

## WPLYW BRZEGU NA EFEKTYWNY WSPÓLCZYNNIK PRZEWODZENIA CIEPŁA W PRZEGRODZIE Z PUSTKAMI IZOLACYJNYMI\*

ZENON KOŃCZAK

*Politechnika Poznańska*

### 1. Wprowadzenie

Problemy związane z wymianą ciepła mają istotne znaczenie z technologicznego punktu widzenia, szczególnie gdy wymiana ciepła musi być zwiększona, jak np. w wymiennikach ciepła, lub też zmniejszona, co można osiągnąć np. przez stosowanie odpowiedniej izolacji. Większość materiałów izolacyjnych może być uważana za mieszaninę odpowiedniego ciała stałego i powietrza. Ich własności izolacyjne wynikają w znacznej mierze z niskiej przewodności cieplnej powietrza, oczywiście przy nieobecności konwekcji i w warunkach suchych. Obszerną charakterystykę materiałów izolacyjnych przedstawiono w [1].

Powszechnie znane materiały izolacyjne posiadają budowę włóknistą (np. wata szklana), porowatą (np. gąbka poliuretanowa) i sypką. Współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  dla takich materiałów, a w szczególności dla materiału piankowego albo porowatego, jest wielkością uwzględniającą sumę wpływów a mianowicie wpływ przewodzenia ciepła przez ciało stałe, przewodzenie ciepła przez gaz wypełniający pory, wpływ promieniowania oraz konwekcji w gazie zawartym w porach [2, 3]. Taki opis przewodności cieplnej jest mylący, gdyż sugeruje że te cztery procesy występują niezależnie od siebie i to równocześnie. W normalnych temperaturach wpływ promieniowania jest na ogół mały i może być pominięty. Wpływ konwekcji w niektórych przypadkach jest również pomijalny. Tak więc dla materiałów z małymi porami, próżniami lub szparami można przyjąć, że przewodność cieplną określa się poprzez przewodność cieplną poszczególnych faz oraz geometrię układu tych faz [2].

Zmniejszenie przewodności cieplnej, obok innych wymagań, jest szczególnie pożądane przy projektowaniu zewnętrznych przegród budowlanych. Przegrody te ze względu na polepszenie własności termoizolacyjnych wykonuje się najczęściej jako wielokanałowe o różnym kształcie kanałów usytuowanych według siatki regularnej. Są to elementy ceramiczne, gazobetonowe, żużlobetonowe i betonowe. Bardzo ważnym zagadnieniem z punktu widzenia przewodności cieplnej takich materiałów jest znajomość efektywnego współczyn-

---

\* Praca wykonana w ramach CPBP 02.21 „Podstawy i mechanizmy racjonalnej gospodarki energetycznej budownictwa mieszkaniowego”.

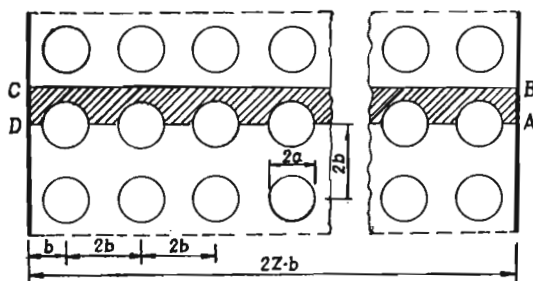
nika przewodzenia ciepła. Można go określić doświadczalnie co jednak należy do czynności bardzo pracochłonných [3].

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie sposobu określania efektywnego współczynnika przewodności cieplnej dla przegród budowlanych posiadających  $Z$  rzędów kanałów usytuowanych równolegle do płaszczyzny przegrody. Przyjmuje się przy tym, że rozważany element znajduje się w ustabilizowanej wilgotności i nie ulega dodatkowemu zawilgoceniu oraz że nie występuje wpływ promieniowania i konwekcji. Dla uproszczenia zakłada się również, iż kanały posiadają przekrój kołowy i rozmieszczone są w sposób regularny według siatki kwadratowej. Podkreślić tutaj trzeba, że stosowana metoda posiada charakter ogólny i może być w łatwy sposób zastosowana dla innych układów regularnych siatki.

Efektywny współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda^*$  określimy rozwiązując problem ustalonego przepływu ciepła w warstwie, której fragment pokazano na rys. 1. Przepływ ten wywołany jest różnicą temperatur na brzegach. Tak więc efektywny współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda^*$  wynika z symulacji myślowego eksperymentu fizycznego przy zadanej strukturze rozważanego obiektu. Taki sposób postępowania dotyczący określenia poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej kompozytu jednokierunkowo zbrojonego cylindrycznymi włóknami został omówiony w pracy [4]. Tam też można znaleźć obszerny przegląd prac dotyczących wyznaczania efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła w kierunku prostopadłym do zbrojenia włóknami. Zauważyć przy tym jednak trzeba, że zarówno w pracy [4] jak i innych np. [5] pominięto wpływ brzegu na efektywny współczynnik przewodzenia ciepła. Rozważano mianowicie tylko jedną powtarzalną komórkę przy milczącym przyjęciu, że taki sam rozkład temperatury występuje we wszystkich pozostałych.

