

## PLYTY SPRĘŻYSTE MIKROPERIODYCZNIE NIEJEDNORODNE

WIESŁAW NAGÓRKO

*Uniwersytet Warszawski*

W pracy rozważa się sprężyste anizotropowe płyty gęsto, periodycznie niejednorodne. Dla takich ciał konstruuje się, w oparciu o analizę niestandardową, model zhomogenizowany. Jako szczególne przypadki rozważa się płyty niejednorodne w jednym i dwu kierunkach oraz niejednorodność punktową. Otrzymane równania przekształcają się, w przypadku jednorodnym, w klasyczne równania płyt.

### 1. Wstęp

Problemy związane z periodycznie niejednorodnymi płytami sprężystymi, traktowanymi jako ciała anizotropowe były, analizowane w wielu pracach [1]. Modele takich ciał konstruowano w oparciu o hipotezy kinematyczne prowadzące od układu równań opisujących statykę lub dynamikę ciała sprężystego, trójwymiarowego, do układu równań teorii uproszczonej „dwuwymiarowej”, abstrakcyjnego ciała „powierzchniowego”. Wszystkie te teorie formułowane były w ramach analizy klasycznej, opartej o zbiór liczb rzeczywistych. W tej pracy, płytę traktujemy jako ciało dwuwymiarowe. Dla takiego ciała zbudujemy model zhomogenizowany opierając się o analizę niestandardową [2], z rozszerzonym zbiorem liczb rzeczywistych. Homogenizacja polega tutaj na przyjęciu hipotezy kinematycznej dla niestandardowego ugięcia płyty. Hipoteza ta ma charakter niestandardowych więzów wewnętrznych, które są jednak istotnie różne od rozpatrywanych w ramach analizy klasycznej: ugięcie niestandardowe wyraża się przez ugięcie standardowe (klasyczne) oraz układ standardowych funkcji, tzw. parametrów mikrolokalnych, [3], charakteryzujących zachowanie się poszczególnych „mikro” części płyty. Jak się okaże, wpływ tych parametrów na klasyczne ugięcie jest pomijalny, ale istotny przy obliczaniu momentów. W pracy jako szczególne przypadki rozważa się niejednorodność w jednym i dwu kierunkach oraz niejednorodność punktową.

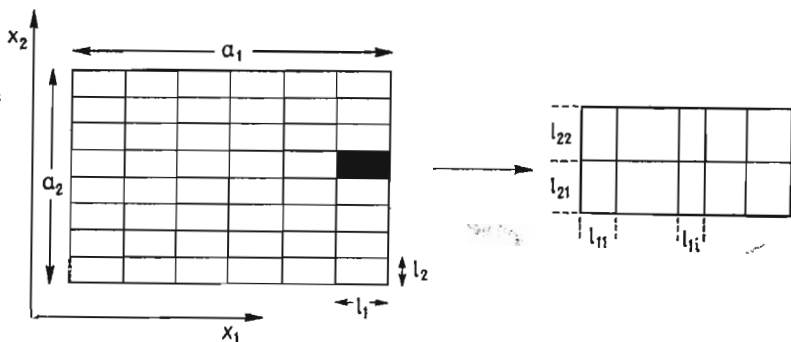
### 2. Anizotropowe płyty sprężyste, periodycznie niejednorodne

Przedmiotem rozważań są płyty sprężyste, periodycznie niejednorodne. Konfiguracja odniesienia płyty jest prostokątem  $\Pi = (-a_1, a_1) \times (-a_2, a_2) \subset R^2$ . W przestrzeni  $R^2$  wprowadzamy układ współrzędnych kartezjańskich  $(x_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Niech niejednorodność

plyty jest taka, że wyznacza na powierzchni  $\Pi$  proste o równaniach  $x_1 = n_a l_1$ ,  $x_2 = n_b l_2$ ,  $a = 0, \pm 1, \dots, \pm n_1$ ,  $b = 0, \pm 1, \dots, \pm n_2$  na  $4n_1 n_2$  prostokątów o długościach boków  $l_1, l_2$ . Oznaczmy przez  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  moduły sztywności płyty. Załóżmy, że funkcje te są okresowe:

$$B^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) = B^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1 + l_1, x_2 + l_2) \quad (2.1)$$

dla każdego  $(x_1, x_2) \in \Pi$  takiego, że  $(x_1 + l_1, x_2 + l_2) \in \Pi$ . Nic nie stoi na przeszkodzie, by dziedzinę funkcji  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  rozszerzyć, jeśli będzie to potrzebne, na całą płaszczyznę  $R^2$ . Każdy z  $4n_1 n_2$  prostokątów nazwiemy komórką periodyczności. Niech dalej komórka periodyczności daje się podzielić na prostokąty o bokach równoległych do osi współrzędnych, których długości są odpowiednio  $l_{1i}, l_{2j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_0$  tak, że  $l_1 = \sum_{i=1}^{n_0} l_{1i}$ ,  $l_2 = \sum_{j=1}^{m_0} l_{2j}$ , (rys. 1). Prostokąt o polu  $l_{1j} l_{2j}$  oznaczmy przez  $\Delta_{ij}$ . Załóżmy,



Rys. 1.

