

ODDZIAŁ WARSZAWSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI
TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

M E C H A N I K A
W
L O T N I C T W I E

WARSZAWA 1992

**ODDZIAŁ WARSZAWSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI
TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ**

**M E C H A N I K A
W
L O T N I C T W I E**

WARSZAWA 1992

KOMITET NAUKOWY

Prof.dr hab.inż. STANISŁAW DUBIEL

Prof.dr hab.inż. ZBIGNIEW DŻYGADŁO

Prof.dr hab.inż. JERZY MARYNIAK

Wydawnictwo zostało sfinansowane przez:

- Fundacja Nauki Języków Obcych "Linguae Mundi", Centrum Kształcenia Językowego Kadr Bankowych, Warszawa
- Instytut Lotnictwa, Warszawa
- Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa
- Szefostwo Badań i Rozwoju Techniki Wojskowej MON, Warszawa
- Państwowe Zakłady Lotnicze Warszawa Okęcie, Zakład Doświadczalny Samolotów Lekkich i Wyposażenia Agrolotniczych, Warszawa
- Wydział Elektromechaniczny Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa

**Druk – Warszawska Drukarnia Naukowa
Warszawa, ul. Śniadeckich 8**

OBLICZANIE NIESTACJONARNYCH OBCIĄŻEŃ AERODYNAMICZNYCH PROFILU W FUNKCJI ZMIENNYCH STANU¹

JANUSZ NARKIEWICZ

Politechnika Warszawska

JACEK SYRYCZYŃSKI

IDS-PZL, Warszawa

Przedstawiono metodę wyznaczenia niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych profilu lotniczego w funkcji zmiennych stanu, wykorzystującą aproksymację funkcji Theodorsena wielomianami Pade'go. Metoda ta może być stosowana dla dowolnego płaskiego ruchu profilu dla małych kątów natarcia. Przeprowadzone obliczenia przykładowe elementarnego flatteru łopaty wirnika śmigłowca potwierdziły poprawne działanie opracowanego algorytmu.

Wykaz oznaczeń

$A(s), B(s)$	- wielomiany aproksymacyjne Pade'go,
ab	- położenia środka aerodynamicznego,
b	- 0.5 średniej cięciwy aerodynamicznej,
c	- długość cięciwy,
$C(s)$	- uogólniona funkcja Theodorsena,
$h(t)$	- pionowe przemieszczenie profilu,
H^+, H^-	- wydatki źródeł na powierzchni profilu,
I_a	- moment bezwładności przekroju łopaty,
K_a	- sztywność skrętna zredukowana do przekroju łopaty,
K_h	- sztywność giętna zredukowana do przekroju łopaty,

¹Praca wykonana w ramach projektu nr 449/91 finansowego w 1991/92 roku przez Komitet Badań Naukowych i wygłoszona na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

$L(t)$	- całkowita siła nośna,
$L_c(t)$	- cyrkulacyjna część siły nośnej,
$L_{nc}(t)$	- niecyrkulacyjna część siły nośnej,
m	- masa zredukowana przekroju łopaty,
$M(t)$	- całkowity moment aerodynamiczny,
$M_c(t)$	- cyrkulacyjna część momentu aerodynamicznego,
$M_{nc}(t)$	- niecyrkulacyjna część momentu aerodynamicznego,
$Q(t)$	- prędkość opływu na krawędzi spływu,
S_a	- moment statyczny przekroju łopaty,
t, t_1	- czas,
$V(t)$	- prędkość opływu niezaburzonego,
V_0	- średnia prędkość opływu niezaburzonego,
$w(x, t)$	- rozkład prędkości wokół profilu rzeczywistego,
W_0, W_1	- składowe prędkości normalnej do szkieletowej profilu w opływie niecyrkulacyjnym,
$W_a(x, t)$	- całkowita prędkość normalna do profilu,
x	- współrzędna wzdłuż prędkości napływu,
X	- wektor dodatkowych zmiennych stanu, $X = [X_1, X_2]$,
$\alpha(t)$	- kąt natarcia,
$\gamma(\xi, t)$	- gęstość cyrkulacji w śladzie wirowym dla czasu t ,
ξ	- położenie elementu płynu w śladzie wirowym,
θ	- zmienna pomocnicza, $\cos \theta \doteq \frac{x}{b}$ dla $x \in < -b, b >$,
ρ	- gęstość powietrza,
$\varphi(x, t)$	- całkowity potencjał prędkości,
φ_c	- potencjał cyrkulacyjny prędkości,
φ_{nc}	- potencjał niecyrkulacyjny prędkości,
k	- częstość zredukowana,
$\mathcal{L}\{\dots\}$	- przekształcenie Laplace'a,
$\dot{() } = \frac{d()}{dt}$	- pochodna względem czasu,
$I(t)$	- funkcja Heaviside'a.

