

PODSTAWY MECHANIKI NEWTONA W ŚWIELE ROZWOJU MATEMATYKI

WIESŁAW NAGÓRKO

Uniwersytet Warszawski

1. Wstęp

Pojęcie *mechaniki Newtona* lub równoważne mu pojęcie *mechaniki Galileusza* — *Newtona* ma już ustalone znaczenie w nauce i nie będziemy się tutaj zajmować jego definiowaniem. W tym opracowaniu¹⁾ zajmiemy się strukturami matematycznymi mechaniki newtonowskiej (klasycznej). Opiszemy strukturę matematyczną występującą zarówno w pierwszym jej sformułowaniu w „*Philosophiae naturalis principia mathematica*”, [7] jak i we współczesnych wykładach jej podstaw. Przeprowadzimy analizę zmian tych struktur związanych z rozwojem matematyki oraz podamy konstrukcję struktury opartej o niestandardowe zbiory liczb rozważane czy to na gruncie alternatywnej teorii mnogości [10] czy to analizy niestandardowej [8].

2. Struktury relacyjne

Przez strukturę matematyczną albo relacyjną będziemy rozumieć system relacyjny zbudowany na pewnej przestrzeni zwanej przestrzenią bazową [1]. Przestrzeń bazowa składa się z elementów indywiduowych, o których zakłada się, że są elementami pierwotnymi. Wszystkie inne obiekty systemu relacyjnego są utworzone z tych elementów. I tak niech $\mathcal{A}$ będzie ustaloną klasą przestrzeni taką że przestrzeń bazowa należy do tej klasy, ponadto jeżeli $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ są przestrzeniami z $\mathcal{A}$ to iloczyn kartezjański tych przestrzeni branych odpowiednio k_i krotnie $k_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ też jest przestrzenią klasy $\mathcal{A}$. Niech ponadto $\mathcal{A}$ jest najmniejszą klasą spełniającą te warunki. Systemem relacyjnym będziemy wtedy nazywać dowolny układ podzbiorów z klasy $\mathcal{A}$. Podzbiory te nazywa się relacjami.

Przykładem struktury relacyjnej może być struktura występująca przy badaniu ruchu.

¹⁾ Niniejszy wykład przygotowano na sesję naukową zorganizowaną przez PtMTiS z okazji 300-lecia wydania dzieła Newtona „*Philosophiae naturalis principia mathematica*”.

punktu materialnego pod wpływem danych sił a więc badaniu tzw. zagadnień początkowych. W takiej strukturze przyjmujemy za przestrzeń bazową zbiór liczb rzeczywistych R zaś za relacje:

- a) przedział $I = \langle t_0, t \rangle$ liczb rzeczywistych — przedział czasu,
- b) liczbę $m > 0$ — masą punktu materialnego,
- c) odwzorowanie klasy $C^2(I)$, $r: I \rightarrow R^3$ ruch punktu materialnego,
- d) odwzorowanie $f: I \rightarrow R^3$ — siły zewnętrzne działające na punkt będące założeniem funkcji f_1 i f_2 gdzie $f_1: I \rightarrow I \times R^3 \times R^3$ i dla każdego $t \in I$, $t \rightarrow (t, r(t), \dot{r}(t))$ oraz $f_2: \text{ran } f_1 \rightarrow R^3$, wtedy:

$$f(t) \equiv f_2(f_1(t)), \quad (2.1)$$

- e) relację między m , r , f postaci:

$$m\ddot{r}(t) = f(t), \quad t \in I. \quad (2.2)$$

W strukturze opisanej relacjami a) - e) formułuje się problem początkowy postaci: *niech są dane $\langle t_0, t \rangle$, m , $r(t_0)$, $\dot{r}(t)$ i f_2 , znaleźć $r(t)$ takie, by spełnione były związki (2.1), (2.2).* W powyższej strukturze wyróżnioną rolę pełni zbiór liczb rzeczywistych R (wszystkie inne obiekty są z tym zbiorem związane). Nic dziwnego, bowiem opisy świata materialnego to głównie opisy przy pomocy liczb. To, dlaczego wybieramy do takich opisów zbiór liczb rzeczywistych a nie np. wymiernych czyli takich, które uzyskuje się z obserwacji, pomiarów, eksperymentów jest przesądzone konstrukcją analizy matematycznej — teorii granic, rachunku różniczkowego. W strukturze tej obok pojęcia liczby rzeczywistej ważne jest także pojęcie granicy ilorazu różnicowego dające mechaniczne obiekty prędkości i przyspieszenia.

3. Struktura matematyczna „Philosophiae naturalis principia mathematica”

Cofnijmy się teraz wstecz do czasów Newtona. Newton formułując „Podstawy matematyczne filozofii przyrody” oparł się na zastanej wiedzy o liczbach, która nie była jeszcze ugruntowana. Dobrze poznane były liczby wymierne, obok nich istniały liczby niewymierne, jednakże nie było w tym czasie pełnego rozeznania jaki zbiór tworzą liczby rzeczywiste i jakie są jego własności. Wszystko to wskazuje na to, że Newton nie dostrzegał problemów związanych z samym pojęciem liczby rzeczywistej. Natomiast widział i chciał uporać się z problemami, które w terminologii współczesnej należą do teorii granic. I tymi problemami zajmuje się w pierwszym rozdziale [7]: „De methodo rationum primorum et ultimum” (o metodzie stosunków pierwszych i ostatnich).

Na temat jak rozumiał Newton pojęcie granicy nie ma zgody wśród badaczy jego pism. Wydaje się, że można przyjąć w tym względzie stanowisko Kołmogorowa [3], s. 30: „Pojęcie granicy (jak również pojęcie prędkości) jest u Newtona jednym z pojęć wyjściowych nie podlegających bezpośredniej definicji ze względu na ich pierwotny charakter i intuicyjną zrozumiałość”. Uzasadnijmy to stanowisko analizując pierwszy z 11 lematów zamieszczonych we wspomnianym rozdziale, który brzmi: „Ilości, a także stosunki ilości, które w przeciągu skończonego okresu czasu stale dążą do równości i przed końcem tego okresu czasu zbliżają się do siebie bardziej niż o dowolną z góry daną różnicę stają się w końcu równe”.