## 2. Sformułowanie problemu. Wyznaczenie efektywnej przewodności ciepła

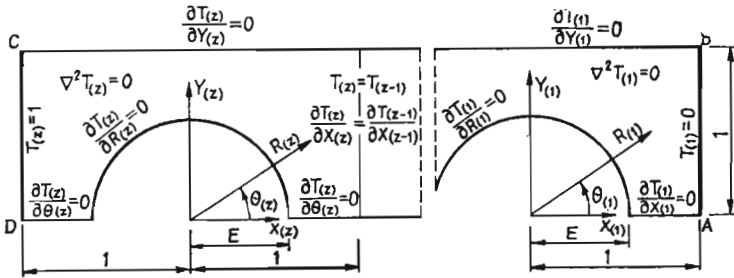
Rozważmy element ścienny charakteryzujący się regularnym układem kanałów podłużnych. Dla uproszczenia przyjmujemy, że kanały te posiadają przekrój kołowy i są rozmieszczone według siatki kwadratowej (rys. 1), przy czym układ geometryczny opisany



Rys. 1. Układ siatki kanałów wraz z wydzielonym elementem powtarzalnym  $ABCD$

jest przez średnicę otworów  $2a$  oraz ich rozstaw osiowy  $2b$ . Stosunek średnicy otworów do ich osiowego rozstawu oznaczymy przez  $E = a/b$ . Niech materiał z którego wykonany jest element będący przedmiotem naszego zainteresowania będzie scharakteryzowany przez współczynnik przewodnictwa ciepła  $\lambda_m$ .

W celu wyznaczenia efektywnego współczynnika przewodnictwa ciepła  $\lambda^*$  rozważymy ustalony przepływ ciepła wywołany różnicą temperatur  $t_1 - t_2$ , ( $t_1 > t_2$ ), przy czym  $t_1$  i  $t_2$  oznaczają odpowiednio temperaturę na lewym i prawym brzegu (rys. 1). Ze względu na regularny układ kanałów wydzielimy powtarzalny element ABCD i zamiast rozważać przepływ ciepła w całym elemencie ściennym ograniczymy się do rozpatrzenia przepływu ciepła w wydzielonym powtarzalnym elemencie. Ten sposób postępowania znacznie upraszcza rozwiązanie zadanego problemu brzegowego. Jak widać z rys. 1 stykające się z sobą elementy powtarzalne posiadają obok powierzchni zewnętrznych AB i CD całego obszaru dodatkowe powierzchnie adiabatyczne AD i BC, które wymagają określenia na nich odpowiednich warunków brzegowych. Na rys. 1 można również łatwo zauważyć, że powtarzalny element ABCD da się złożyć z  $Z$  komórek podobszarów o szerokości  $2b$ . Przy podziale na takie właśnie komórki musimy dodatkowo określić warunki na brzegach dzielących tak pomyślane podobszary. Warunki te sformułujemy zgodnie z twierdzeniem Duhema cytowanym w pracy [6], które głosi iż możliwa jest konstrukcja funkcji harmonicznej w obszarze  $\Omega$  przez „zszycie” dwóch harmonicznych funkcji definiowanych w dwóch sąsiadujących podobszarach obszaru  $\Omega$  pod warunkiem równości wartości tych funkcji oraz ich pochodnych normalnych na brzegu dzielącym podobszary. Wszystkie wymagane warunki brze-



Rys. 2. Podział powtarzalnego elementu ABCD na podobszary oraz sformułowanie problemu brzegowego

we podano na rys. 2. Warunek brzegowy na konturze kanału oznacza iż nie zachodzi wymiana ciepła.

Za punkt wyjścia do dalszych rozważań przyjmiemy równanie Laplace'a opisujące ustalony przepływ ciepła. Równanie to ze względu na kształt podstawowych komórek zapiszemy w biegunowym lokalnym układzie współrzędnych. Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych:

$$R = \frac{r}{b}, \quad X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad T = \frac{t - t_2}{t_1 - t_2}, \tag{1}$$

mamy:

$$\frac{\partial^2 T_{(j)}}{\partial R_{(j)}^2} + \frac{1}{R_{(j)}} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial R_{(j)}} + \frac{1}{R_{(j)}^2} \frac{\partial^2 T_{(j)}}{\partial \theta_{(j)}^2} = 0, \tag{2}$$

gdzie  $j = 1, 2, \dots, Z$  oznacza liczbę podobszarów (komórek) co odpowiada również liczbie rzędów kanałów.

