

IDENTYFIKACJA MODELU DYNAMIKI LOTU PODDŹWIĘKOWEGO SAMOLOTU

JERZY MANEROWSKI

Instituł Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa

Opracowano matematyczny model poddźwiękowego samolotu z turbinowym silnikiem lotniczym metodą identyfikacji za pomocą analizy regresyjnej. Do identyfikacji wykorzystano wyniki pomiarów z lotu, w którym wykonana została wiązanka figur akrobacji lotniczej. Zamieszczono wyniki pomiarów z tego lotu oraz wyniki, dla przebiegów czasowych sterowania jak w rzeczywistym locie, uzyskane z opracowanego modelu. Podano analogiczne wyniki dla lotów, z których wyniki pomiarów nie były wykorzystywane w identyfikacji.

1. Wstęp

Szereg prac w literaturze przedmiotu dotyczy matematycznych modeli dynamiki lotu samolotu (np. [2,4,5,8,12]). Zależności określające siły i momenty sił aerodynamicznych działające na samolot wyznaczano przy tym na podstawie wyników badań tunelowych oraz przybliżonych obliczeń analitycznych, a w przypadku silnika głównie w oparciu o badania hamowniane [3].

W niniejszej pracy przedstawiono matematyczny model dynamiki lotu poddźwiękowego samolotu o znanych charakterystykach masowych z turbinowym silnikiem odrzutowym, stosując metodę identyfikacji z wykorzystaniem analizy regresyjnej [1,6,9]. Metoda ta polega na opracowaniu modelu dynamiki samolotu w oparciu o wyniki pomiarów w locie. Zasadnicza część pracy zamieszczona jest w rozdz.3÷5. W rozdz.3 rozpatrzono algorytmy obliczeń charakterystyk niezbędnych do identyfikacji na podstawie wyników pomiarów w locie. W rozdz.4 określono wielowymiarową funkcję regresji [1,6] dla sił i momentów sił aerodynamicznych oraz ciągu silnika. Podano przy tym algorytmy wyznaczania współczynników regresji, to jest współczynników zależności określających siły i momenty sił aerodynamicznych oraz ciąg silnika. Wyniki obliczeń wymienionych współczynników dla samolotu TS-11 "Iskra" zamieszczono w rozdz.5. Przedstawiono tam również porównanie wyników całkowania równań ruchu samolotu z wykorzystaniem współczynników wyznaczonych metodą identyfikacji oraz przebiegów zmian parametrów

ruchu otrzymanych w czasie badań w locie – dla tych samych sposobów sterowania. Uzyskano dobrą zgodność wyników dla modelu i obiektu rzeczywistego.

2. Równania ruchu samolotu

W pracy wykorzystamy niżej podane prawoskrętne układy współrzędnych prostokątnych (Rys.1):

$GXYZ$ – nieruchomy układ współrzędnych związany z ziemią
(oś GZ skierowana pionowo w dół),

$0xyz$ – związany z samolotem,

$0_a x_a y_a z_a$ – związany z przepływem.

Do rozważań wprowadzamy układy o osiach równoległych do danego układu współrzędnych. Układy te oznaczamy przez dodawanie indeksu prim (np. $0X'Y'Z'$ – Rys.1).

Celem określenia względnego położenia dwóch układów współrzędnych wykorzystamy kąty Eulera [2,4,5,8]. W przypadku układów $0X'Y'Z'$ i $0xyz$ kąty te oznaczamy Ψ , Θ i Φ (Rys.1). Relacje między współrzędnymi w ww. układach określa związek:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{E} \mathbf{X}'_0, \quad (2.1)$$

gdzie:

$\mathbf{x}_0, \mathbf{X}'_0$ – wektory współrzędnych w układach $0xyz$ i $0X'Y'Z'$

$$\mathbf{x}_0 = [x, y, z], \quad \mathbf{X}'_0 = [X', Y', Z'], \quad (2.2)$$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Psi, \Theta, \Phi)$ – ortonomalna macierz transformacji Eulera.

Związek pomiędzy współrzędnymi w układzie związanym z samolotem a związanym z przepływem $0x'_a y'_a z'_a$, przez analogię do (2.1), zapiszemy wzorem:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{E}_a \mathbf{x}'_{0a}. \quad (2.3)$$

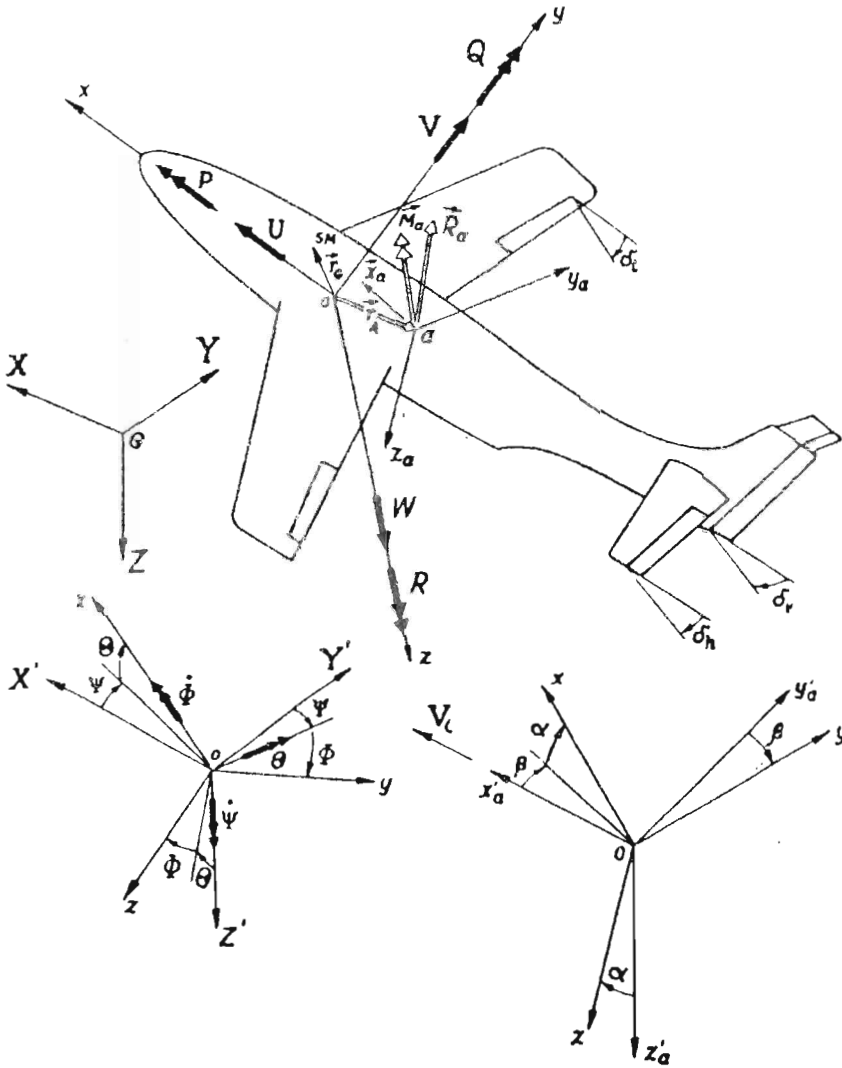
Macierz \mathbf{E}_a otrzymamy przez podstawienie w wyrazach \mathbf{E} zamiast kątów: Ψ , Θ i Φ , odpowiednio kątów: ślizgu β , natarcia α i wartości zero (por. Rys.1).