7], s. 25. Powyższy lemat przypomina definicję granicy. „Ilości” lub „stosunki ilości” są tutaj wielkościami zależnymi od czasu, a więc zmiennymi, charakteryzują się tym, że „dążą do równości” tzn. zbliżają się do siebie tak, że ich różnice zawsze od pewnej chwili „przed końcem okresu czasu” są mniejsze od dowolnej „z góry danej” liczby. Jednakże Newton warunków zawartych w lemacie nie traktuje jak warunki definicyjne dla granicy i przeprowadza następujący dowód lematu. „Jeżeli to negujesz przypuśćmy, że staną się w końcu nierówne i niech ich różnica ostatnia równa się D . A więc nie mogą dojść do równości bliżej niż o tę daną różnicę D , co przeczy założeniu”. Z zacytowanego lematu jak i dowodu widać, że granica — „równość w końcu ilości” — jest tutaj pojęciem wcześniejszym, które uważa się za zrozumiałe. Podobnie w innym miejscu, rozważając „stosunki ilości znikających” tzw. fluksji czyli stosunki wielkości nieskończenie małych, Newton pisze: „ostatnie stosunki ilości znikających nie są stosunkami ostatnich ilości, lecz są to granice (limites), do których zbliżają się stosunki ilości nieograniczenie malejących i do których te stosunki mogą podejść bliżej niż o dowolną z góry daną różnicę, lecz których przekroczyć ani osiągnąć stosunki te nigdy nie mogą wcześniej niż same ilości zmniejszając się nieskończenie”. [7], s. 34. Newton rozumiał proces przejścia do granicy, jako proces zakończony utożsamieniem wielkości zmiennej z jej granicą. Różnica między zmienną a jej granicą nazywał znikającą. Częścią składową przejścia granicznego była wielkość nieskończenie mała, którą traktował jak liczbę. To rozumienie nieskończenie małej przejął od J. Wallisa, którego prace jak sam zaznacza w jednym z listów dokładnie przestudiował. W ujęciu Wallisa [11] wielkość nieskończenie mała to ostatnia wartość wielkości zmiennej dążącej do zera. Czasem wielkość tę utożsamiał z zerem. Obok tej liczby rozważał „ostatnią wielkość zmiennej $1/0$ ”, którą także uważał za liczbę i wprowadził dla niej, stosowane do dzisiaj oznaczenie ∞ , [11], t. I, s. 297. Liczby 0 , ∞ trzeba było wkomponować do znanego wówczas systemu liczbowego ustalając prawa działania na nich. I tak przyjmował $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Stwierdził że $\infty \cdot 0$ nie jest określone jednoznacznie gdyż może odegrać rolę „liczby dowolnej”, [11], t. I, s. 462. Wallis jednak nie rozpatrywał czym mogą być stosunki nieskończenie małych a więc w jego oznaczeniach wyrażenie $0/0$. Analizą takich stosunków jako pierwszy zajął się właśnie Newton. Ustalając matematyczny sens stosunków nieskończenie małych Newton otrzymał obiekty matematyczne przy pomocy których mógł interpretować fizyczne pojęcie prędkości i przyspieszenia oraz mógł sformułować związek między ruchem a siłą:

$$\begin{aligned} & \text{„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici} \\ & \text{impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis} \\ & \text{illa imprimitur”} \end{aligned} \quad (3.1)$$

— zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona. Jest to treść związku (2.2) pomiędzy siłą, masą i przyspieszeniem — „zmianą ruchu”. Tak więc struktura matematyczna u Newtona jest strukturą opartą o intuicyjny zbiór liczb rzeczywistych, z relacją (3.1), w której pojęcie przyspieszenia „zmiany ruchu” jest granicą stosunków nieskończenie małych zaś granica jest rozumiana jako pojęcie pierwotne.

Po Newtonie dzięki wprowadzeniu formalizmu epsilonowo-deltowego matematyka dysponowała precyzyjnymi już pojęciami granicy i pochodnej. Nieskończenie małe zostały

wyparte na długi okres. W wyniku tego struktury matematyczne w mechanice punktu materialnego są strukturami relacyjnymi opisanymi wcześniej w p. 2. Ogólniejszą strukturę opisującą podstawy mechaniki Newtona można znaleźć w [12]. XIX wiek i przede wszystkim prace Dedekinda sformalizowały także pojęcie liczby rzeczywistej i chociaż „*rozwój nauk przyrodniczych w znacznym stopniu zależy od poznania takich czy innych wielkości wymiernych*”, [1], s. 15, to jednak we wszystkich klasycznych sformułowaniach mechaniki Newtona przestrzenią bazową jest przestrzeń liczb rzeczywistych a więc także niewymiernych.

4. Struktury niestandardowe

Powrót nieskończenie małych do matematyki nastąpił w ostatnim dwudziestolecu przez konstrukcję tzw. analizy niestandardowej [8]. Jest to ten nurt badań w matematyce, w którym sprawdza się co matematyka utraciła odrzucając w wyniku fascynacji formalizmem epsilonowo-deltowym takie pojęcia jak monada, nieskończenie mała itd. Jest to ten nurt, który w zgodzie z wymaganiami formalnej poprawności rozszerza przestrzeń liczb o te, które różnią się „nieskończenie małą”.

Przedstawimy teraz podstawowe fakty z tej teorii.