że każdy prostokąt  $\Delta_{ij}$  jest utworzony z materiału jednorodnego i anizotropowego, tzn. dla  $(x_1, x_2) \in \Delta_{ij}$  funkcje  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  są stałe:

$$B^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \equiv B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.2)$$

Wprowadźmy oznaczenia  $\eta_{1i} = l_{1i}/l_1$ ,  $\eta_{2j} = l_{2j}/l_2$ . Niech funkcja  $u: \Pi \rightarrow R$  będzie ugięciem płyty, zaś  $V$  przestrzenią ugięć wirtualnych  $v: \Pi \rightarrow R$ , przyjmijmy, że  $v \in C^2(\Pi)$ . Niech ponadto  $p: \Pi \rightarrow R$  będzie obciążeniem powierzchni środkowej płyty. Przyjmijmy słabą postać równań statyki:

$$\int_{\pi} B^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\gamma\delta} v_{,\alpha\beta} da = \int_{\pi} p v da + \int_{\partial\pi} (q v + r v_{,n}) dl \quad (2.3)$$

gdzie  $v$  jest dowolnym ugięciem wirtualnym, oraz:

$$\begin{aligned} q &= q^\alpha n_\alpha + (B^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\gamma\delta} n_\alpha q_\beta)_{,t}, \\ r &= B^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\gamma\delta} n_\alpha n_\beta, \quad q^\alpha = (B^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\gamma\delta})_{,\beta}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

oraz  $n$  jest wektorem zewnętrznym normalnym do  $\partial\Pi$ ,  $a(\cdot)_{,n}$ ,  $(\cdot)_{,t}$  oznaczają odpowiednio pochodne w kierunku normalnym i stycznym do  $\partial\Pi$ .

Przedstawione związki (2.1) - (2.4) opisują klasyczną dwuwymiarową teorię płyt. W tych związkach nie uwzględnione są fakty, że rozpatrywane płyty są periodycznie nie-

jednorodne, komórek periodyczności jest „dużo” oraz, że wymiary komórek są „małe” w stosunku do wymiarów całej płyty. Fakty te chcemy uwzględnić w opisie płyty i dlatego oprzemy się w dalszym ciągu nie na analizie klasycznej lecz analizie niestandardowej. Struktura analizy niestandardowej, oznaczymy ją przez  $*M$ , jest rozszerzeniem struktury analizy klasycznej (oznaczenie  $M$ ) i charakteryzuje się między innymi tym, że każdą relację  $\alpha \in M$  można jednoznacznie rozszerzyć do  $*\alpha \in *M$ . Taką rozszerzoną relację nazywa się standardową. Relacja standardowa będąca zbiorem nieskończonym jest istotnie różna od  $\alpha$  gdyż zawiera także elementy niestandardowe. I tak, rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych  $R$  jest zbiór  $*R$ , który zawiera  $R$ , wszystkie liczby postaci  $r + \varepsilon$  gdzie  $r \in R$  a  $\varepsilon$  jest infinytezymalną,  $\varepsilon \in \text{Mon}(0)$ , oraz liczby nieskończone  $1/\varepsilon$ . Zbiór liczb infinytezymalnych  $\text{Mon}(0)$  zawiera 0 oraz wszystkie liczby niestandardowe nie należące do  $R$  i takie, że ich wartość bezwzględna jest mniejsza od każdej liczby  $r > 0$ . Wykazuje się, że zbiór ten zawiera nieskończenie wiele elementów.

W dalszym ciągu będziemy dążyć do skonstruowania dla płyt periodycznie niejednorodnych relacji (2.1) - (2.4) w postaci niestandardowej i wyprowadzenia na ich podstawie lokalnych, standardowych równań opisujących statykę tych płyt.

### 3. Model niestandardowy

Rozważać będziemy konfigurację standardową  $*II \subset *R^2$ ,  $*II = *(-a_1, a_1) \times *(-a_2, a_2)$  oraz standardowe funkcje  $*p$ ,  $*B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  określone na  $*II$ , o wartościach w  $*R$ . Relacje  $*II$ ,  $*p$ ,  $*B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  są relacjami ze struktury  $*M$ . Są one standardowe, co oznacza, że są jednoznaczными rozszerzeniami odpowiednich relacji klasycznych  $II$ ,  $p$ ,  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  w strukturze  $M$ .

W konfiguracji  $*II$  przyjmujemy, że wymiary prostokątów  $\Delta_{ij}$  są niestandardowe — infinytezymalne, oznaczymy je przez  $\varepsilon_{1i}$ ,  $\varepsilon_{2j} \in \text{Mon}(0)$ . Stąd wynika, że wymiary komórki podstawowej są także infinytezymalne  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  (por. rys. 1). Założmy jednak, że stosunki tych infinytezymalnych  $\varepsilon_{1i}/\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{2j}/\varepsilon_2$  są równe  $\eta_{1i}$ ,  $\eta_{2j}$  czyli są liczbami rzeczywistymi (por. p. 2).