W pracy wykorzystujemy związki pomiędzy kątowymi prędkościami Eulera ($\dot{\Phi}$, $\dot{\Theta}$ i $\dot{\Psi}$), a kątowymi prędkościami samolotu (P , Q i R). Na podstawie Rys.1 ww. związek przedstawiamy w formie zależności (por. [2,4,8]):

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}_E \dot{\Phi}_0, \quad (2.4)$$

\mathbf{P}_0 – kątowe prędkości samolotu w układzie $0xyz$

$$\mathbf{P}_0 = [P, Q, R], \quad (2.5)$$



Rys. 1.

\mathbf{E}_E – macierz transformacji.

Przejdziemy do wyznaczania równań ruchu samolotu. Samolot traktować będziemy jako bryłę sztywną z ruchomymi sterami. Rozpatrujemy przy tym samolot w konfiguracji przelotowej (podwozie i klapy w położeniu schowane). Wymienione równania wyznaczmy w układzie związanym z samolotem $Oxyz$ (Rys.1). W oparciu o prawa mechaniki analitycznej, równania dynamicznej równowagi samolotu (Rys.1) przedstawiamy w postaci (por. [4,8]):

$$\dot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{B}^{-1}(-\mathbf{F}_B + \mathbf{F}), \quad (2.6)$$

gdzie:

$\dot{\mathbf{U}}_0$ – wektor liniowych i kątowych przyspieszeń samolotu

$$\dot{\mathbf{U}}_0 = [\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}], \quad (2.7)$$

\mathbf{F} – wektor sił X_F , Y_F i Z_F oraz momentów sił zewnętrznych L_F , M_F i N_F działających na samolot w kierunkach osi Ox , Oy i Oz

$$\mathbf{F} = [X_F, Y_F, Z_F, L_F, M_F, N_F], \quad (2.8)$$

\mathbf{F}_B – wektor sił bezwładności zależny od liniowych i kątowych prędkości samolotu

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{U}_\omega \mathbf{B} \mathbf{U}_0, \quad (2.9)$$

\mathbf{U}_0 – wektor prędkości (por. (2.7))

$$\mathbf{U}_0 = [U, V, W, P, Q, R], \quad (2.10)$$

\mathbf{U}_ω – macierz prędkości liniowych i kątowych,

\mathbf{B} – macierz bezwładności samolotu [2,4,5,8]

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Wyznaczmy teraz zależności określające siły i momenty sił zewnętrznych \mathbf{F} (2.8). Wektor \mathbf{F} przedstawimy w postaci sumy sił i momentów sił: grawitacyjnych G , ciągu silnika T i aerodynamicznych A :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_R. \quad (2.12)$$

Wektor \mathbf{F}_G w układzie $Oxyz$ zapiszemy wzorem:

$$\mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{0G} \\ \mathbf{M}_{0G} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

gdzie na podstawie Rys.1:

\mathbf{X}_{0G} , \mathcal{M}_{0G} – wektory sił grawitacyjnych i momentów sił grawitacyjnych

$$\mathbf{X}_{0G} = \mathbf{E} \mathbf{Z}_G, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{M}_{0G} = \mathbf{r}_G \mathbf{X}_{0G},$$

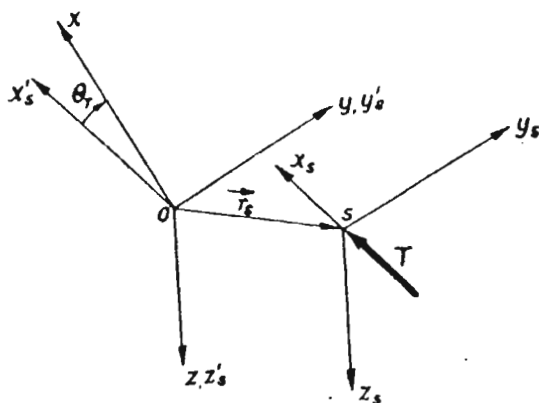
\mathbf{Z}_G – wektor sił grawitacyjnych w układzie $GXYZ$

$$\mathbf{Z}_G = [0, 0, mg], \quad (2.15)$$

g – przyspieszenie ziemskie,

\mathbf{r}_G – macierz promienia \vec{r}_G (Rys.1)

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} 0 & -r_{zG} & r_{yG} \\ \text{antysym.} & 0 & -r_{xG} \\ & & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$



Rys. 2.