Niech M będzie pewną zupełną strukturą relacyjną, opisaną językiem formalnym L , w której przestrzenią bazową jest R . Niech dalej K będzie zbiorem zdań języka L prawdziwych w M czyli M będzie modelem zbioru zdań K . Jeżeli inna struktura $*M$ opisana jest także językiem L i każde zdanie prawdziwe w M jest prawdziwe w $*M$ to system relacyjny $*M$ nazwiemy niestandardowym modelem zbioru zdań K . Relacje systemu $*M$ oznaczone tymi samymi stałymi języka L co relacje w M nazywa się standardowymi. Istotne jest czy w systemie $*M$ znajdują się jeszcze inne relacje niż standardowe. Aby na to pytanie odpowiedzieć okreśmy relację współbieżną w M . Relacja dwuargumentowa $\varrho \subset R^2$ jest współbieżna, gdy dla każdego skończonego ciągu elementów $a_1, a_2, \dots, a_m \in \text{dom } \varrho$ istnieje element $b \in \text{ran } \varrho$ taki, że $(a_1, b) \in \varrho$, $(a_2, b) \in \varrho$, $\dots$, $(a_m, b) \in \varrho$. Każdej relacji współbieżnej odpowiada relacja standardowa $*\varrho \subset *R^2$, oznaczona w języku L tą samą stałą. W analizie niestandardowej wykazuje się, że następujące twierdzenie jest prawdziwe [8]: Istnieje element $c \in \text{ran } \varrho$ spełniający dla każdego $a \in \text{dom } \varrho$ warunek $(a, c) \in \varrho$.

Relacją współbieżną w R jest relacja „*mniejszy niż*”. Z przytoczonego twierdzenia wynika, że istnieje liczba a należąca do przestrzeni bazowej $*R$ struktury $*M$ taka, że $r < a$ dla każdego $r \in R$. A więc istnieje liczba większa od wszystkich standardowych liczb rzeczywistych, tzw. liczba nieskończona. W zbiorze liczb $*R$ określone są wszystkie relacje, które określone są w R , więc w $*R$ liczby można dodawać, mnożyć, dzielić otrzymując elementy zbioru $*R$. Stąd dla liczby nieskończonej a istnieje jej odwrotność $1/a$ zwana infinitesimalną. Wykazuje się, że liczb nieskończenie wielkich jest nieskończenie wiele, a więc zbiór wszystkich infinitesimalnych nie jest skończony. Oznaczmy go przez $\text{Mon}(0) \subset *R$, (monada 0).

Podstawowe obiekty i relacje mechaniki Newtona można zinterpretować w systemie relacyjnym $*M$ w podobny sposób jak to miało miejsce w systemie opartym o zbiór liczb rzeczywistych R .

Niech rozważanym obiektem materialnym będzie teraz skończony zbiór punktów materialnych tzn. taki, że istnieje $n \in {}^*N$ i wszystkie rozważane punkty i tylko te, należą do zbioru $B = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Niech $I \subset {}^*R$ będzie przedziałem czasu zaś odwzorowanie $m: B \rightarrow {}^*R^+$ rozkładem masy. Ruchem ciała B w przedziale czasu I będzie odwzorowanie spełniające znane warunki regularności $r^k: B \times I \rightarrow {}^*R^3$. Funkcje r^k mogą przyjmować wartości niestandardowe ale powinny być wewnętrzne [8]. Podobnie określimy siły jako odwzorowania $f^k: B \times I \rightarrow {}^*R^3$ przy czym:

$$f^k(P, t) \equiv \hat{f}^k(t, r(P, t), \dot{r}(P, t)) + \sum_{Q \in B \setminus \{P\}} \check{f}(d(r(P, t), r(Q, t)) \frac{r^k(P, t) - r^k(Q, t)}{d(r(P, t), r(Q, t))}. \quad (4.1)$$

gdzie $\hat{f}^k, \check{f}$ są znanymi dostatecznie regularnymi, funkcjami wewnętrznymi opisującymi odpowiednio siły zewnętrzne działające na punkt P w chwili t oraz oddziaływania punktu Q na punkt P , zaś d jest odległością punktów P i Q w chwili t .