Ogólne rozwiązanie równania (2) ma postać:

$$T_{(j)} = A_0^{(j)} + A_1^{(j)} \ln R_{(j)} + A_2^{(j)} \Theta_{(j)} + A_3^{(j)} \Theta_{(j)} \ln R_{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k^{(j)} R_{(j)}^k + C_k^{(j)} R_{(j)}^{-k}) \cos k \Theta_{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} (D_k^{(j)} R_{(j)}^k + E_k^{(j)} R_{(j)}^{-k}) \sin k \Theta_{(j)}, \quad (3)$$

gdzie  $A_0^{(j)}, A_1^{(j)}, \dots, B_k^{(j)}, \dots, E_k^{(j)}$  są stałymi, które należy wyznaczyć spełniając odpowiednie warunki brzegowe (patrz rys. 2).

I tak warunek:

$$\frac{\partial T_{(j)}}{\partial \Theta_{(j)}} = 0, \quad \text{dla} \quad \Theta_{(j)} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \quad (4)$$

prowadzi do rezultatu:

$$A_2^{(j)} = 0, \quad A_3^{(j)} = 0, \quad D_k^{(j)} = 0, \quad E_k^{(j)} = 0. \quad (5)$$

Z warunku:

$$\frac{\partial T_{(j)}}{\partial R_{(j)}} = 0 \quad \text{dla} \quad R_{(j)} = E, \quad (6)$$

otrzymujemy:

$$A_1^{(j)} = 0, \quad C_k^{(j)} = B_k^{(j)} E^{2k}. \quad (7)$$

Tak więc po uwzględnieniu (5) i (7) rozwiązanie (3) przyjmie postać:

$$T_{(j)} = A_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(j)} \left( R_{(j)}^k + \frac{E^{2k}}{R_{(j)}^k} \right) \cos k \Theta_{(j)}. \quad (8)$$

Rozwiązanie (8) spełnia w sposób ścisły równanie (3) oraz warunki na brzegu  $Y_{(j)} = 0$  dla  $|X_{(j)}| \geq E$  i  $R_{(j)} = E$  (patrz rys. 2).

Dla określenia stałych  $A_0^{(j)}$  i  $B_k^{(j)}$  dysponujemy warunkami zadanymi na pozostałej części konturu powtarzalnego elementu ABCD oraz warunkami ciągłości na brzegach dzielących podobszary. Mamy:

$$T_{(1)} = 0, \quad \text{dla} \quad X_{(1)} = 1, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T_{(l)}}{\partial Y_{(l)}} = 0, \quad \text{dla} \quad Y_{(l)} = 1, \quad l = 1, 2, \dots, Z, \quad (10)$$

$$T_{(Z)} = 1, \quad \text{dla} \quad X_{(Z)} = -1, \quad (11)$$

$$T_j|_{X_{(j)}=-1} = T_{(j+1)}|_{X_{(j+1)}=1}, \quad j = 1, 2, \dots, Z-1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_{(j)}}{\partial X_{(j)}} \Big|_{X_{(j)}=-1} = - \frac{\partial T_{(j+1)}}{\partial X_{(j+1)}} \Big|_{X_{(j+1)}=1}. \quad (13)$$

Jak wykazano w pracy [7] warunki brzegowe (9) - (13) nie mogą być spełnione w sposób ścisły. Stąd też dla osiągnięcia celu zastosujemy jedną z metod przybliżonych, a mianowicie metodę kollokacji brzegowej. Strategia postępowania przy jej stosowaniu została omówiona w pracach [8, 9]. W pracy [9] przedstawiono ponadto opis odmian tej metody jak również przegląd publikacji dotyczących jej stosowania. Najprostsza forma metody kollokacji brzegowej którą zastosujemy w naszym przypadku polega na spełnieniu warunków (9) - (13) w sposób ścisły ale tylko w skończonej liczbie punktów na konturze ograniczającym rozważaną komórkę (podobszar) powtarzalnego elementu ABCD. Tak więc obcinając nie-

skończony szereg do  $4M-1$  pierwszych wyrazów dla poszczególniej komórki, poszukiwany obcięty szereg funkcji próbnych napiszemy w postaci:

$$T_{(j)} = \sum_{k=1}^{4M-1} X_k^{(j)} \left( R_{(j)}^{k-1} + \frac{E^{2(k-1)}}{R_{(j)}^{k-1}} \right) \cos[(k-1)\theta_{(j)}], \quad (14)$$

gdzie:

$$X_1^{(j)} = A_0^{(j)}, \quad X_k^{(j)} = B_k^{(j)}, \quad k = 2, 3, \dots, 4M-1. \quad (15)$$