Wektor sił i momentów sił pochodzących od silnika (Rys.2) przedstawimy w formie zależności (por. (2.8) i (2.13)):

$$\mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{0T} \\ \mathcal{M}_{0T} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Wektor \mathbf{X}_{0T} w układzie $0xyz$ (przy założeniu, że podłużna oś silnika x_s , nie pokrywa się z osią $0x$ – Rys.2) wyznaczymy ze wzoru:

$$\mathbf{X}_{0T} = T \mathbf{X}_{0T_s}, \quad (2.18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} X_{0T_s} &= E_s T_{0s}, \\ E_s &= E \begin{cases} \phi = 0 \\ \theta = \theta_T \\ \psi = 0 \end{cases}, \\ T_{0s} &= [1, 0, 0], \end{aligned} \quad (2.19)$$

T – ciąg silnika, E_s – macierz transformacji.

Zależności określające ciąg silnika T zamieszczone są w rozdz.4.

Wektor momentów sił \mathcal{M}_{0T} (w układzie $0xyz$) będzie sumą momentów od ciągu silnika T oraz momentu giroskopowego od obracającego się z kątową prędkością Ω wirnika silnika:

$$\mathcal{M}_{0T} = \mathcal{M}_{T_s} + \mathcal{M}_{\Omega}, \quad (2.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{T_s} &= T X_{R_s}, \\ X_{R_s} &= r_s X_{0T_s}, \\ \mathcal{M}_{\Omega} &= -\omega_s E_s K_{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

oraz: K_{Ω} – wektor momentu ilości ruchu wirnika silnika w układzie $sx_s y_s z_s$ (Rys.2)

$$K_{\Omega} = [I_w \Omega, 0, 0], \quad (2.22)$$

I_w – masowy moment bezwładności wirnika silnika względem osi sx_s ,
 r_s, ω_s – macierze promienia \vec{r}_s i prędkości kątowych samolotu o postaci analogicznej do r_G (zal. (2.16)).

Do dalszych rozważań wektor F_T przyjmujemy w postaci:

$$F_T = T F_{T_s} + F_{T\Omega}, \quad (2.23)$$

gdzie:

$$F_{T_s} = \begin{bmatrix} X_{0T_s} \\ X_{R_s} \end{bmatrix}, \quad F_{T\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Przejdziemy do wyznaczania aerodynamicznych sił \vec{R}_a i momentów sił \vec{M}_a (Rys.1) działających na samolot w nieustalonym locie. Wymienione siły i momenty sił w układzie $0xyz$ przedstawimy w postaci (por. (2.12)):

$$F_A = \begin{bmatrix} X_{0A} \\ \mathcal{M}_{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy stosowany w mechanice lotu sposób wyrażania podanych wyżej sił [2,4,5,8]:

$$\begin{aligned} X_{0A} &= sq[C_x, C_y, C_z], \\ M_{0A} &= sq[C'_l, C'_m, C'_n], \\ [C'_l, C'_m, C'_n] &= l[C_l, C_m, C_n], \end{aligned} \quad (2.26)$$

- C_x, C_y i C_z - bezwymiarowe współczynniki aerodynamicznych sił (oporu, bocznej i nośnej) w układzie $Oxyz$,
- C_l, C_m i C_n - bezwymiarowe współczynniki momentów sił aerodynamicznych (przechylania, pochylania i odchylenia) w układzie $Oxyz$,
- s - powierzchnia skrzydeł samolotu,
- l - liniowy wymiar charakterystyczny (w dalszej części pracy przyjmujemy $l = 1$ m),
- $q = 0.5\rho V_i^2$ - ciśnienie dynamiczne,
- ρ - gęstość powietrza,
- V_i - prędkość lotu samolotu

$$V_i = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}. \quad (2.27)$$

Wprowadzone wyżej bezwymiarowe współczynniki sił i momentów sił aerodynamicznych są funkcjami [5]:

- kątów natarcia α i ślizgu β ,
- liniowych i kątowych prędkości samolotu,
- liczby Macha lotu Ma ,
- kątów wychyleń sterów (δ_h - wysokości, δ_v - kierunku i δ_l - lotek) oraz pochodnych względem czasu podanych wielkości.

Zależności funkcyjne omawianych bezwymiarowych współczynników od wyżej podanych wielkości przedstawiamy w rozdz.4. Jak już wcześniej zaznaczono, w pracy bezpośrednio wyznaczamy bezwymiarowe współczynniki sił i momentów sił aerodynamicznych w układzie współrzędnych związanych z samolotem $Oxyz$, a nie jak powszechnie stosuje się w mechanice lotu - w układzie związanym z przepływem. Zastosowany sposób jest bardziej korzystny z uwagi na numeryczną realizację identyfikacji charakterystyk aerodynamicznych samolotu, co szczegółowo omówiono w rozdz.4. Relacje między omawianymi współczynnikami w układzie

związany z przepływem (a) i w układzie $0xyz$ (Rys.1) przedstawiamy w postaci:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \\ C'_l \\ C'_m \\ C'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_a & \mathbf{0} \\ r_a \mathbf{E}_a & \mathbf{E}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xa} \\ C_{ya} \\ C_{za} \\ C'_{la} \\ C'_{ma} \\ C'_{na} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

W powyższej zależności macierz r_a promienia \vec{r}_a (Rys.1) ma postać analogiczną do macierzy r_G (zal. (2.16)).

Wykorzystując wyznaczone zależności, równania ruchu samolotu zapiszemy wzorem:

$$\dot{U}_0 = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{F}_1 + T\mathbf{F}_T + s\mathbf{q}C_A), \quad (2.29)$$

gdzie oznaczono (por. (2.26)):

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_T\Omega + \mathbf{F}_G, \quad (2.30)$$

$$C_A = [C_x, C_y, C_z, C'_l, C'_m, C'_n].$$

Równanie (2.29) wykorzystamy do identyfikacji charakterystyk samolotu (rozdz.4) oraz do analizy dynamiki lotu samolotu w oparciu o wyznaczone charakterystyki (rozdz.5).