1. Wprowadzenie

Klasyczne metody obliczania niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych w przestrzeni częstości potwierdziły swoją przydatność w zagadnieniach aerosprę-

żytości samolotów [1,2].

Bezpośrednie zastosowanie tych metod do wiroplątów jest trudne ze względu na leżące u ich podstaw założenia. Głównymi ograniczeniami dla przypadku układów wirujących jest:

- zmienna w czasie prędkość opływu,
- okresowe wymuszenia parametryczne,
- brak jednej dominującej częstości flutteru.

W trakcie opracowania nowych sposobów sterowania łopat wirników śmigłowców pojawiła się potrzeba bardziej niż to robiono dotychczas precyzyjnego modelowania niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych.

Prowadzone są więc prace rozszerzające klasyczne modele aerodynamiki niestacjonarnej [3,4,5]. Głównym celem tych badań jest wyrażenie niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych przez zmienne stanu. Pozwoli to na:

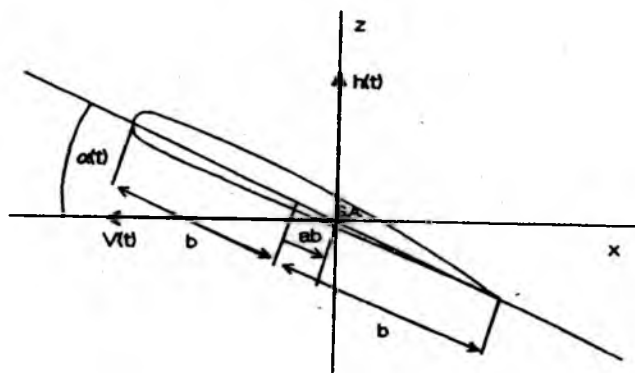
- obliczanie obciążeń dla dowolnego, a więc także nieharmonicznego ruchu profilu,
- bezpośrednie włączenie opracowanych metod do algorytmów jakościowej analizy aeroelastycznej wiroplątów.

W artykule omówiono opracowany na podstawie [3] algorytm wyznaczania niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych na podstawie aproksymowanej funkcji Theodorsena, sposoby przybliżania funkcji Theodorsena oraz przedstawiono wyniki zastosowania tej metody dla analizy obciążeń aerodynamicznych w przypadku skokowej zmiany prędkości opływu oraz dla flutteru elementarnego łopaty śmigłowca.

2. Model opływu

Rozpatrywany jest cienki, mało zakrzywiony profil lotniczy (rys.1) poruszający się ruchem płaskim w płynie nielepkim i nieściśliwym. Prędkość opływu niezaburzonego $V(t)$ jest dowolną funkcją czasu.

Konsekwencją przyjętych założeń jest możliwość wykorzystania wyników teorii małych zaburzeń. Po rozkładzie zagadnienia na symetryczne i niesymetryczne, badane są opływy: niecyrkulacyjny i cyrkulacyjny uzgodnione przez warunek Kutty.



Rys. 1.

2.1. Teoria małych zaburzeń

Zakładając małe: grubość i krzywiznę profilu można wykazać, że potencjał prędkości φ powinien spełniać równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.1)$$

Aby opisać badany opływ równanie to należy rozwiązać z warunkiem brzegowym dla rozkładu prędkości normalnej wzdłuż profilu:

$$w = W_a(x, t). \quad (2.2)$$

Po wyznaczeniu rozkładu potencjału prędkości, można obliczyć obciążenia aerodynamiczne na profilu z zależności:

$$L(t) = 2\rho \int_{-b}^b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx, \quad (2.3)$$

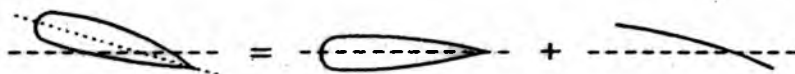
$$M(t) = -2\rho \int_{-b}^b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (x - ab) dx.$$

2.2. Rozkład na zagadnienia: symetryczne i niesymetryczne

Opływ profilu zastępowany jest (rys.2) superpozycją opływów:

- profilu symetrycznego o osi równoległej do przepływu niezaburzonego,

- szkieletowej profilu ustawionej pod kątem $\alpha(t)$ względem przepływu nieza-burzonego.



Rys. 2.

W przypadku profilu symetrycznego rozkład ciśnienia na górnej i dolnej części profilu jest identyczny. Nie powstają więc na nim siła nośna ani moment aerodynamiczny. Obciążenia aerodynamiczne powstają w tylko w przypadku opływu niesymetrycznego szkieletowej profilu.