Funkcje  $*B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  skoro są standardowymi rozszerzeniami  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  więc są także funkcjami okresowymi o okresie  $l_1$ ,  $l_2$ . W niestandardowym opisie płyt okres modułów sztywności jest równy  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2 \in \text{Mon}(0)$ . Określmy więc funkcje niestandardowe:

$$\bar{B}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) = *B^{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1 x_1, \omega_2 x_2), \tag{3.1}$$

gdzie  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  są liczbami nieskończonymi. Zažadajmy, by funkcje (3.1) były okresowe o okresie  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , wtedy łatwo wykazać, że  $\omega_1 = l_1/\varepsilon_1$ ,  $\omega_2 = l_2/\varepsilon_2$ . Funkcje (3.1) nie są standardowe a więc nie mają swoich „odpowiedników” w strukturze  $M$ . Rozszerzenie standardowe ugięcia płyty oznaczymy przez  $*u(x_1, x_2)$ . Przyjmujemy następującą niestandardową hipotezę kinematyczną dla niestandardowego ugięcia:

$$\bar{u}(x_1, x_2) = *u(x_1, x_2) + h_a(x_1, x_2)*q^a(x_1, x_2), \tag{3.2}$$

gdzie funkcje  $*q^a: *II \rightarrow *R$  są funkcjami standardowymi, zaś  $h_a$  funkcjami niestandardowymi takimi, że:

$$(\forall (x_1, x_2) \in \text{dom } h_a)[h_a(x_1, x_2) \in \text{Mon}(0)],$$

oraz okresowymi:

$$h_a(x_1, x_2) = h_a(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2), \quad \text{dla } x_1 \in (-a_1, a_1 - \varepsilon_1), x_2 \in (-a_2, a_2 - \varepsilon_2).$$

Założymy ponadto, że  $\partial_\alpha h_a$  są ciągłe oraz:

$$(\forall (x_1, x_2) \in \Delta_{ij}) [{}^0 h_a(x_1, x_2) = {}^0 \partial_\alpha h_a(x_1, x_2) = 0 \wedge {}^0 (\partial_\alpha \partial_\beta h_a(x_1, x_2)) \in R^1], \quad (3.3)$$

$$\int_{\Delta} h_{a, \alpha \beta}(x_1, x_2) da = 0.$$

Część standardowa ugięcia (3.2) jest równa ugięciu klasycznemu. Wynika to stąd, że część standardowa drugiego składnika (3.2) czyli  $h_a {}^* q^a$  jest równa zero, bo funkcje  $h_a$  przyjmują wartości nieskończenie małe. Postulowany w hipotezie kinematycznej (3.2) człon  $h_a {}^* q^a$  opisuje zachowanie się płyty w skali „mikro” — stąd funkcje  $q^a$  (których rozszerzeniem są funkcje  ${}^* q^a$ ), są poszukiwanymi, a  $h_a$  pełnią taką rolę w komórce podstawowej jak funkcje kształtu w metodzie elementów skończonych. Konstrukcja funkcji kształtu  $h_a$  będzie przedstawiona w dalszym ciągu.

Postać analogiczną do (3.2) przyjmą ugięcia wirtualne:

$$\bar{v}(x_1, x_2) = {}^* v(x_1, x_2) + h_a(x_1, x_2) {}^* r^a(x_1, x_2). \quad (3.4)$$

Relacja (2.3) w sformułowaniu niestandardowym przyjmie więc postać:

$$\int_{*\pi} B^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{u}_{,\gamma\delta} \bar{v}_{,\alpha\beta} da = \int_{*\pi} {}^* p \bar{v} da + \int_{*\partial\pi} (\bar{q}\bar{v} + \bar{r}\bar{v}_{,n}) dl, \quad (3.5)$$

gdzie  $\bar{u}, \bar{v}$  są dowolnymi funkcjami określonymi związkami (3.2), (3.4).

Określmy teraz w  ${}^*II$  siatkę punktów jak następuje:

$$\mathcal{A} \equiv \{(y_1, y_2), y_1 = n\varepsilon_1, y_2 = n\varepsilon_2, n = 0, \pm 1, \dots\} \cap {}^* \pi.$$

Niech  $\max_{(y_1, y_2) \in \mathcal{A}} y_1 = a_1 - \varepsilon_1/2$ ,  $\max_{(y_1, y_2) \in \mathcal{A}} y_2 = a_2 - \varepsilon_2/2$  wtedy (3.5) przyjmie postać:

$$\sum_{y \in \mathcal{A}} \sum_{ij} \int_{\Delta_{ij}(y)} (\bar{B}_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{u}_{,\gamma\delta} \bar{v}_{,\alpha\beta} - {}^* p \bar{v}) da = 0, \quad (3.6)$$

gdzie  $\bar{v}_{,n} = 0$ .