Drugie prawo dynamiki Newtona będzie mieć analogiczną postać jak (2.2), (3.1):

$$m(P)\ddot{r}^k(P, t) = f^k(P, t). \quad (4.2)$$

Teraz jednak występujące w nim funkcje mogą przyjmować wartości niestandardowe np. nieskończone. Liczba punktów materialnych n może być liczbą nieskończoną $n \in {}^*N \setminus N$. W szczególnym przypadku, gdy wszystkie funkcje są standardowe powyższe sformułowanie mechaniki Newtona opisuje te same problemy co równania (2.1), (2.2). Aparat analizy niestandardowej nie wnosi wtedy nowych treści do mechaniki. Sytuacja ta się zmienia gdy przynajmniej jedna funkcja w (4.1), (4.2) jest niestandardowa np. gdy $n \in {}^*N \setminus N$. Wykazuje się wtedy, że z niestandardowych relacji (4.1), (4.2) można otrzymać standardowe relacje mechaniki kontinuum, tym samym zinterpretować znane pojęcia tej mechaniki (gęstość masy, gęstość sił brzegowych i objętościowych, tensor naprężenia) wyłącznie przy użyciu pojęć mechaniki Newtona punktów materialnych, [13].

5. Alternatywna teoria mnogości w mechanice punktu materialnego

Po ustabilizowaniu się analizy niestandardowej pojawiły się konstrukcje alternatywne: alternatywna teoria mnogości [10], Ω — rachunek [4], itd. Ten nurt badań jest motywowany wnioskami biorącymi się z obserwacji świata takimi jak: opis świata niekoniecznie musi być ciągły, wątpliwe czy istnieją zbiory nieskończone obiektów rzeczywistych, przejście graniczne nie jest weryfikowalne itd.

Jeżeli przez teorię mnogości będziemy rozumieć naukę o zbiorach to alternatywna teoria mnogości (AST) jest jej częścią. Do takiej teorii mnogości należą różne działy np. system aksjomatyczny teorii mnogości Zermeli. W przeciwieństwie jednak do systemu Zermeli AST nie jest systemem zamkniętym (zaksjomatyzowane są pewne fragmenty, dopuszcza się zmianę aksjomatów). Niektóre aksjomaty systemu Zermeli są kwestionowane w AST. Istnieje jednak część wspólna tych teorii a mianowicie teoria klas. Klasy w sensie Kelley'a, Morsa [2], [5] są także klasami w sensie AST. Wszystkie zbiory w AST są klasami ale nie na odwrót, np. klasa wszystkich zbiorów — klasa uniwersalna V nie jest

zbiorem. To, że obiekt X jest zbiorem zapisujemy jako $\text{Set}X$. Semizbiory są podklasami zbiorów. Piszemy wtedy $\text{Sms}X$ dla oznaczenia, że „ X jest semizbiorem”. Tak więc:

$$\text{Sms}(X) \equiv \exists \text{Set}(Y)[X \subset \text{Set}(Y)].$$

Każdy zbiór jest semizbiorem. Semizbiorem właściwym nazywamy semizbiór, który nie jest zbiorem. Ważnym aksjomatem AST jest aksjomat istnienia właściwych semizbiorów:

$$(\exists X)[\text{Sms}(X) \wedge \sim \text{Set}(X)].$$

Klasa jest skończona (zapis $\text{Fin}(X)$) wtedy i tylko wtedy gdy każda podklasa X jest zbiorem. Klasy, które nie są skończone są nieskończone.