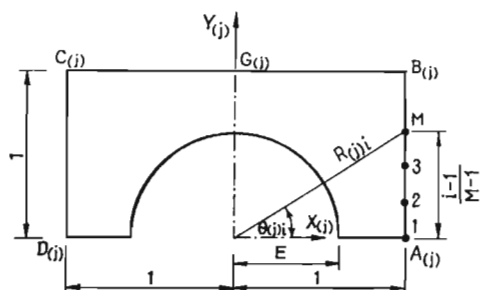
W obciętej szereg funkcji próbnych (14) występuje  $Q = 4M-1$  nieznanymi współczynnikami  $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_Q^{(j)}$  dla każdej komórki. Wyznamy je z warunków (9) - (13) po uprzednim określeniu pochodnych  $\partial T_{(j)}/\partial Y_{(j)}$  i  $\partial T_{(j)}/\partial X_{(j)}$ . Na podstawie wzorów:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial Y_{(j)}} &= \frac{\partial T_{(j)}}{\partial R_{(j)}} \sin\theta_{(j)} + \frac{1}{R_{(j)}} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial \theta_{(j)}} \cos\theta_{(j)}, \\ \frac{\partial T_{(j)}}{\partial X_{(j)}} &= \frac{\partial T_{(j)}}{\partial R_{(j)}} \cos\theta_{(j)} - \frac{1}{R_{(j)}} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial \theta_{(j)}} \sin\theta_{(j)}, \end{aligned}$$

po wykorzystaniu (14) otrzymujemy:

$$\frac{\partial T_{(j)}}{\partial Y_{(j)}} = \sum_{k=1}^Q X_k^{(j)}(k-1) \left\{ -R_{(j)}^{k-2} \sin[(k-2)\theta_{(j)}] - \frac{E^{2(k-1)}}{R_{(j)}^k} \sin k\theta_{(j)} \right\}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T_{(j)}}{\partial X_{(j)}} = \sum_{k=1}^Q X_k^{(j)}(k-1) \left\{ R_{(j)}^{k-2} \cos[(k-2)\theta_{(j)}] - \frac{E^{2(k-1)}}{R_{(j)}^k} \cos k\theta_{(j)} \right\}. \quad (17)$$



Rys. 3. Rozmieszczenie punktów kolokacji w  $j$ -tym podobzarsze

W celu spełnienia warunków (9) - (13) zgodnie z metodą kolokacji brzegowej na brzegach  $X_{(j)} = 1$  (brzeg  $A_{(j)}B_{(j)}$  na rys. 3),  $Y_{(j)} = 1$  (brzeg  $B_{(j)}C_{(j)}$  na rys. 3),  $X_{(j)} = -1$  (brzeg  $C_{(j)}D_{(j)}$  na rys. 3) obieramy  $M$  punktów kolokacji, których współrzędne określone są wzorami:

— na brzegu  $A_{(j)}B_{(j)}$ :

$$R_{(j)l} = \left[ 1 + \left( \frac{i-1}{M-1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (18)$$

$$\theta_{(j)l} = \arctg \left( \frac{i-1}{M-1} \right), \quad (19)$$

— na brzegu  $B_{(j)}G_{(j)}$ :

$$R_{(j)i} = \left[ 1 + \left( \frac{i-1}{M-1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (20)$$

$$\Theta_{(j)i} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{i-1}{M-1} \right), \quad (21)$$

— na brzegu  $G_{(j)}C_{(j)}$ :

$$R_{(j)i} = \left[ 1 + \left( \frac{i-1}{M-1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (22)$$

$$\Theta_{(j)i} = \pi + \operatorname{arctg} \left( \frac{i-1}{M-1} \right), \quad (23)$$

— na brzegu  $C_{(j)}D_{(j)}$ :

$$R_{(j)i} = \left[ 1 + \left( \frac{i-1}{M-1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (24)$$

$$\Theta_{(j)i} = \pi - \operatorname{arctg} \left( \frac{i-1}{M-1} \right). \quad (25)$$

Wykorzystanie warunków brzegowych (9) - (13) wraz z wzorami (16) - (25) prowadzi do układu  $Z(4M-1)$  liniowych równań algebraicznych, których niewiadomymi są współczynniki  $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_{(4M-1)}^{(j)}$ , ( $j = 1, 2, \dots, Z$ ). Rozwiązanie tego układu równań przeprowadzimy przy pomocy metody eliminacji Gaussa i przy zadanych wartościach  $E$  i  $Z$ . Znajomość wyżej wspomnianych współczynników pozwala wyznaczyć już rozkład temperatury według wzoru (14).