Występujące w równaniu (3.6) całki po  $\Delta_{ij}$  można obliczyć, dla każdego  $y \in \mathcal{A}$ . Ustalmy w tym celu  $(y_1, y_2) \in \mathcal{A}$ , oraz założmy, że funkcje  ${}^* u$  jako standardowe dają się przedstawić, w każdym obszarze  $\Delta_{ij}$  w postaci:

$${}^* u(x_1, x_2) = {}^* u(y_1, y_2) + \lambda(x_1, x_2), \quad (3.7)$$

gdzie  $\lambda(x_1, x_2)$  są funkcjami niestandardowymi o wartościach nieskończenie małych. Analogicznie do (3.7) można przedstawić funkcje  ${}^* v$ ,  ${}^* q^a$  i  ${}^* r^a$ . Ponadto  $\bar{B}_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta}$  gdyż moduły sztywności w  $\Delta_{ij}$  są stałe. W takim razie, podstawiając do (3.6) wyrażenia (3.2), (3.4) otrzymujemy:

$$\sum_{y \in \mathcal{A}} \sum_{ij} \left[ \varepsilon_{1i} \varepsilon_{2j} (B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} {}^* u_{,\gamma\delta} {}^* v_{,\alpha\beta} - {}^* p {}^* v) + B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} ({}^* v_{,\alpha\beta} {}^* q^a \int_{\Delta_{ij}(y)} h_{,\gamma\delta} da + \Delta_{ij}(y) + {}^* u_{,\gamma\delta} {}^* r^a \int_{\Delta_{ij}(y)} h_{,\alpha\beta}^a da + {}^* q^a {}^* r^b \int_{\Delta_{ij}(y)} h_{,\gamma\delta}^b h_{,\alpha\beta}^b da) \right] \simeq 0^2. \quad (3.8)$$

<sup>1)</sup> Symbol  ${}^0(\cdot)$  oznacza część standardową  $(\cdot)$ , [2].

<sup>2)</sup> Symbol  $\simeq$  oznacza równość z dokładnością do nieskończenie małej;  $a \simeq b \Leftrightarrow (a-b) \in \text{Mon}(0)$ .

W równości (3.8) wykorzystano fakt, że  $\int_{\Delta_{ij}(y)} f(x_1, x_2) \simeq 0$  jeżeli  $f(x_1, x_2)$  przyjmuje wartości infinitesimalne.

W dalszym ciągu założymy, że istnieją wielkości:

$$\eta_{\alpha\beta}^{ija} \equiv \left( \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_{\Delta_{ij}(y)} h_{,\alpha\beta}^a da \right), \quad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijab} \equiv \left( \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_{\Delta_{ij}(y)} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\gamma\delta}^b da \right). \quad (3.9)$$

Z twierdzenia Robinsona [2] mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in A} \sum_{ij} \varepsilon_{1i} \varepsilon_{2j} * p * v &\simeq \int_{\pi} p v da, \\ \sum_{y \in A} \sum_{ij} \varepsilon_{1i} \varepsilon_{2j} (B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} * u_{,\gamma\delta} * v_{,\alpha\beta}) &\simeq \int_{\pi} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{ij} u_{,\alpha\beta} v_{,\gamma\delta} da, \\ \sum_{y \in A} \sum_{ij} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} * v_{,\alpha\beta} * q^a \int_{\Delta_{ij}(y)} h_{,\gamma\delta}^a da &\simeq \int_{\pi} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_{\gamma\delta}^{ija} q_a v_{,\alpha\beta} da, \\ \sum_{y \in A} \sum_{ij} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} * q^a * r^b \int_{\Delta_{ij}(y)} h_{,\gamma\delta}^a h_{,\alpha\beta}^b da &\simeq \int_{\pi} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijab} q_a r_b da, \end{aligned} \quad (3.10)$$

gdzie  $\eta^{ij} \equiv \varepsilon_{1j} \varepsilon_{2i} / \varepsilon_1 \varepsilon_2$ . Wykorzystując (3.10), związek (3.8) w strukturze klasycznej  $M$  przyjmie postać:

$$\int_{\pi} [B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\eta^{ij} u_{,\gamma\delta} v_{,\alpha\beta} + \eta_{\gamma\delta}^{ija} q_a v_{,\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}^{ija} u_{,\gamma\delta} r_a + \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijab} q_a r_b) - p v] da = 0. \quad (3.11)$$

Zasada wariacyjna (3.11) jest poszukiwaną relacją dla rozpatrywanych płyt periodycznie niejednorodnych. Stosując dalej klasyczny formalizm wariacyjny otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \eta^{ij} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \eta_{\alpha\beta}^{ija} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} q_a r_b &= p, \\ \eta_{\alpha\beta}^{ija} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\gamma\delta} + \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijab} B_{ij}^{\alpha\beta\gamma\delta} q_b &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Zauważmy, że w skonstruowanym modelu płyt periodycznie niejednorodnych wpływ parametrów mikrolokalnych  $q^a$  jest pomijalny w przypadku ugięcia. Zgodnie bowiem z (3.2) człony z tymi parametrami są infinitesimalne więc ich części standardowe znikają. Tak jednak nie jest dla momentów, mamy bowiem, po pominięciu członów infinitesimalnych:

$$\bar{u}_{,\alpha\beta} = *u_{,\alpha\beta} + h_{,\alpha\beta}^a *q_a.$$

W powyższych związkach wartości pochodnych funkcji kształtu  $h_{,\alpha\beta}^a$  zgodnie z (3.3) nie są infinitesimalne i należą do  $R$ . Równania (3.12) są równaniami zhomogenizowanego modelu periodycznie niejednorodnych płyt sprężystych.