2.3. Rozkład opływu na niecyrkulacyjny i cyrkulacyjny

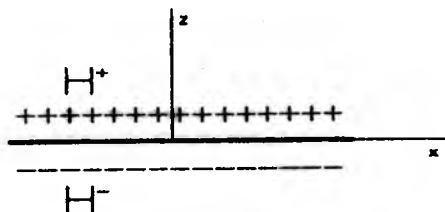
Korzystając z założenia małej krzywizny, opływ szkieletowej profilu rozkładany jest na opływy: niecyrkulacyjny i cyrkulacyjny. Stąd, potencjał prędkości φ jest sumą potencjałów: niecyrkulacyjnego i cyrkulacyjnego:

$$\varphi = \varphi_{nc} + \varphi_c . \quad (2.4)$$

Całkowite obciążenia aerodynamiczne będą także sumami obciążeń niecyrkulacyjnych i cyrkulacyjnych:

$$L(t) = L_{nc}(t) + L_c(t) , \quad (2.5)$$

$$M(t) = M_{nc}(t) + M_c(t) .$$

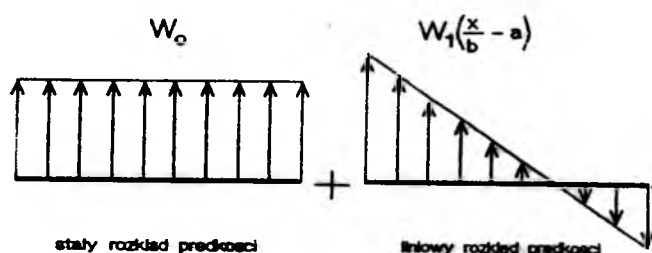


Rys. 3.

Opływ niecyrkulacyjny modelowany jest warstwą pojedynczą, czyli układem źródeł i upustów pokazanych na rys.3. Wydatki H^+ i H^- związane są z rozkładem prędkości normalnej W_a na profilu, tzn.: $H^+ = 2W_a$, $H^- = -2W_a$.

Prędkość normalna do profilu dla ruchu płaskiego może być przedstawiona jako suma dwu rozkładów (rys.4): stałego i liniowego:

$$W_n(x, t) = W_0 + W_1 \left(\frac{x}{b} + a \right). \quad (2.6)$$



Rys. 4.

Potencjał warstwy pojedynczej:

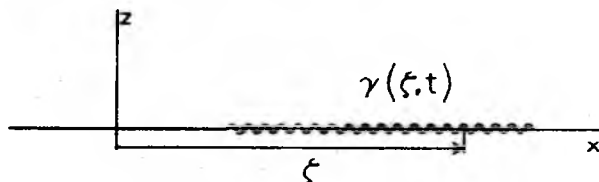
$$\varphi_{nc} = W_0 b \sin \theta + W_0 b \sin \theta (0.5 \cos \theta - a), \quad (2.7)$$

jest rozwiązaniem równania (2.1) z warunkiem brzegowym (2.2). Podstawiając go do zależności (2.3) oblicza się niecyrkulacyjne części siły nośnej i momentu pochylającego:

$$L_{nc}(t) = \pi \rho b (\dot{W}_0 - a \dot{W}_1), \quad (2.8)$$

$$M_{nc}(t) = \pi \rho b^2 \left(V W_0 - a V W_1 + a b \dot{W}_0 - b \dot{W}_1 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \right),$$

Optyw cyrkulacyjny (rys.5) modelowany jest śladem wirowym o rozkładzie gęstości cyrkulacji $\gamma(\xi, t)$. Kształt śladu wirowego wynika z ruchu krawędzi spływu profilu. Zakłada się, że przemieszczenia śladu wirowego w kierunku prostopadłym do wektora prędkości optywu niezaburzonego są małe.



Rys. 5.

Indukowana przez ślad wirowy prędkość normalna:

$$W_a(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi, t)}{x - \xi} d\xi, \quad (2.9)$$

pozwała wyznaczyć potencjał warstwy pojedynczej dla opływu cyrkulacyjnego:

$$\varphi_c = \frac{\gamma(\xi, t)}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{(\zeta - b)(1 + \cos \theta)}{(\zeta + b)(1 - \cos \theta)}}. \quad (2.10)$$

Cyrkulacyjne części obciążeń aerodynamicznych obliczone na podstawie (2.3) wynoszą:

$$L_c(t) = \rho V b \int_0^{x(t)} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b}} \gamma(\xi, t) d\xi, \quad (2.11)$$

$$M_c(t) = \rho V b \int_0^{x(t)} \left(\sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} - \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b}} \right) \gamma(\xi, t) d\xi.$$