Przystępując do określenia efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła odwołamy się w pierwszej kolejności do pomiarów eksperymentalnych prowadzących do wyznaczenia tego współczynnika. Jak wiadomo najprostsza metoda polega na pomiarze strumienia ciepła  $q$  przy zadanym gradiencie temperatury, przy czym dąży się do tego aby wymienione wielkości były skalarami. Współczynnik przewodzenia ciepła oblicza się wówczas zgodnie z prawem przewodzenia ciepła Fouriera [10]. Prowadzi to do wzoru:

$$\lambda = \frac{qd}{\Delta t}, \quad (26)$$

gdzie  $d$  jest grubością próbki stosowanej w doświadczeniu,  $\Delta t = t_1 - t_2$  zadaną różnicą temperatur.

W rozważanym przez nas przypadku strumień ciepła przez powtarzający się element ABCD (rys. 1) wyraża się wzorem:

$$q = -\lambda_m \int_0^1 \left( \frac{\partial T(z)}{\partial X(z)} \right) \Big|_{X(z)=-1} dY(z). \quad (27)$$

Podstawienie (27) do (26) i przyjęcie  $d = 2Z$ ,  $t_1 - t_2 = 1$ , i  $\lambda = \lambda^*$  prowadzi do poszuki-

wanego wzoru pozwalającego określić wartości liczbowe efektywnego współczynnika przewodnictwa ciepła:

$$\frac{\lambda^*}{\lambda_m} = 2Z \int_0^1 \left( \frac{\partial T_{(Z)}}{\partial X_{(Z)}} \right) \Big|_{X_{(Z)} = -1} dY_{(Z)}. \quad (28)$$

### 3. Rezultaty numeryczne i wnioski

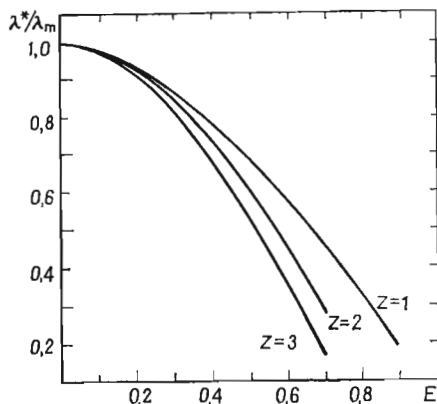
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla parametrów  $M$ ,  $E$  i  $Z$ . Od tych parametrów bowiem zależy wartość efektywnego współczynnika przewodnictwa ciepła. Parametr  $M$  określający liczbę punktów kolokacji na brzegu związany jest wyłącznie ze stosowaną metodą numeryczną. Eksperymenty numeryczne wykazały, że liczba przyjętych punktów kolokacji wpływa w bardzo istotny sposób na dokładność otrzymanych rezultatów. Okazało się że np. przy  $E = 0,1 - 0,6$  i  $Z = 1$  wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła są stabilne na trzech miejscach znaczących przy czterech punktach kolokacji na brzegu, natomiast przy pięciu punktach wartości te są stabilne na czterech miejscach znaczących. Gdy liczba rzędów kanałów  $Z$  ulegała zwiększeniu, wówczas stabilne wartości efektywnych współczynników przewodnictwa ciepła do trzech miejsc znaczących otrzymano przy pięciu punktach kolokacji na brzegu. Okazało się również, iż przy  $E > 0,7$  i  $Z > 1$  trudno było uzyskać stabilne wyniki do trzech miejsc znaczących.

Tablica 1.

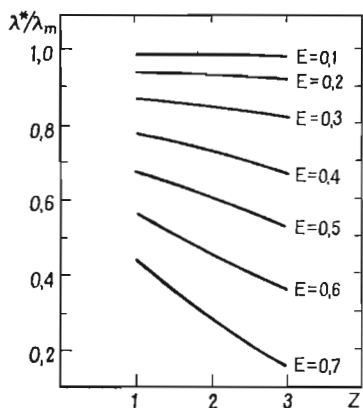
Wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda^*/\lambda_m$  w funkcji stosunku średnicy kanału do osiowego rozstawu kanałów  $E$  oraz liczby rzędów kanałów  $Z$

$E$	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$
0,1	0,985478	0,981688	0,978366
0,2	0,939720	0,928271	0,915221
0,3	0,869344	0,843927	0,815381
0,4	0,779046	0,734385	0,685433
0,5	0,675019	0,605139	0,531643
0,6	0,562912	0,458315	0,356957
0,7	0,446707	0,283970	0,158760
0,8	0,327409		
0,9	0,199612		

Wartości liczbowe efektywnego współczynnika przewodnictwa ciepła zestawione w tablicy 1 obliczono na mikrokomputerze AT przy pomocy załączonego w Dodatku programu opracowanego w języku BASIC. Graficzną ilustrację zmiany tego współczynnika w funkcji  $E$  oraz  $Z$  przedstawiono na rysunkach 4 i 5. Z rysunków tych wynika, czego można było intuicyjnie oczekiwać, że efektywny współczynnik przewodzenia ciepła maleje wraz ze wzrostem liczby rzędów kanałów oraz przy zwiększaniu przekroju kanałów w porów-