3. Pomiary w locie

Dla potrzeb identyfikacji wykonane zostały loty samolotu z pomiarem i rejestracją (rejestracja oscylograficzna [10,11]), wielkości charakteryzujących: tor lotu, wychylenia sterów, kątową prędkość wirnika silnika oraz temperaturę powietrza. Loty wykonane zostały na samolocie TS-11 "ISKRA". Graniczny błąd względny wyników pomiarów [10] szacuje się na ok.3%. Poniżej zamieszczamy rejestrowane w locie wielkości (użyto nazewnictwa z [11]):

- V_{pp} – prędkość przyrządowa poprawiona,
- h_b – barometryczna wysokość lotu,
- α, β – kąt natarcia i ślizgu,
- $n_x, n_y, i n_z$ – składowe przeciążenia wzdłuż osi $0x, 0y$ i $0z$ (Rys.1),
- P, Q i R – prędkości kątowe samolotu w układzie $0xyz$,
- δ_h, δ_v i δ_l – kąty wychylenia sterów,
- Ω – prędkość kątowa wirnika silnika,
- T_{hb} – temperatura powietrza na h_b .

Wykorzystywane w pracy wyniki pomiarów zamieszczone są w [7]. Wymienione wyżej mierzone wielkości nie stanowią kompletu danych dla potrzeb identyfikacji (rozdz.4). Poniżej wyznaczmy brakujące dane, tj.: prędkości i przyspieszenia liniowe oraz przyspieszenia kątowe samolotu, gęstość powietrza, liczbę Ma , kąty Φ , Θ i Ψ .

Gęstość powietrza na barometrycznej wysokości lotu h_b (dla $h_b < 11000$ m) wyznaczyć można ze wzoru ([7,11]):

$$\rho = \frac{p_b}{gRT_{hb}}, \quad (3.1)$$

gdzie:

p_b – ciśnienie powietrza na barometrycznej wysokości lotu

$$p_b = p_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} h_b\right)^{\frac{1}{\alpha R}}, \quad (3.2)$$

oraz dane atmosfery wzorcowej :

T_0, p_0 – temperatura i ciśnienie powietrza na $h_b = 0$,

a, R i g – pionowy gradient temperatury, stała gazowa powietrza i przyspieszenie ziemskie.

Po wyznaczeniu gęstości powietrza określamy rzeczywistą prędkość lotu samolotu V_l , a następnie liniowe prędkości U, V i W (Rys.1).

Prędkość V_l wyznaczamy ze wzoru ([11]):

$$V_l = V_i \sqrt{\sigma}, \quad (3.3)$$

V_i – prędkość równoważna poprawiona, $V_i = V_0 + \delta V_{i\epsilon}$

V_0 – prędkość równoważna, $V_0 = V_{pp} + \delta V_a$,

$\delta V_{i\epsilon}, \delta V_a$ – poprawki prędkościomierza na ścisłość (ϵ) i aerodynamiczną (a),

$\sigma = \sqrt{\rho/\rho_0}$ – ρ_0 gęstość powietrza atmosfery na $h_b = 0$.

Na podstawie zależności geometrycznych (Rys.1), wektor prędkości liniowych samolotu obliczymy ze związku:

$$[U, V, W] = \mathbf{E}_a \bar{V}_l, \quad \bar{V}_l = [V_l, 0, 0]. \quad (3.4)$$

W pracy uzależnimy współczynniki sił i momentów sił aerodynamicznych od liczby Ma lotu. Liczba ta na podstawie wyżej określonych wielkości jest równa:

$$Ma = \frac{V_i}{\sqrt{P_b}} \sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa}}, \quad (3.5)$$

gdzie κ jest wykładnikiem adiabaty dla powietrza.

Przejdziemy do wyznaczania kątów Eulera (Φ , Θ i Ψ).

Kąty te wyznaczymy w wyniku całkowania względem czasu kątowych prędkości Eulera (Rys.1), wyrażonych przez mierzone w locie kątowe prędkości samolotu w układzie $Oxyz$:

$$[\Phi, \Theta, \Psi] = \int_t [\dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}] dt + [\Phi_0, \Theta_0, \Psi_0], \quad (3.6)$$

gdzie (por.(2.4)÷ (2.6)):

$$[\dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}] = \mathbf{E}^{-1}[P, Q, R], \quad (3.7)$$

a $[\Phi_0, \Theta_0, \Psi_0]$ – początkowe wartości kątów (dla chwili $t = 0$).

Przeprowadzone dla potrzeb identyfikacji loty (interesujące fragmenty lotów, np. wiązanka figur akrobacji, reakcje samolotu na impulsowe wychylenia sterów) rozpoczynano z ustalonego lotu poziomego. W tym przypadku można założyć: $\Phi = \Psi = 0$, $\Theta = \alpha$.

Przyspieszenia kątowe samolotu $[\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}]$ wyznaczymy w wyniku numerycznego różniczkowania względem czasu zarejestrowanych w locie kątowych prędkości samolotu.

Przejdziemy do wyznaczenia liniowych przyspieszeń samolotu w układzie $Oxyz$. Przyspieszenia te wyznaczymy w oparciu o zmierzone w układzie $Oxyz$ składowe przeciążenia samolotu n_x , n_y i n_z oraz liniowe i kątowe prędkości. Wartości mierzonych przeciążeń samolotu w układzie $Oxyz$ (pomiar za pomocą bezwładnościowych czujników [7]) są uzależnione od ww. wielkości następująco:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ -n_y \\ -n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \left(\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} + \omega_s \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \right) - \mathbf{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Poszukiwane wartości przyspieszeń wyznaczymy z podanej wyżej zależności.