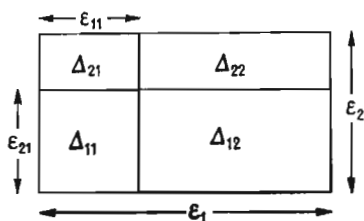
#### 4. Przypadki szczególne

Rozpatrywać będziemy komórkę podstawową złożoną z czterech elementów, (rys. 2). Wymiary elementów zaznaczono na rysunku. Każdy z elementów  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{21}$ ,  $\Delta_{22}$  może być z innego materiału. Związek (3.2) przyjmujemy w postaci:

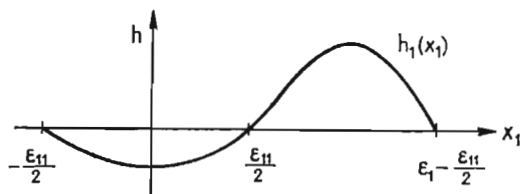
$$\bar{u}(x_1, x_2) = *u(x_1, x_2) + h^1(x_1) *q_1(x_1, x_2) + h^2(x_2) *q_2(x_1, x_2), \quad (4.1)$$

gdzie:

$$h_a(x_a) = \varepsilon_a^2 \begin{cases} \left( \frac{x_a}{\varepsilon_a} \right)^2 - \left( \frac{\varepsilon_{a1}}{2\varepsilon_a} \right)^2, & x_a \in \left( -\frac{\varepsilon_{a1}}{2}, \frac{\varepsilon_{a1}}{2} \right), \\ -\frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_a - \varepsilon_{a1}} \left[ \left( \frac{x_a}{\varepsilon_a} \right)^2 - \frac{x_a}{\varepsilon_a} - \left( \frac{\varepsilon_{a1}}{2\varepsilon_a} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{a1}}{2\varepsilon_a} \right], & x_a \in \left( -\frac{\varepsilon_{a1}}{2}, \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_{a1}}{2} \right), \end{cases} \quad a = 1, 2. \quad (4.2)$$



Rys. 2.



Rys. 3.

Funkcje (4.2) spełniają warunki podane w p. 3. Jak widać, funkcje kształtu zależą tylko od jednej zmiennej i są funkcjami kwadratowymi tej zmiennej. Wykres funkcji  $h^1(x_1)$  przedstawiono na rys. 3, (wykres funkcji  $h^2(x_2)$  jest analogiczny).

Druga pochodna funkcji kształtu jest równa:

$$h_a''(x_a) = \begin{cases} 2, & x_a \in \left( -\frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_a}, \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_a} \right), \\ -2 \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_a - \varepsilon_{a1}}, & x_a \in \left( \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_a}, \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_a} \right). \end{cases}$$

Wielkości  $\varepsilon_{a1}/\varepsilon_a - \varepsilon_{a1}$  są tutaj standardowe (klasyczne liczby rzeczywiste) bo  $\varepsilon_{a1}/\varepsilon_a - \varepsilon_{a1} = l_{a1}/(l_a - l_{a1}) = l_{a1}/l_{a2}$ . Rozważana teraz płyta jest opisana układem równań (3.12), w którym niezerowe wielkości (3.9) są równe:

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{111} &= \eta_{22}^{112} = -\eta_{11}^{121} = -\eta_{22}^{212} = \frac{1}{2} \eta_{1111}^{1111} = \frac{1}{2} \eta_{1112}^{1112} = \frac{1}{2} \eta_{2211}^{1121} = \\ &= \frac{1}{2} \eta_{2222}^{1122} = -\frac{1}{2} \eta_{1122}^{1212} = -\frac{1}{2} \eta_{2211}^{1221} = -\frac{1}{2} \eta_{1122}^{2112} = -\frac{1}{2} \eta_{2211}^{2121} = \\ &= \frac{1}{2} \eta_{1122}^{2212} = \frac{1}{2} \eta_{2211}^{2221} = 2\eta^{11}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

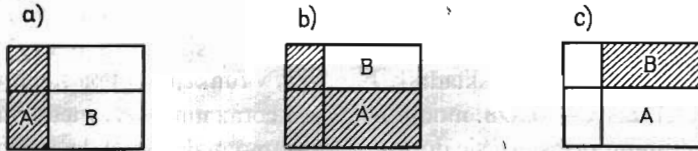
$$\eta_{22}^{122} = -\eta_{22}^{222} = \frac{1}{2} \eta_{2222}^{1222} = 2\eta^{12}, \eta_{11}^{211} = -\eta_{11}^{221} = \frac{1}{2} \eta_{1111}^{2111} = 2\eta^{21},$$

$$\eta_{1111}^{1211} = 4\eta^{11} \frac{\eta^{11}}{\eta^{12}}, \eta_{2222}^{2122} = 4\eta^{11} \frac{\eta^{11}}{\eta^{21}}, \eta_{1111}^{2211} = 4\eta^{21} \frac{\eta^{11}}{\eta^{12}}, \eta_{2222}^{1222} = 4\eta^{12} \frac{\eta^{11}}{\eta^{21}}.$$