Zbiór x jest liczbą naturalną jeżeli spełnia warunki: 1) każdy element x jest podzbiorem x tzn. $(\forall y \in x)[y \subset x]$, 2) relacja spełnia na x warunek trychotomii $(\forall y, z \in x)[y \in z \vee y = z \vee z \in y]$. Klasę liczb naturalnych oznaczmy przez N . Przez FN oznaczmy klasę skończonych liczb naturalnych tj. $FN \equiv \{x; \text{Fin}(x)\}$. W AST dowodzi się, że $N \setminus FN = \emptyset$.

Zauważmy, że zbiory: pusty $\emptyset$, jednoelementowy $\{\emptyset\}$, dwuelementowy $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ itd. są liczbami naturalnymi. Możemy więc zidentyfikować klasyczne liczby naturalne z tymi zbiorami przyporządkowując $0 \rightarrow \emptyset$, $1 \rightarrow \{\emptyset\}$, $2 \rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ itd. W AST mamy więc do czynienia z klasą liczb zawierającą klasyczne liczby naturalne. W AST dowodzi się, że dla każdego zbioru x istnieje dokładnie jedna liczba naturalna $\alpha \in N$ taka, że zbiory x i α są równoliczne. Jak widać z tego twierdzenia wszystkie zbiory w AST są skończone. AST traktuje nieskończoność jako fenomen wynikający z obserwacji dużych, niepoliczalnych technicznie zbiorów. Mając liczby naturalne możemy zdefiniować klasę liczb całkowitych:

$$C \equiv N \cup \{ \langle 0, \alpha \rangle, \alpha \neq 0, \alpha \in N \},$$

gdzie $\langle 0, \alpha \rangle$ jest parą uporządkowaną, oraz klasę liczb wymiernych:

$$RN \equiv \left\{ \frac{x}{y}, x, y \in C, y \neq 0 \right\}.$$

W RN określa się także pewną relację równoważności $\doteq$ tzw. relację nierozróżnialności $x, y \in RN$, $x \doteq y \Leftrightarrow \left(|x - y| < \frac{1}{n} \vee n < x, n < y \vee x < -n, y < -n, n \in FN \right)$.

Relację nierozróżnialności można określić w dowolnej klasie przy pomocy ciągu tolerancji tj. relacji zwrotnych i symetrycznych $R_n \subset V \times V$, $n \in FN$ takich, że $R_{n+1} \subset R_n$, $n \in FN$, $R_0 = V^2$, $\text{id} \neq \bigcap \{R_n, n \in FN\}$. Tolerancje wyznaczają aproksymacje $Ap_n(v) = \{v', \langle v, v' \rangle \in R_n\}$ zaś relacja nierozróżnialności monadę $\text{Mon}(v) = \{v', v \doteq v'\}$.

AST pozwala opisać przedział między tym co rozróżnialne i tym co nierozróżnialne. Miejsce tego podziału nie jest ustalone raz na zawsze (można stosować różne skale bliskości). Obserwowany świat w takim opisie składa się ze świata makro, kolejnych coraz dokładniejszych przybliżeń rzeczywistości danych tolerancyjnie, ze świata mikro, świata monad, który jest nierozróżnialny od świata makro, ale który można także opisywać i analizować „wchodząc” w monadę.

Przedstawimy teraz strukturę relacyjną mechaniki punktu materialnego opartą o prze-

strzeń bazową liczb wymiernych RN skonstruowanych w ramach AST, [6]. Pojęciami pierwotnymi w tej strukturze będą:

a) masa — liczba $m \in (RN)_+$,

b) ruch — odwzorowanie $r: RN \rightarrow (RN)^3$,

c) impuls siły $F([t_1, t_2])$ — odwzorowanie określone dla dowolnego, niepustego przedziału $[t_1, t_2] \subset RN$ o wartościach w $(RN)^3$. Niech teraz v będzie daną nieskończoną liczbą naturalną $v \in N \setminus FN$ i niech $\varepsilon = v^{-1}$. Określmy zbiór chwil $I_\varepsilon \equiv \{t \in RN, t = \pm \varepsilon n, n \in N\}$. Oznacza to, że zarówno ruch jak i impuls sił będą obiektami danymi tylko w tych chwilach, które są z dyskretnego zbioru I_ε . Tak więc, dla każdego $t_1, t_2 \in RN$ jeżeli $[t_1, t_2] \cap I_\varepsilon = \emptyset$ to $F([t_1, t_2]) = 0$, jeżeli zaś $[t_1, t_2] \cap I_\varepsilon = \{t\}$ to $F([t_1, t_2]) = F(\{t\})$. Sformułowane wyżej założenie jest ilustracją tezy podanej przez B. Russella we „Wstępie do filozofii matematyki”: „świat, w którym wszelki ruch składałby się z ciągu małych skończonych drgnień byłby empirycznie nierozróżnialny od świata, w którym ruch byłby ciągły” [9], s. 140.

Dla ruchu r określonego w zbiorze chwil I_ε definiujemy prędkość (prawostronną i lewostronną):

$$v^+(t) \equiv \frac{r(t+\varepsilon)-r(t)}{\varepsilon}, \quad v^-(t) = \frac{r(t)-r(t-\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad t \in I_\varepsilon,$$

oraz przyspieszenie:

$$a(t) = \frac{v^+(t)-v^-(t)}{\varepsilon}.$$

Oznaczając $f(t) \equiv F(\{t\})/\varepsilon$ relacja łącząca siły i ruch będzie mieć klasyczną postać:

$$ma(t) = f(t), \quad t \in I_\varepsilon, \quad (5.1)$$

jednakże obiekty występujące w tej relacji nie są klasyczne.

Zauważmy, że tak określone prędkość i przyspieszenie (bez przejścia granicznego i w dyskretnym zbiorze chwil) zawsze istnieją i nie są wielkościami przybliżonymi. Jeżeli jednak zażądamy by wartości v i a były zawarte w BRN (liczb wymiernych ograniczonych) wtedy może się zdarzyć, że v i a nie istnieją. Zawężenie zbiorów wartości v i a do podzbiorów BRN jest więc ograniczeniem na r . Ograniczenie to nie wystarczy by mieć ruch regularny odpowiadający ruchowi klasycznemu klasy C^2 .

Założmy więc ponadto, że ruch r jest mikroregularny tzn. dla każdego $t \in I_\varepsilon \cap BRN$, $r(t), v(t), a(t) \in (BRN)^3$. W tym przypadku dla dowolnych $t_1, t_2 \in I_\varepsilon \cap BRN$ takich, że $t_1 \div t_2$ mamy $r(t_1) \div r(t_2)$, $v(t_1) \div v(t_2)$ i $a(t_1) \div a(t_2)$. Taki właśnie ruch nazwiemy regularnym. Odpowiada on odwzorowaniu klasy C^2 a więc ruchowi klasycznemu. Przedstawiona konstrukcja pokazuje, że możliwe jest opisanie fizycznego pojęcia ruchu, siły i praw Newtona bez posługiwania się przejściem granicznym. Możliwe jest także określenie pewnych warunków regularności odpowiadających ciągłości i gładkości w analizie klasycznej.

6. Uwagi końcowe

Rozważane w pracy struktury relacyjne opisują te same treści fizyczne: *obiekty materialne posiadające masę, poddane działaniu sił*, w wyniku tego działania obserwujemy

ruch obiektu, jego *prędkość*, obliczamy *przyspieszenie*. Wszystko to odniesione jest do *miejsca* i *chwili* w przestrzeni. Struktury te są jednak istotnie różne.