4. Identyfikacja charakterystyk aerodynamicznych samolotu i charakterystyk silnika

Matematyczny model nieodkształcalnego samolotu w dowolnym locie wyznaczymy metodą identyfikacji przy wykorzystaniu analizy regresyjnej [1,6,9]. W rozważaniach zakładamy, że znane są charakterystyki masowe samolotu. Identyfikację przeprowadzimy w warunkach tzw. eksperymentu biernego, tj. pomiarów: wielkości charakteryzujących tor lotu samolotu, wychyleń sterów, kątowej prędkości wirnika silnika, warunków atmosferycznych podczas wykonywanych lotów – w normalnych warunkach eksploatacyjnych samolotu.

- \mathbf{T}_s - wierszowa macierz, której wyrazami są: $\Omega, \Omega^2, \dots, Ma, Ma^2, \dots, \rho, \rho^2, \dots$ oraz iloczyny tych wielkości,
 \mathbf{C}_s - wektor współczynników, którego wyrazy przyporządkowane są wyrazom \mathbf{T}_s .

Po podstawieniu wyżej wyznaczonych zależności do (4.2), dla n -tej chwili czasowej wektor \hat{Y}_n przedstawimy w formie zależności (por. (4.2)):

$$\hat{Y}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{a}, \quad (4.7)$$

gdzie:

\mathbf{A}_n - macierz współczynników obliczonych na podstawie wyników z pomiarów w locie dla n -tej chwili czasowej

$$\mathbf{A}_n = [[\mathbf{A}_s]_n [\mathbf{A}_0]_n [\mathbf{A}_c]_n], \quad (4.8)$$

\mathbf{a} - wektor poszukiwanych współczynników sił i momentów sił aerodynamicznych oraz ciągu silnika (wektor współczynników funkcji regresji [1,6])

$$\mathbf{a} = [\mathbf{C}_s \mathbf{C}_0 \mathbf{C}]^T, \quad (4.9)$$

$\mathbf{A}_s = F_{T_s} [\mathbf{T}_s]_n$ - macierz silnika,

\mathbf{A}_0 - macierz aerodynamiczna stałych współczynników sił i momentów sił aerodynamicznych (4.3)

$$\mathbf{A}_0 = sq \Lambda_6, \quad (4.10)$$

przy czym Λ_6 jest macierzą przekątniową o wyrazach (1,0,1,0,1,0),

$\mathbf{A}_c = sq [\mathbf{T}_A]_n$ - macierz aerodynamiczna o wyrazach zależnych od parametrów lotu (por. (4.4)).

Wektor \mathbf{a} modelu samolotu (zal. (4.7)) wyznaczymy przy założeniu, że suma kwadratów błędów \mathbf{e} (błędy estymowane modelu [1,6]) pomiędzy wektorami \hat{Y}_n , obliczonymi na podstawie N wyników pomiarów z lotów z (4.2), a wektorami (4.7) przyjmuje wartość minimalną (ze względu na wyrazy \mathbf{a}), co zapiszemy wzorem:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n = \sum_{n=1}^N [\mathbf{Y}_n - \mathbf{A}_n \mathbf{a}]^T [\mathbf{Y}_n - \mathbf{A}_n \mathbf{a}] = \min. \quad (4.11)$$

Optymalne wartości wyrazów \mathbf{a} , minimalizujące sumę S_N , otrzymamy przyrównując do zera pochodne cząstkowe S_N względem wyrazów wektora \mathbf{a} [1,6]. Po wykonaniu powyższych obliczeń otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy poszukiwany wektor \mathbf{a} :

$$\mathbf{A}^* \mathbf{a} = \mathbf{a}^*, \quad (4.12)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}^* = \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n, \quad \mathbf{a}^* = \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_n^T \mathbf{Y}_n, \quad (4.13)$$

przy czym \mathbf{A}^* jest macierzą symetryczną.

Niżej zamieszczamy uwagi dotyczące algorytmów i komputerowych programów wyznaczenia \mathbf{a} (zal.(4.13)), które wykorzystano w numerycznej realizacji identyfikacji samolotu (rozd.5).

1. Z punktu widzenia ograniczania pojemności wykorzystywanej pamięci operacyjnej komputera, korzystnie jest obliczać dla n -tego pomiaru macierze $\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n$, $\mathbf{A}_n^T \mathbf{Y}_n$ i bezpośrednio po tym sumować te macierze z macierzami \mathbf{A}^* i \mathbf{a}^* wyznaczonymi dla $n - 1$ pomiaru:

$$\mathbf{A}_n^* = \mathbf{A}_{n-1}^* + \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{a}_n^* = \mathbf{a}_{n-1}^* + \mathbf{A}_n^T \mathbf{Y}_n.$$

2. Dla zapewnienia uniwersalności komputerowego programu korzystnie jest uwzględnić możliwość obliczenia \mathbf{a}^* dla:

- znanych lub żądanych wartości (np. zero) określonego wyrazu \mathbf{a} ,
- znanych związków pomiędzy wartościami wyrazów \mathbf{a} (np. $a_i + \zeta a_j + \xi a_k = 0$, przy czym i, j oraz k określają numery wyrazów wektora \mathbf{a} , zaś ζ i ξ są znanymi współczynnikami).

W przypadku identyfikacji samolotu, rozpatrywanej w niniejszej pracy, wymiar macierzy \mathbf{A}^* wynosi 120×120 . W związku z tym rozwiązanie równania (4.13) ze względu na liczbę operacji arytmetycznych jest mało dokładne. Warto tu dodać, że ww. równanie może być źle uwarunkowane numerycznie, wyklucza się przy tym przypadek, kiedy przyjęte funkcje regresji (4.2) prowadzą do powstania osobliwych macierzy \mathbf{A}^* . Z uwagi na to, korzystnie jest przedstawić równania równowagi (4.2) w częściowo (lub całkowicie) rozprężonej postaci, otrzymamy wówczas rozprężone równania (4.12), które można rozwiązać oddzielnie. Przedstawiony w rozdz.2 sposób wyrażania współczynników sił i momentów sił aerodynamicznych w układzie związanym z samolotem (a nie w układzie związanym z przepływem) powoduje częściowe rozprężenie równań (4.12). W skrajnym przypadku, gdy dodatkowo oś Ox pokrywa się z podłużną osią silnika sx_s (Rys.2) otrzymamy sześć rozprężonych podukładów równań (4.12).