Rys. 4. Wartość efektywnej przewodności cieplnej w funkcji stosunku średnicy kanału do osiowego rozstawu kanałów przy ustalonej liczbie rzędów kanałów  $Z$



Rys. 5. Wartość efektywnej przewodności cieplnej w funkcji liczby rzędów kanałów przy ustalonym stosunku średnicy kanału do ich osiowego rozstawu  $E$

naniu do grubości elementu. Należy tu jednak wyraźnie podkreślić, że wraz ze wzrostem przekroju kanałów może pojawić się zjawisko konwekcji, którego nie brano pod uwagę w niniejszym opracowaniu.



Dodatek

```

1 REM "OB LICZANIE EFEKTYWNEGO WSPOLCZYNNIKA PRZEWODNICTWA"
5 LPRINT "OB LICZANIE EFEKTYWNEGO WSPOLCZYNNIKA CIEPLA"
10 DIM A(80,80): DIM B(80): DIM C(80): DIM X(80): DIM E(10)
30 DIM F(10): DIM P(10): DIM H(10): DIM G(10): DIM S(10):
   DIM V(10)
35 DIM Q(10)
40 INPUT "STOSUNEK SREDNICY OTWORU DO ODLEGLOSCI POMIEDZY
        SASIADUJACYMI OTWORAMI e=";E
65 FI= 3.14159265358979**E*E/4
140 INPUT "LICZBA PUNKTOW KOLLOKACJI NA PROSTOLINIOWYM
        ODCINKU BRZEGU M=";M
   11 LPRINT "e=";E, "M=";M
142 INPUT "ILOSC RZEDOW PRETOW Z=";Z
143 N=Z*(4*M-1)
144 LPRINT "ILOSC RZEDOW PRETOW Z = ";Z
145 LPRINT "WYMIAR UKLADU LINIOWEGO n=";N
150 GOSUB 360
153 INPUT "CZY DRUKOWAC WSPOLRZEDNE PUNKTOW KOLLOKACJI
        TAK=1";TAK
156 IF TAK<>1 THEN GOTO 191
158 LPRINT "WSPOLRZEDNE PUNKTOW KOLLOKACJI      "
160 FOR K=1 TO M
161 LPRINT "E(";K;")=";E(K),
162 LPRINT "F(";K;")=";F(K),
163 LPRINT "H(";K;")=";H(K),
164 LPRINT "G(";K;")=";G(K),
165 LPRINT "P(";K;")=";P(K),
166 LPRINT "Q(";K;")=";Q(K),
167 LPRINT "S(";K;")=";S(K),
168 LPRINT "V(";K;")=";V(K),
170 NEXT K
191 GOSUB 400
192 GOSUB 521
193 GOSUB 1060
220 CAL=0
225 FOR L=2 TO 100 STEP 2
230 Y=.01*(L-1)
235 GOSUB 1410
240 CAL=CAL+PO*.01/3
245 Y=.01*L
250 GOSUB 1410
252 CAL=CAL+4*PO*.01/3
254 Y=.01*(L+1)
256 GOSUB 1410
258 CAL=CAL+PO*.01/3
260 NEXT L
270 LPRINT "CAL=";CAL
275 LAMZA=-2*Z*CAL
276 LPRINT "ZASTEPCZY WSPOLCZYNNIK PRZEWODZENIA = ";LAMZA
280 STOP