Po podstawieniu wielkości (4.3) do równań (3.12) otrzymamy związki opisujące statykę płyty periodycznie niejednorodnej, której komórka periodyczności składa się z czterech elementów:

$$\begin{aligned} & (\eta^{11} B_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta} + \eta^{12} B_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta} + \eta^{21} B_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta} + (1 - \eta^{11} - \eta^{12} - \eta^{21}) B_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}) u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \\ & + (2\eta^{11} (B_{11}^{11\gamma\delta} - B_{12}^{11\gamma\delta}) + 2\eta^{21} (B_{21}^{11\gamma\delta} - B_{22}^{11\gamma\delta})) q_{1,\gamma\delta} + \\ & + (2\eta^{11} (B_{11}^{12\gamma\delta} - B_{12}^{12\gamma\delta}) + 2\eta^{21} (B_{21}^{12\gamma\delta} - B_{22}^{12\gamma\delta})) q_{2,\gamma\delta} = p, \\ & (2\eta^{11} (B_{11}^{11\gamma\delta} - B_{12}^{11\gamma\delta}) + 2\eta^{21} (B_{21}^{11\gamma\delta} - B_{22}^{11\gamma\delta})) u_{,\gamma\delta} + \\ & + \left[ 4\eta^{11} \left( B_{11}^{1111} + \frac{\eta^{11}}{\eta^{12}} B_{12}^{1111} \right) + 4\eta^{21} \left( B_{11}^{1111} + \frac{\eta^{11}}{\eta^{12}} B_{22}^{1111} \right) \right] q_1 + \\ & + 4\eta^{11} (B_{11}^{1122} - B_{12}^{1122} + B_{22}^{1122} - B_{21}^{1122}) q_2 = 0, \\ & (2\eta^{11} (B_{11}^{22\gamma\delta} - B_{21}^{22\gamma\delta}) + 2\eta^{12} (B_{12}^{22\gamma\delta} - B_{22}^{22\gamma\delta})) u_{,\gamma\delta} + \\ & + 4\eta^{11} (B_{11}^{2211} - B_{12}^{2211} + B_{22}^{2211} - B_{21}^{2211}) q_1 + \\ & + \left[ 4\eta^{11} \left( B_{11}^{2222} + \frac{\eta^{11}}{\eta^{21}} B_{11}^{2222} \right) + 4\eta^{12} \left( B_{12}^{2222} + \frac{\eta^{11}}{\eta^{21}} B_{22}^{2222} \right) \right] q_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Niech teraz niejednorodność płyty jest liniowa w kierunku  $x_2$ . Oznacza to, że  $B_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $B_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , (rys. 4a).



Rys. 4.

Po podstawieniu do (4.4) wielkości (4.3) otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \eta A^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + (1 - \eta) B^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + 2\eta (A^{11\gamma\delta} - B^{11\gamma\delta}) q_{1,\gamma\delta} = p, \\ & (A^{11\gamma\delta} - B^{11\gamma\delta}) u_{,\gamma\delta} + 2 \left( A^{1111} + \frac{\eta}{1 - \eta} B^{1111} \right) q_1 = 0 \\ & (\eta A^{2222} + (1 - \eta) B^{2222}) q_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie  $\eta = \varepsilon_{11}/\varepsilon_1$  oraz  $B_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $B_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Jeżeli  $\eta A^{2222} \neq (\eta - 1) B^{2222}$ . Jeżeli  $\eta A^{2222} \neq (\eta - 1) B^{2222}$  wtedy z równania (4.5)<sub>3</sub> otrzymujemy  $q_2 \equiv 0$ . Jeżeli  $(\eta - 1) A^{1111} \neq \eta B^{1111}$  wtedy z równania (4.5)<sub>2</sub> można wyznaczyć parametr  $q_1$ :

$$q_1 = - \frac{(1 - \eta)(A^{11\gamma\delta} - B^{11\gamma\delta})}{2((1 - \eta)A^{1111} + \eta B^{1111})} u_{,\gamma\delta}$$

i równanie (4.5)<sub>1</sub> przyjmie postać:

$$\left[ \eta A^{\alpha\beta\gamma\delta} + (1 - \eta) B^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\eta(1 - \eta)(A^{11\gamma\delta} - B^{11\gamma\delta})(A^{11\alpha\beta} - B^{11\alpha\beta})}{(1 - \eta)A^{1111} + \eta B^{1111}} \right] u_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p. \quad (4.6)$$

Jeżeli  $A^{\alpha\beta\gamma\delta} = B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  wtedy (4.6) przyjmie postać klasycznego równania płyt. Wpływ parametru mikrolokalnego  $q_1$  opisuje człon:

$$\frac{\eta(1-\eta)(A^{11\alpha\beta} - B^{11\alpha\beta})(A^{11\gamma\delta} - B^{11\gamma\delta})}{(1-\eta)A^{1111} + \eta B^{1111}}. \quad (4.7)$$