Przejdziemy teraz do wyznaczenia wskaźników (współczynników) oceny dokładności odwzorowania rzeczywistego samolotu, przez jego matematyczny model. Wykorzystamy przy tym wskaźniki przedstawione w [1,6], które dla równań w postaci (4.7) wyznacza się przy założeniu, że wektor błędów (zakłóceń) pomiarów jest wektorem zmiennych losowych stochastycznie niezależnych, o stałej wariancji i zerowej wartości średniej. Jak już wcześniej zaznaczono, podane zal. (4.7) i (4.12)

są rozprężone. Podukład rozprężonych ww. równań zapisujemy z indeksem k , który oznacza jednocześnie liczbę wyrazów wektorów \mathbf{a}_k i \mathbf{a}_k^* :

$$\hat{Y}_{kn} = [\mathbf{A}_k]_n \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{A}_k^* \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k^*. \quad (4.15)$$

Wymienione wyżej wskaźniki oceny dokładności modelu wyznaczmy dla każdego z podukładów omawianych rozprężonych równań (4.15). Do oceny dokładności modelu wykorzystamy niżej podane wielkości.

Współczynnik korelacji wielowymiarowej [6]:

$$R_k = \sqrt{\frac{R_{k1}}{R_{k2}}}, \quad (4.16)$$

gdzie:

$$R_{k1} = \sum_{n=1}^N [\hat{Y}_{kn} - \bar{Y}_k]^T [\hat{Y}_{kn} - \bar{Y}_k], \quad (4.17)$$

$$R_{k2} = \sum_{n=1}^N [Y_{kn} - \bar{Y}_k]^T [Y_{kn} - \bar{Y}_k],$$

oraz

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_{kn}. \quad (4.18)$$

R_k określa korelację pomiędzy macierzami Y_{kn} obliczoną w oparciu o wyniki pomiarów w locie, a \mathbf{A}_k (por. 4.7) dla $n = 1 \div N$ pomiarów wykorzystanych do identyfikacji. R_k przyjmuje wartości z przedziału $0 \div 1$. Jeżeli $R_k = 1$ to istnieje ścisła współzależność pomiędzy modelem (\hat{Y}_k) a rzeczywistym samolotem.

Do oceny modelu wykorzystamy również wariancję resztkową [6].

Wariancję resztkową S_k , z uwzględnieniem podanych wyżej założeń dotyczących błędów pomiarów, obliczymy ze wzoru:

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^N [Y_{kn} - \hat{Y}_{kn}]^T [Y_{kn} - \hat{Y}_{kn}]}. \quad (4.19)$$

5. Numeryczna analiza

W oparciu o zależności wyprowadzone w poprzednich paragrafach opracowano komputerowy program obliczeń wektora \mathbf{a} (4.13) oraz wskaźników oceny

modelu (zal. (4.16) i (4.19)). Program opracowano w języku Fortran. Obliczenia wykonano na 16-bitowym komputerze IBM/AT. Do rozwiązywania równań (4.15) stosowano podwójną precyzję wykorzystując przy tym algorytm Gaussa z porządkowaniem równań. Identyfikację charakterystyk samolotu (omówioną w rozdz.4) przeprowadzono dla wyników z pomiarów w locie samolotu TS-11 "Iskra" (obliczonych wg. zależności podanych w rozdz.3), podczas którego wykonano wiązaną figur akrobacji lotniczej [7]. Na lot ten składały się: rozpędzania i hamowania samolotu (bez wykorzystania hamulców aerodynamicznych), zakręty oraz następujące figury pilotażowe: becзки, pętle, zawroty i nurkowania. W locie tym przedziały prędkości i przeciążenia obejmowały pełny zakres użytkowy tego samolotu. Lot wykonany został w czasie 96 s. Dla potrzeb identyfikacji wyniki z pomiarów przedstawiono w dyskretnej postaci w liczbie $N = 480$ (por.(4.13)). W oparciu o omawiane wyniki pomiarów przeprowadzono szereg obliczeń testowych wektora \mathbf{a} (4.15) oraz odpowiadających mu wartości wskaźników oceny dokładności modelu (4.16) i (4.19) dla różnych postaci macierzy \mathbf{A} (4.9). Otrzymywane z kolejnych obliczeń wartości ww. wskaźników pozwoliły na przyjęcie końcowej postaci \mathbf{A} , zapewniającej żadaną dokładność odwzorowania rzeczywistego samolotu przez jego matematyczny model. Niżej zamieszczono końcową postać wierszowych macierzy sił i momentów sił aerodynamicznych \mathbf{T}_{Ax} , \mathbf{T}_{Ay}, \dots (4.5) oraz macierzy silnika \mathbf{T}_s (4.6).

Macierze te wraz z \mathbf{A}_0 (4.10) decydują o postaci macierzy \mathbf{A} (por. (4.3) ÷ (4.10)). Przykładowo macierze \mathbf{T}_{Ax} i \mathbf{T}_{Ay} określone są następująco:

$$\mathbf{T}_{Ax} = \left[|\alpha|, |\beta|, \delta_h, |\delta_v|, \frac{QMa}{V_i}, |\alpha|Ma, |\beta|Ma, \frac{\dot{\alpha}}{V_i}, \alpha^2, \beta^2, Ma, Ma^2 \right], \quad (5.1)$$

$$\mathbf{T}_{Ay} = \left[\beta, \delta_l, \delta_v, |\alpha|\beta, \frac{P}{V_i}, \frac{PMa}{V_i}, \frac{RMa}{V_i}, |\beta|P, \frac{\dot{\beta}}{V_i^2}, \beta, \beta Ma^2, \beta Ma \right].$$

Macierz silnika \mathbf{T}_s przyjęto w postaci:

$$\mathbf{T}_s = F_{VH} \left[1, \Omega, \Omega^2, \Omega^3, \Omega^4 \right], \quad (5.2)$$

gdzie F_{VH} jest współczynnikiem ciągu silnika zależnym od liczby Ma lotu i gęstości powietrza.