```

```

350 REM "PODPROGRAM OKRESLAJACY PROMIENIE I KATY KOLLOKACJI"
360 FOR K=1 TO M
370 E(K)=SQR(1+((K-1)*(K-1))/((M-1)*(M-1)))
375 H(K)=E(K)
380 F(K)=ATN((K-1)/(M-1))
385 G(K)=3.1415926535897#/2-F(K)
386 F(K)=E(K)
387 Q(K)=3.1415926#/2+F(K)
388 S(K)=E(K)
389 V(K)=3.1415926#-F(K)
390 NEXT K
391 RETURN
400 REM "OKRESLENIE MACIERZY UKLADU I WEKTORA WYRAZOW WOLNYCH"
410 FOR K=1 TO M
420 B(K)=0
430 FOR Y=1 TO Z-1
440 C=(Y-1)*(4*M-1)
445 B(K+M+C)=0
446 B(K+2*M+C)=0
447 B(3*M+K+C-1)=0
450 B(4*M+K+C-1)=0
460 NEXT Y
470 C=(Z-1)*(4*M-1)
480 B(M+K+C)=0
490 B(2*M+K-1+C)=0
500 B(3*M+K-1+C)=1
510 NEXT K
520 RETURN
521 REM "OKRESLANIE MACIERZY UKLADU"
530 FOR K=1 TO M
540 A(K,1)=1
550 FOR J=2 TO 4*M-1
555 EK=E(K)^(J-1)
560 A(K,J)=(EK+(E^(2*(J-1)))/EK)*COS((J-1)*F(K))
561 NEXT J
570 NEXT K
580 FOR Y=1 TO Z-1
590 FOR K=1 TO M
600 C=(4*M-1)*(Y-1)
610 A(M+K+C,1+C)=0
620 FOR J=2 TO 4*M-1
625 HK=H(K)^(J-2):H2=H(K)*H(K)
627 EJ=E^(2*(J-1)):GJ=(J-2)*G(K)
630 A(M+K+C,J+C)=(J-1)*(HK*SIN(GJ)+EJ*SIN(J*G(K)))/(HK*H2)
640 NEXT J
650 NEXT K
660 FOR K=2 TO M
670 A(2*M+K-1+C,1+C)=0
680 FOR J=2 TO 4*M-1
685 PK=P(K)^(J-2):P2=P(K)*P(K)
687 EJ=E^(2*(J-1)):QJ=(J-2)*Q(K):QJJ=QJ+2*Q(K)
690 A(2*M+K-1,J+C)=(J-1)*(PK*SIN(QJ)+EJ*SIN(QJJ))/(PK*P2)
700 NEXT J
710 NEXT K

```

```

720 FOR K=1 TO M
730 A(3*M+K+C-1,1+C)=1
740 A(3*M+K+C-1,4*M+C)=-1
750 FOR J=2 TO 4*M-1
755 SK=S(K)^(J-1)
757 EJ=E^(2*(J-1)):EK=E(K)^(J-1)
760 A(3*M+K-1+C,J+C)=(SK+EJ/SK)*COS((J-1)*V(K))
780 A(3*M+K-1+C,J+4*M-1+C)=- (EK+EJ/EK)*COS((J-1)*F(K))
790 NEXT J
800 A(4*M+K-1+C,1+C)=0
810 A(4*M+K-1+C,4*M+C)=0
820 FOR J=2 TO 4*M-1
825 SK=S(K)^(J-2):VK=V(K)*(J-2):SKJ=S(K)^J
827 EJ=E^(2*(J-1)):EK=E(K)^(J-2):FK=(J-2)*F(K)
828 EKJ=E(K)^J:FJ=J*F(K)
830 A(4*M+K-1+C,J+C)=(J-1)*(SK*COS(VK)-EJ*COS(J*V(K)))/SKJ
840 A(4*M+K-1+C,4*M+J-1+C)=- (J-1)*(EK*COS(FK)-EJ*COS(FJ)/EKJ)
841 NEXT J
850 NEXT K
860 NEXT Y
861 C=(Z-1)*(4*M-1)
870 FOR K=1 TO M
880 A(K+M+C,1+C)=0
890 FOR J=2 TO 4*M-1
895 HK=H(K)^(J-2):GJ=(J-2)*G(K)
897 EJ=E^(2*(J-1)):H2=H(K)*H(K)
900 A(K+M+C,J+C)=(J-1)*(HK*SIN(GJ)+EJ*SIN(J*G(K)))/(HK*H2)
910 NEXT J
920 NEXT K
930 FOR K=2 TO M
940 A(2*M+K-1+C,1+C)=0
950 FOR J=2 TO 4*M-1
955 PK=P(K)^(J-2):P2=P(K)*P(K)
957 EJ=E^(2*(J-1)):QJ=(J-2)*Q(K):QJJ=QJ+2*Q(K)
960 A(2*M+K-1+C,J+C)=(J-1)*(PK*SIN(QJ)+EJ*SIN(QJJ))/(PK*P2)
970 NEXT J
980 NEXT K
990 FOR K=1 TO M
1000 A(3*M+K-1+C,1+C)=1
1010 FOR J=2 TO 4*M-1
1015 SK=S(K)^(J-1)
1017 EJ=E^(2*(J-1))
1020 A(3*M+K-1+C,J+C)=(SK+EJ/SK)*COS((J-1)*V(K))
1030 NEXT J
1040 NEXT K
1050 RETURN
1060 REM "ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ LINIOWYCH"
1070 FOR K=1 TO N
1080 BIG=ABS(A(K,K))
1090 L=K
1100 FOR I=K TO N
1110 SIZE=ABS(A(I,K))
1120 IF SIZE<BIG THEN GOTO 1150
1130 BIG=SIZE
1140 L=I
1150 NEXT I