Ustalmy  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Człon (4.7) jest różny od zera gdy  $A^{11\alpha\beta} \neq B^{11\alpha\beta}$  i  $A^{11\gamma\delta} \neq B^{11\gamma\delta}$ . Wtedy można go zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\frac{a^{\alpha\beta\gamma\delta}}{\eta} + \frac{b^{\alpha\beta\gamma\delta}}{1-\eta}},$$

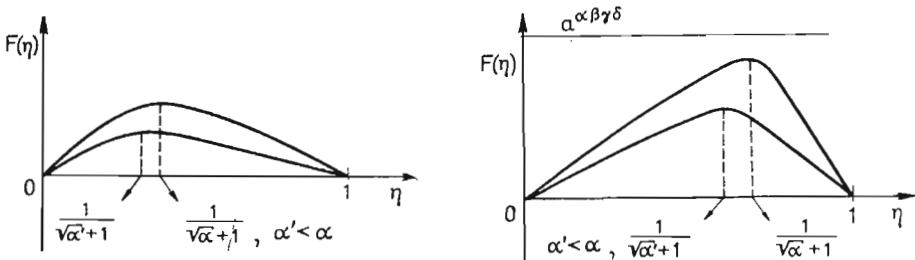
gdzie:

$$a^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv A^{1111}/(A^{11\alpha\beta} - B^{11\alpha\beta})(A^{11\gamma\delta} - B^{11\gamma\delta}), \quad b^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv B^{1111}/(A^{11\alpha\beta} - B^{11\alpha\beta})(A^{11\gamma\delta} - B^{11\gamma\delta}).$$

Niech  $b^{\alpha\beta\gamma\delta} = \alpha a^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Wyrażenie (4.7) można wtedy przedstawić jako funkcję  $\eta$  w postaci:

$$a^{\alpha\beta\gamma\delta} F(\eta) = \frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{\alpha}{1-\eta}},$$

gdzie  $\eta \in (0, 1)$ , i  $a, \alpha$  są stałymi. Warunek  $(\eta-1)A^{1111} \neq \eta B^{1111}$ , po uwzględnieniu definicji  $a^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $b^{\alpha\beta\gamma\delta}$  i  $\alpha$  jest równoważny warunkowi  $\alpha > 0$ . Łatwo sprawdzić, że  $F(\eta)$  posiada w przedziale określoności maksimum w punkcie  $\eta = 1/(\sqrt{\alpha} + 1)$  zaś  $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} F(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} F(\eta) = 0$ . Jeżeli  $\alpha \rightarrow \infty$  tzn. moduł  $B^{1111}$  jest coraz większy, wtedy punkt w którym  $F(\eta)$  osiąga maksimum przesuwa się do  $\eta = 0$  zaś samo maksimum dąży do zera. Oznacza to, że im mniej jest w dwuskładnikowej komórce periodyczności składnika o module sztywności  $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$  i im sztywniejszy jest drugi składnik, tym wpływ funkcji  $F(\eta)$  na zachowanie się płyty jest mniejszy. Jeżeli zaś  $\alpha \rightarrow 0$ , tzn. moduł  $B^{1111}$  jest coraz mniejszy, wtedy punkt, w którym  $F(\eta)$  osiąga maksimum przesuwa się do  $\eta = 1$  zaś samo maksimum dąży do  $a^{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Oznacza to, że im mniej sztywny, w stosunku do składnika  $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$  jest składnik  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$  oraz im go



Rys. 5.

jest mniej to wpływ funkcji  $F(\eta)$  na zachowanie się płyty jest większe, nie większe jednak niż  $a^{\alpha\beta\gamma\delta}$ . (rys. 5).

W analityczny sposób można rozpatrzeć przypadek niejednorodności liniowej w kierunku  $x_1$ . Z kolei w przypadku gdy niejednorodna płyta jest liniowa w dwu kierunkach:



$x_1, x_2$ , moduły sztywności będą spełniać w tym przypadku związki  $B_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta}$  (rys. 4b). Postępując podobnie otrzymamy równania:

$$\begin{aligned}
 & (\bar{\eta} B_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta} + (1 - \bar{\eta}) B_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}) u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + 2\eta^{21} (B_{11}^{11\gamma\delta} - B_{22}^{11\gamma\delta}) q_{1,\gamma\delta} + 2\eta^{12} (B_{11}^{22\gamma\delta} - B_{22}^{22\gamma\delta}) q_{2,\gamma\delta} = p, \\
 & 2\eta^{21} (B_{11}^{11\gamma\delta} - B_{22}^{11\gamma\delta}) u_{,\gamma\delta} + 4\eta^{11} \left[ \left( 1 + \frac{\eta^{11}}{\eta^{12}} + \frac{\eta^{21}}{\eta^{11}} \right) B_{11}^{1111} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\eta^{21}}{\eta^{12}} B_{22}^{1111} q_1 \right] + 4\eta^{11} (B_{22}^{1122} - B_{11}^{1122}) q_2 = 0, \\
 & 2\eta^{12} (B_{11}^{22\gamma\delta} - B_{22}^{22\gamma\delta}) u_{,\gamma\delta} + 4\eta^{11} (B_{22}^{1122} - B_{11}^{1122}) q_1 + \\
 & \quad + 4\eta^{11} \left[ \left( 1 + \frac{\eta^{12}}{\eta^{11}} + \frac{\eta^{11}}{\eta^{21}} \right) B_{11}^{2222} + \frac{\eta^{12}}{\eta^{21}} B_{22}^{2222} \right] q_2 = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie  $\bar{\eta} = \eta^{11} + \eta^{12} + \eta^{21}$ .