F_{VH} określono na podstawie [3] w oparciu o charakterystykę prędkościowo-wysokościową jednowirnikowego i jednoprzepływowego silnika odrzutowego o zbliżonych osiągach do silnika samolotu TS-11. Wymieniona charakterystyka określa zmianę ciągu silnika funkcji liczby Ma lotu dla różnych wysokości lotu (gęstości powietrza). F_{VH} wprowadzono do obliczeń z uwagi na fakt, iż przedstawienie funkcji regresji ciągu silnika T (zal. (4.6)), o współczynnikach regresji zależnych od liczby Ma lotu oraz wielowymiarowej funkcji regresji sił i momentów sił aerodynamicznych (wektor \mathbf{C} - zal. (4.4)) również zależnej od Ma , powoduje powstanie

osobliwej macierzy \mathbf{A}^* . Przy rezygnacji z uzależniania C_1 od liczby Ma otrzymuje się niekorzystne z punktu widzenia dokładności wartości wskaźników (4.16) i (4.19). Niżej omówimy wyniki obliczeń współczynników wektora \mathbf{a}_k (4.15).

W pierwszej kolejności podajemy zmiany wartości wskaźników (4.16) i (4.19) w wyniku przyjęcia zerowych wartości wybranych wyrazów \mathbf{a}_k (zal. (4.15)). W tablicy 1 podano przykładowo zmiany wartości ww. wskaźników oraz wartości współczynnika siły nośnej, zależnego od kąta natarcia $C_{z\alpha}$ dla przypadku (a) – macierz \mathbf{T}_A w postaci (5.1), oraz z pominięciem w \mathbf{T}_{Az} następujących wyrazów w przypadku: (b) – δ_h , (c) – δ_h , MaQ/V oraz (d) – δ_h , MaQ/V_1 , Q/V_1 i Ma^2 .

Tablica 1

| | $C_{z\alpha}$ | $R_{kC_{z\alpha}}$ | $S_{kC_{z\alpha}}$ |
|-----|---------------|--------------------|--------------------|
| (a) | - 5.0022 | 0.9988 | 0.2101 |
| (b) | - 4.9001 | 0.9968 | 0.3160 |
| (c) | - 4.9693 | 0.9701 | 2.3411 |
| (d) | - 4.9258 | 0.9589 | 4.8523 |

Po wyznaczeniu wektora \mathbf{a} obliczyć można z (4.7) dla n -tej chwili czasowej wektor $\dot{\mathbf{Y}}_n$. W rozpatrywanym przypadku uzyskano praktycznie całkowitą zgodność wyników obliczeń wektora $\dot{\mathbf{Y}}_n$ z wektorem obliczonym w oparciu o wyniki pomiarów w locie \mathbf{Y}_n .

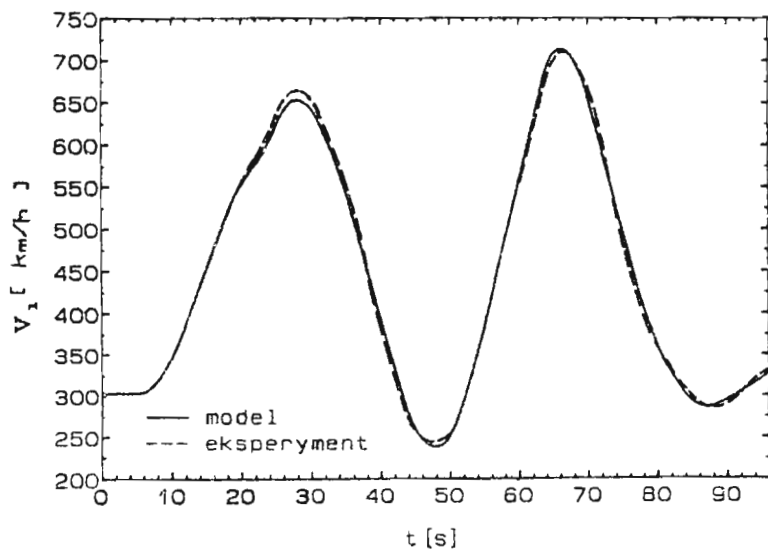
Niżej zamieszczono wyniki uzyskane z rozwiązania równań ruchu samolotu z wykorzystaniem wyznaczonych współczynników sił i momentów sił aerodynamicznych oraz charakterystyki obrotowej silnika. Układ tych równań ma postać:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{U}}_0 &= \mathbf{B}^{-1}(-\mathbf{F}_B + \mathbf{F}) \quad (\text{zal.}(2.6)), \\
 \dot{\boldsymbol{\phi}}_0 &= \mathbf{E}_E^{-1}\mathbf{P}_0 \quad (\text{zal.}(2.4)), \\
 [\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}] &= \mathbf{E}^T[\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}], \\
 \alpha &= \arctg \frac{W}{U}, \\
 \beta &= \arcsin \frac{W}{V}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