Przestrzeń modelowana jest w tych strukturach przy pomocy zbiorów liczb. Najpierw u Newtona intuicyjnym zbiorem liczb wymiernych i niewymiernych, potem przestrzenią liczb rzeczywistych określonych aksjomatycznie, na końcu zbiorami nieklasycznymi: rozszerzoną przestrzenią liczb rzeczywistych skonstruowaną w ramach analizy niestandardowej oraz nieklasyczną przestrzenią liczb wymiernych skonstruowanych w ramach alternatywnej teorii mnogości, których jest dostatecznie „dużo” by można było zrezygnować z posługiwania się liczbami niewymiernymi.

W wyniku tych zmian przestrzeni liczbowych a więc przestrzeni bazowych w strukturach, przeobrażają się także obiekty modelujące *masę*, *ruch* i *siły*.

Pojęcie *prędkości* i *przyspieszenia* związane jest najpierw z intuicyjnym rozumieniem przejścia granicznego w ilorazie różnicowym, następnie modelowane jest pojęciem pochodnej względem czasu klasycznej i niestandardowej by na końcu w ramach alternatywnej teorii mnogości odrzucić pojęcie granicy jako nieumotywowane fenomenologicznie i zastąpić je ilorazami różnicowymi określonymi dla nieskończenie małych różnic chwil a więc niejako wrócić do „ostatnich stosunków ilości” różniących się o „wielkość znikającą”.

Zauważmy na koniec, że opisane wyżej zmiany aparatu matematycznego, choć dość znaczne, nie wpłynęły na zmianę jakże trafnego i zdawałoby się prostego odkrycia związku między ruchem ciała a siłami na nie działającymi — *mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam que vis illa imprimitur*. To stwierdzenie we wszystkich tych strukturach pozostaje niezmiennie.

Literatura

1. W. V. QUINE, *Logika matematyczna*, PWN, Warszawa, 1974.
2. J. L. KELLEY, *General topology*, Van Nostrand Co., Princeton 1955.
3. A. H. КОЛМОГОРОВ, *Ньютон современное математическое мышление*, Московский университет памяти И. Ньютона, Москва, 1946.
4. D. LAUGWITZ, Ω -calculus as a generalization of field extension, *An alternative approach to nonstandard analysis*, Lecture Notes in Mathematics, 881.
5. A. MORSE, *A theory of sets*, Academic Press, New York 1965.
6. W. NAGÓRKO, Cz. WOŹNIAK, *Mathematics in the alternative set theory as a tool of Newtonian mechanics*, Arch. Mech., 38.4, 395 - 402.
7. I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Amsterdam 1726, III wydanie.
8. A. ROBINSON, *Non-standard analysis*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1966.
9. B. RUSSELL, *Introduction to mathematical philosophy*, London 1960, pierwsze wydanie 1919.
10. P. VOPEŇKA, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig 1979.
11. J. WALLIS, *Opera mathematica*, Oxoniae 1656.
12. Cz. WOŹNIAK, *Analiza niestandardowa w mechanice Newtonowskiej punktu materialnego*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 19, 1981, 355 - 374.
13. Cz. WOŹNIAK, *Nonstandard analysis in mechanics*, Advances in Mechanics, 1, 9, 1986, 3 - 35.

Р е з ю м е

ОСНОВЫ НЬЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКИ В СВЕТЕ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

В настоящей работе рассматриваются математические структуры Ньютонской механики, начиная с её первой формулировки в „Philosophiae naturalis principia mathematica”, до струк-

тур, которые опираются на нестандартные совокупности чисел рассматриваемых на основе альтернативной теории множеств и нестандартного анализа. Опираясь на эти структуры проводится анализ перемен математических объектов моделирующих движение системы материальных точек.

S u m m a r y

THE BASE OF NEWTON'S MECHANICS IN TERMS OF THE MATHEMATICS DEVELOPMENT

The paper deals with the mathematical structures for classical mechanics of the systems of finite number degrees of freedom, from the formulation in „Philosophiae naturalis principia mathematica”, up to the structure based on the nonstandard analysis and on the alternative set theory.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 października 1987 roku