```

```

1160 IF K=L THEN GOTO 1250
1170 FOR J=K TO N
1180 ABIG=A(L, J)
1190 A(L, J)=A(K, J)
1200 A(K, J)=ABIG
1210 NEXT J
1220 C=B(L)
1230 B(L)=B(K)
1240 B(K)=C
1250 IF A(K, K)=0 THEN GOTO 1390
1260 FOR I=1 TO N
1270 IF I=K THEN GOTO 1330
1280 RATIO=A(I, K)/A(K, K)
1290 FOR J=K TO N
1300 A(I, J)=A(I, J)-RATIO*A(K, J)
1310 NEXT J
1320 B(I)=B(I)-RATIO*B(K)
1330 NEXT I
1340 NEXT K
1350 FOR K=1 TO N
1360 X(K)=B(K)/A(K, K)
1370 NEXT K
1380 RETURN
1390 PRINT "MACIERZ JEST OSOBLIWA"
1400 RETURN
1410 REM "OBLICZANIE WARTOSCI POCHODNEJ NORMALNEJ NA
1412 REM LEWYM BRZEGU OSTATNIEJ KOMORKI"
1415 C=(Z-1)*(4*M-1)
1420 PO=0
1430 R=SQR(1+Y*Y)
1440 TE=3.1415926#-ATN(Y)
1450 FOR K=2 TO 4*M-1
1455 RK=R^(K-2):R2=R*R
1457 EJ=E^(2*(K-1)):KT=(K-2)*TE
1460 PO=PO+X(C+K)*(K-1)*(RK*COS(KT)-EJ*COS(K*TE)/(RK*R2))
1470 NEXT K
1480 RETURN

```

#### Literatura

1. T. HOP, *Konstrukcje warstwowe*, Arkady, Warszawa 1980.
2. D. K. HALE, *The physical properties of composite materials*, J. Mat. Sci., 11 (1976) 2105 - 2141.
3. S. WIŚNIEWSKI, *Wymiana ciepła*, PWN, Warszawa, 1979.
4. J. A. KOŁODZIEJ, *Określenie poprzecznej efektywnej przewodności cieplnej kompozytu o jednokierunkowo ułożonych włóknach metodą kollokacji brzegowej*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 23 (1985) 355 - 373.
5. H. B. KELLER, D. SACHS, *Calculating of the conductivity of a medium containing cylindrical inclusions*, J. Appl. Phys., 34 (1964) 537 - 538.
6. YI-ZHON CHEN, YI-HENG CHEN, *Solutions of the torsion problem for bars with Z-□-+ and T- cross-section by harmonic continuation technique*, Int. J. Engng Sci., 19 (1981) 791 - 804.

7. E. M. SPARROW, *Temperature distribution and heat-generating solid*, J. Heat Transfer, 82 (1960) 389 - 392.
8. J. A. KOŁODZIEJ, Z. KOŃCZAK, *Zastosowanie metody kollokacji brzegowej dla obszarów ograniczonych wielokątem foremnym*, Zesz. Nauk. Pol. Pozn., Mechanika, nr 30 (1984) 171 - 176.
9. J. A. KOŁODZIEJ, *Review of application of boundary collocation methods in continuous mechanics*, Solid Mechanics Archives, 12 (1987), 187 - 231.
10. H. S. CARSLAW, J. C. JEAAGER, *Conduction of Heat in Solids*, second ed., Oxford At the Clarendon Press, 1959.

## Р е з ю м е |

ВЛИЯНИЕ БЕРЕГА НА ЭФФЕКТИВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
В ПРОСТЕНКЕ С ИЗОЛЯЦИОННЫМИ ПУСТОТАМИ

В работе исследуется влияние берега на эффективный коэффициент теплопроводности в стенке с многопериодической укладкой каналов. Предполагается, что укладка каналов квадратная. Эффективный коэффициент теплопроводности получается используя решение установившейся задачи теплопроводности в типичном периодическом элементе. Решение получено при использовании метода береговой коллокации. В следствии получаем формулу для эффективного коэффициента теплопроводности. Некоторые численные результаты представлены в таблице. Влияние количества каналов, а также влияние соотношения диаметра каналов к их осевому расстоянию, на результаты, представлено графически.

## S u m m a r y

INFLUENCE OF THE EDGE ON THE EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY IN A PARTITION  
WITH INSULATING VOIDS

In the paper the influence of the edge on the effective thermal conductivity in a multi-channel wall element has been investigated. It has been assumed that the air holes are regularly arranged according to the square pattern. In order to determine the effective thermal conductivity the solution of steady heat flow in a repeated element has been used. The solution has been based on the boundary collocation method. The formula for the effective thermal conductivity has been obtained. Some of the numerical values have been juxtaposed. The influence of the row number of holes as well as their dimensions on the effective thermal conductivity has been shown graphically.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 listopada 1987 roku.*

---