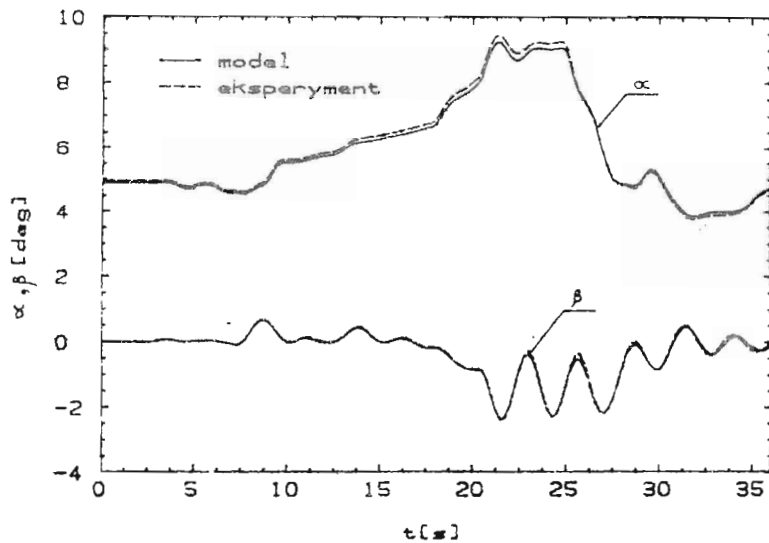
Na Rys.3 pokazano zmianę w czasie prędkości lotu samolotu podczas wiązanki figur akrobacji lotniczej. Linia ciągła (model) dotyczy wyników z rozwiązania (5.3), dla zmian w czasie: kątów wychyleń sterów, obrotów silnika oraz warunków atmosferycznych określonych z pomiarów w locie. Linia przerywana (eksperyment) dotyczy wyników uzyskanych z pomiarów w locie.

Omawiane wyżej wyniki dotyczą przypadku, w którym współczynniki sił i momentów sił aerodynamicznych oraz charakterystyka obrotowa silnika modelu wyznaczone zostały w oparciu o wyniki z pomiarów z ww. wiązanki figur akrobacji.

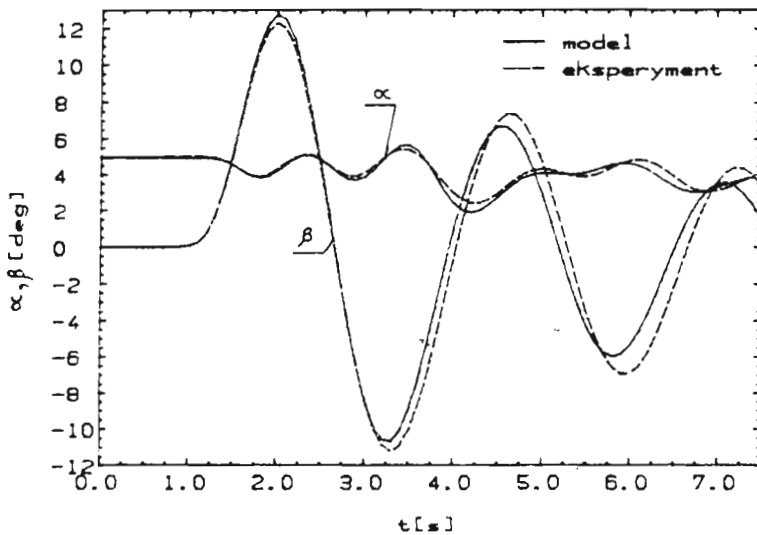
Niżej pokazano zmiany w czasie wybranych parametrów lotu rzeczywistego samolotu i uzyskanych z modelu w zakręcie (Rys.4) oraz po impulsowym wychyleniu



Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.

steru kierunku (Rys.5). Wyników pomiarów z ww. lotów nie wykorzystano w identyfikacji.

6. Uwagi końcowe

Zmieszczone wyniki porównawcze otrzymane z rozwiązania równań ruchu samolotu oraz z pomiarów w locie, wskazują na dobre odwzorowanie rzeczywistego obiektu przez opracowany model, znacznie lepsze niż w pracy [12], co jest rezultatem konsekwentnie stosowanej metody identyfikacji.

Dokładność odwzorowania rzeczywistego obiektu pogarsza się dla lotów, w których wartości wielkości charakteryzujących tor lotu, sterowanie i ich pochodne względem czasu znacznie odbiegają od analogicznych danych z lotu, które wykorzystano do opracowania modelu.

Przedstawiona metoda wyznaczania współczynników równań ruchu samolotu może być między innymi wykorzystana przy opracowywaniu modelu dynamiki lotu samolotu do symulatora lotu.

Literatura

1. BUBNICKI Z., *Identyfikacja obiektów sterowania*, PWN, Warszawa 1974
2. DŻYGADŁO Z., BOLDAK R., *Numerical modelling of the dynamics of aerobatic manoeuvres*, J.Tech.Physics, 26, 2, 1985,
3. CICHOSZ E., *Charakterystyka i zastosowanie napędów*, WKiE, Warszawa 1980
4. ETKIN B., *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York 1972
5. GORBATENKO S.A., *Mechanika poleta*, Maszynostroenie, Moskwa 1969
6. MAŃCZAK K., NAHORSKI Z., *Komputerowa identyfikacja obiektów sterowania*, PWN, Warszawa 1983
7. MANEROWSKI J., *Opracowanie metody badania modeli dynamiki lotu samolotu. Wyniki prób w locie*, ITWL, Warszawa 1986 (praca nie publikowana)
8. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Mechanika nr 32, wyd. PW, Warszawa 1975
9. SCHMÜCKER M., *On the identification of aerodynamic coefficients by means of measured flight loads*, 18th Annual Symposium Proceedings - "Flight Testing World Wide", Amsterdam 1987
10. ZĄBKOWICZ W., *Metoda projektowania systemów pomiarowych do badań samolotów w locie*, Informator ITWL nr 268/87
11. *Metodyka prób samolotów w locie*, MON, Poznań 1978
12. MANEROWSKI J., NOWAKOWSKI M., RYMASZEWSKI ST., *Komputerowy model dynamiki lotu samolotu zweryfikowany próbami w locie*, MTiS 3-4, 28, 1990

Summary

A mathematical model of a subsonic jet aircraft was described with the aid of identification method by means of regression. Measurement results for some linked aerobatic figures were used for the identification. These flight measurement results and the time history of control as in the real flight, obtained for the described model, were presented. Some flight results, not used for the identification, were shown as well.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 marca 1989 roku