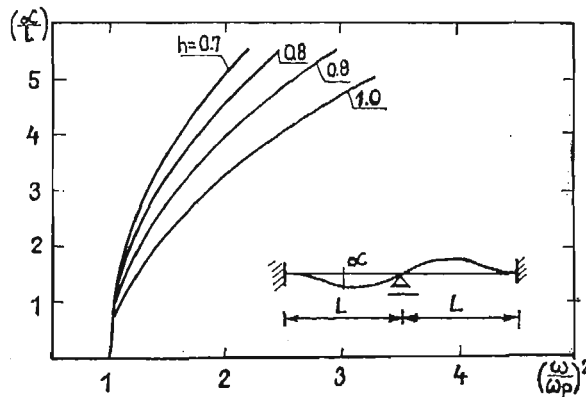


W omawianym przykładzie zmianie ulegają proporcje między szerokościami przekroju b_1/b_2 , polami przekroji A_1/A_2 i momentami bezwładności I_1/I_2 podczas gdy promienie bezwładności pozostają takie same $i_1 = i_2 = i$. Wyniki obliczeń dla różnych stosunków $g = b_1/b_2 = A_1/A_2 = I_1/I_2$ zaprezentowano na rys. 11 i 12. Dla obu sposobów podparcia wpływ nieliniowości zmniejsza się jeżeli belka ma w każdym przęśle inną szerokość.

4.6. Przykład 6 — wpływ różnic w wysokości przekroju belki. Jeżeli w każdym przęśle wysokość przekroju poprzecznego jest inna i wynosi odpowiednio h_1 i h_2 , to $A_1/A_2 = h_1/h_2$, $i_1/i_2 = h_1/h_2$, $I_1/I_2 = (h_1/h_2)^2$. Na rys. 13 i 14 pokazano krzywe szkieletowe wyznaczone



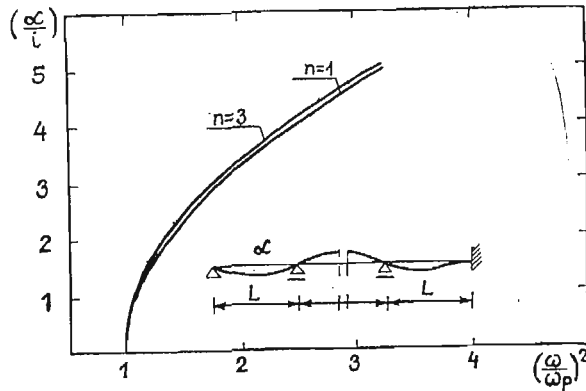
Rys. 13. Wpływ wysokości przekroju belki przegubowo podpartej na częstości drgań własnych



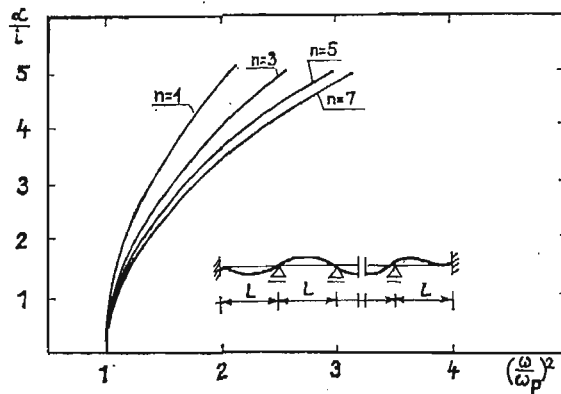
Rys. 14. Wpływ wysokości przekroju belki utwierdzonej na częstości drgań własnych

dla belek charakteryzujących się różnymi stosunkami $h = h_1/h_2$. Jako porównawczy przyjęto promień bezwładności i_1 . Również w tym przypadku obserwuje się zmniejszenie efektów nieliniowych w belkach o zróżnicowanych wysokościach przekrojów poprzecznych.

4.7. Przykład 7 — wpływ liczby przęseł. Dla belki przegubowo podpartej krzywa szkieletowa podstawowej częstości drgań nie zależy od liczby przęseł i jest opisana równaniem (4.1), co w pełni potwierdziły obliczenia numeryczne. Również krzywa szkieletowa belki



Rys. 15. Wpływ liczby przęseł na częstotliwość drgań własnych dla belki jednostronnie utwierdzonej



Rys. 16. Wpływ liczby przęseł na częstotliwości drgań własnych belki obustronnie utwierdzonej

utwierdzonej na jednym końcu w bardzo małym stopniu zależy od liczby przęseł. Na rys. 15 pokazano przykładowe krzywe szkieletowe dla belki jedno i trójprzęsłowej. Parametr α oznacza tutaj amplitudę drgań punktu położonego w środku rozpiętości pierwszego przęsła. Przeprowadzono również obliczenia dla belki utwierdzonej na obu końcach a wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 16. Zauważmy, że występuje wzrost efektów nieliniowych wraz ze wzrostem liczby przęseł n . Dla belek o nieparzystej liczbie przęseł α oznacza amplitudę drgań punktu leżącego na osi symetrii belki.

5. Uwagi końcowe

W pracy podano wariacyjne sformułowanie problemu nieliniowych drgań własnych belek ciągłych. Podano efektywną metodę wyznaczania nieliniowych częstotliwości i postaci drgań, wyprowadzono dynamiczne macierze mas i sztywności elementu belkowego. Opisany proces iteracyjny jest szybkozbieżny, a wprowadzenie dynamicznej wersji metody elementów skończonych wydatnie zmniejsza wymiar zadania.