Jeżeli niejednorodność płyty jest punktowa i moduły sztywności płyty spełniają warunki  $B_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , (rys. 4c) to równania płyty przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
 & (\eta^{11} B_{11}^{\alpha\beta\gamma\delta} + (1 - \eta^{11}) B_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta}) u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + 2\eta^{11} [(B_{11}^{11\gamma\delta} - B_{12}^{11\gamma\delta}) q_{1,\gamma\delta} + (B_{11}^{22\gamma\delta} - B_{12}^{22\gamma\delta}) q_{2,\gamma\delta}] = p, \\
 & 2\eta^{11} (B_{11}^{11\gamma\delta} - B_{12}^{11\gamma\delta}) u_{,\gamma\delta} + 4\eta^{11} \left[ B_{11}^{1111} + \left( \frac{\eta^{11}}{\eta^{12}} + \frac{\eta^{21}}{\eta^{11}} + \frac{\eta^{21}}{\eta^{12}} \right) B_{12}^{1111} \right] q_1 + \\
 & \quad + 4\eta^{11} (B_{11}^{1122} - B_{12}^{1122}) q_2 = 0, \\
 & 2\eta^{11} (B_{11}^{22\gamma\delta} - B_{12}^{22\gamma\delta}) u_{,\gamma\delta} + 4\eta^{11} \left[ B_{11}^{2222} + \left( \frac{\eta^{12}}{\eta^{11}} + \frac{\eta^{11}}{\eta^{21}} + \frac{\eta^{12}}{\eta^{21}} \right) B_{12}^{2222} \right] q_2 + \\
 & \quad + 4\eta^{11} (B_{11}^{1122} - B_{12}^{1122}) q_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Jeżeli założymy, że składniki komórki podstawowej są z tego samego materiału wtedy z układu równań na parametry mikrolokalne  $q_1, q_2$  otrzymamy warunki  $q_1 \equiv 0, q_2 \equiv 0$  oraz klasyczne równanie płyty.

### 5. Uwagi końcowe

Przedstawiony model płyt periodycznie niejednorodnych otrzymano w oparciu o analizę niestandardową bez założeń o pomijalności jednych wielkości względem innych. Układ relacji opisujących ugięcie płyty zależy w ogólności od dodatkowych dwu niewiadomych funkcji opisujących zachowanie się płyty w komórce periodyczności, tzw. parametrów mikrolokalnych. Funkcje kształtu jakie zastosowano tutaj w niestandardowej hipotezie kinematycznej są wielomianami drugiego stopnia. Układ relacji dla płyt periodycznie niejednorodnych rozpatrywany w tej pracy nie wymaga rozwiązywania zagadnienia na komórce podstawowej. W szczególnych przypadkach prowadzi on do klasycznego zagadnienia jednorodnego oraz do relacji występujących w teorii modułów efektywnych [4 - 5].

## Literatura

1. P. M. NAGHDI, *The Theory of Shells and Plates*, Handbuch der Physik, VIa/2, 1972.
2. A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1966.
3. Cz. WOŹNIAK, *A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites*, Int. J. of Engng. Sci., 25, 5, 1987, 483 - 499.
4. J. D. ACHENBACH, *A theory of elasticity with microstructure for directionally reinforced composites*, Inter. Centre for Mech. Sci., Courses and Lectures, No. 167, Springer Verlag, 1975.
5. R. M. CHRISTENSEN, *Mechanics of composite materials*, J. Wiley and Sons, 1980.

## Резюме

## УПРУГИЕ ПЛИТЫ МИКРОПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫ

В работе рассмотрены упругие анизотропные плиты плотно, периодически неоднородные. Для таких тел конструируется, на основе нестандартного анализа гомогенизованную модель. Как особые случаи рассмотрены неоднородные плиты в одном и двух направлениях, а также дискретную неоднородность.

Полученные уравнения превращаются, в классические уравнения плит.

## Summary

## ON MODELLING OF THIN MICROPERIODIC PLATES

Using the methods of the nonstandard modelling, we have proposed a homogenized model of thin elastic microperiodic plates has been proposed. The system of the governing equations involves the deflection of the plate and two extra unknowns represented by two independent microlocal parameters. These parameters describe the expected behaviour of the plate within every periodicity cell. The shape functions in the postulated a priori kinematical constraints are the second order polynomials. In special cases the system of resulting equations can be reduced either to the single equation for the homogeneous thin plate or to the plate equation similar to that of the effective modulae theory.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 lutego 1988 roku.*

---