Przeprowadzono analizy wpływu różnych parametrów belek na nieliniowe częstotliwości drgań własnych. Z analiz tych wynika, że nieregularności w budowie belki zmniejszają efekty geometrycznej nieliniowości. Podobny efekt wywołuje działanie statycznych sił rozciągających oraz zwiększanie podatności skrajnych podpór na przemieszczenia poziome. Z kolei działanie ściskających sił osiowych oraz zwiększanie liczby przęseł w belce obustronnie utwierdzonej zwiększa wpływ nieliniowości na częstotliwości drgań własnych. We wszystkich jednak przypadkach częstotliwości drgań rosną wraz ze wzrostem amplitudy drgań. Analizując inne, bardziej złożone przypadki można się spodziewać, że w zależności od doboru parametrów belki będziemy mieli do czynienia z układami wykazującymi w różnym stopniu efekty nieliniowe.

Literatura

1. S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *The effect of an axial force on the vibration of hinged bars*, J. Applied Mech., t. 17, 1950, pp. 35 - 36.
2. A. V. SRINIVASAM, *Large amplitude free oscillations of beams and plates*, AIAA J., t. 3, 1969, pp. 1951 - 1953.
3. I. S. RAJU, G. VENKATESWARA RAO, K. KANAKA RAJU, *Effect of longitudinal or inplane deformation and inertia on the large amplitude flexural vibrations of slender beams and thin plates*, J. of Sound and Vibration, 49, 1976, pp. 415 - 422.
4. D. A. EVENSEN, *Non-linear vibrations of beams with various boundary conditions*, AIAA J., 6, 1968, pp. 370 - 372.
5. J. A. BENNETT, J. G. EISLEY, *A multiple degree-of-freedom approach to nonlinear beam vibrations* AIAA J., 8, 1970, pp. 734 - 739.
6. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *„Non-linear normal modes” and the generalized Ritz method in the problems of vibrations of non-linear elastic continuous systems*, Int. J. Non-Linear Mech., 18, 1983, pp. 149 - 165.
7. R. LEWANDOWSKI, *Application of the Ritz method to the analysis of non-linear free vibrations of beams*, J. of Sound and Vibration, 1987, t. 114, pp. 91 - 101.
8. C. MEI, *Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibration of beams and plates*, Comp. Struct., 3, 1973, pp. 163 - 174.
9. G. R. BHASHYAM, G. PRATHAP, *Galerkin finite element method for nonlinear beam vibrations*, J. of Sound and Vibration, 72, 1980, pp. 191 - 203.
10. B. S. SARMA, T. K. VARADAN, *Lagrange-type formulation for finite element analysis of non-linear beam vibrations*, J. of Sound and Vibration, 86, 1983, pp. 61 - 70.
11. G. V. RAO, K. K. RAJU, *Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of beams and orthotropic plates*, Compt. Struct., 6, 1976, pp. 169 - 172.
12. G. PRATHAP, *Nonlinear vibration of beams with variable axial restraint*, AIAA J., 16, 1978, pp. 622 - 624.
13. B. S. SARMA, T. K. VARDAN, *Ritz finite element approach to nonlinear vibration of beams*, Int. J. for Numer. Meth. in Engng, 20, 1984, pp. 353 - 357.
14. C. MEI, K. DECHA-UMPHAI, *A finite element method for non-linear forced vibrations of beams*, J. of Sound and Vibration, 102, 1985, pp. 369 - 380.
15. N. W. McLACHLAN, *Równania różniczkowe zwyczajne, nieliniowe w fizyce i w naukach technicznych*. PWN, Warszawa, 1964.
16. L. C. WELLFORD, G. M. DIB, *Post-buckling behaviour of structures using a finite element-nonlinear eigenvalue technique*, Int. J. Numer. Meth. Engng, 15, 1980, pp. 955 - 980.
17. R. LEWANDOWSKI, *Przegląd komputerowych metod rozwiązywania nieliniowych problemów własnych*, IV Konf. Nauk. Wydz. Bud. Łąd. Polit. Poznańskiej, t. 2, 1985, str. 175 - 182.

18. A. RUHE, *Algorithms for the nonlinear eigenvalue problem*, SIAM J. Numer. Anal., 10, 1973, pp. 674 - 689.
19. R. LEWANDOWSKI, *The application of the vector iteration methods to the solution of nonlinear eigenproblems*. Proc. Fifth National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, 23 - 29 September, Varna, Bulgaria, 1985, vol. 2, pp. 42 - 47,
20. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT, Warszawa, 1974.

Р е з ю м е

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

В настоящей работе представлено численные решение для нелинейных, собственных колебаний многопролетных балок, которых концы упруго оперты в горизонтальном направлении. Балки считаются непрерывными системами, кроме того в работе пренебрегаем горизонтальными силами инерции. Применено вариационный подход, метод конечных элементов, а также одну итерационную процедуру для определения нелинейных частот и форм колебаний. Приведены примеры расчётов.

S u m m a r y

THE ANALYSIS OF NON-LINEAR FREE VIBRATIONS OF MULTISPAN BEAMS

The paper presents a numerical solution for geometrically non-linear free vibrations of continuous beams with elastically supported ends in the horizontal direction. The horizontal and rotary inertia forces can be neglected and the beams are considered as the systems with distributed mass. The variational approach, finite element method, and the iterative procedure are used for determining the frequencies and non-linear modes of vibrations. Some numerical results are given.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 marca 1987 roku.