2.4. Warunek Kutty

Opływy niecyrkulacyjny i cyrkulacyjny związane są warunkiem Kutty: nie może być skokowej zmiany prędkości na krawędzi spływu. Wynika stąd konieczność zapewnienia, na krawędzi spływu profilu, równości prędkości indukowanej przez opływ cyrkulacyjny (śladowirowy) i prędkości indukowanej przez opływ niecyrkulacyjny (rozkład źródeł i upustów) lub prędkości normalnej do profilu:

$$\frac{1}{2\pi b} \int_0^{x(t)} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \gamma(\xi, t) d\xi = W_0 + W_1 \left(\frac{1}{2} - a \right). \quad (2.12)$$

3. Obciążenia aerodynamiczne w funkcji zmiennych stanu

Dla harmonicznego ruchu profilu obciążenia aerodynamiczne obliczane były w [6,7]. Ślad wirowy modelowano cyrkulacją rozłożoną wzdłuż sinusoidy o małej amplitudzie. Gęstość cyrkulacji była funkcją harmoniczną.

Próbie uogólnienia teorii na dowolny ruch profilu podjęto w [5]. Modyfikacja dotyczyła opływu cyrkulacyjnego.

Podstawę wyznaczania obciążeń stanowią: warunek Kutty (2.12) i równania definiujące obciążenia cyrkulacyjne (2.11).

Wyznaczanie obciążeń aerodynamicznych dokonywane jest w czterech etapach:

1. sprowadzenia równań do postaci splotu funkcji,
2. zastosowania przekształcenia Laplace'a i twierdzenia Borela do wyeliminowania z równań gęstości cyrkulacji,
3. aproksymacji funkcji Theodorsena wielomianami,
4. zastosowania odwrotnego przekształcenia Laplace'a dla wyznaczenia siły nośnej i momentu pochylającego w funkcji czasu.

Zakładając, że zaburzenie opływu rozchodzi się ze średnią prędkością V_0 , położenie elementu płynu w śladzie wirowym określa się jako:

$$\xi = \xi(t - t_1) = b + V_0(t - t_0). \quad (3.1)$$

Podstawiając (3.1) do (2.11) i (2.12) otrzymuje się postać splotową rozważanych równań:

$$\frac{L_c(t)}{2\pi b V(t)} = - \int_0^t [F_2(t - t_1)] [V(t_1)\gamma(t_1)] dt_1, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_c(t)}{2\pi b V(t)} &= \int_0^t \left[F_1(t - t_1) - \left(\frac{1}{2} + a \right) F_2(t - t_1) \right] [V(t_1)\gamma(t_1)] dt_1, \\ - \frac{1}{2\pi b} \int_0^t [F_1(t - t_1)] [V(t_1)\gamma(t_1)] dt_1 &= Q(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$F_1(t - t_1) = \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}}, \quad (3.4)$$

$$F_2(t - t_1) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}}, \quad (3.5)$$

$$Q(t - t_1) = W_0 + W_1 \left(\frac{1}{2} - a \right). \quad (3.6)$$

Po zastosowaniu do równań (3.2) i (3.3) przekształcenia Laplace'a i twierdzenia Borela otrzymuje się równania w dziedzinie obrazu:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{L_c(t)}{\rho V(t)}\right\} = \mathcal{L}\{F_2(t)\}\mathcal{L}\{V(t)\gamma(t)\}, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{M_c(t)}{\rho b V(t)}\right\} = \left[\frac{1}{2}\mathcal{L}\{F_1(t)\} - \left(\frac{1}{2} + a\right)\mathcal{L}\{F_2(t)\}\right]\mathcal{L}\{V(t)\gamma(t)\},$$

$$\mathcal{L}\{F_1(t)\}\mathcal{L}\{V(t)\gamma(t)\} = -2\pi b Q(s). \quad (3.8)$$

Równania (3.7) i (3.8) można traktować jako układ trzech równań algebraicznych z trzema niewiadomymi wyrażeniami: $V(t)\gamma(t)$, $L_c(t)/(\rho V(t))$ i $M_c(t)/(\rho b V(t))$.

Eliminując z tych równań wyrażenie $V(t)\gamma(t)$ i wprowadzając uogólnioną funkcję Theodorsena:

$$C(s) = \frac{\mathcal{L}\{F_2(t)\}}{\mathcal{L}\{F_1(t)\}}, \quad (3.9)$$

otrzymuje się dwa równania na obciążenia aerodynamiczne w przestrzeni obrazu:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{L_c(t)}{\rho V(t)}\right\} = 2\pi b C(s) Q(s), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{M_c(t)}{\rho b V(t)}\right\} = 2\pi b \left[-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + a\right)C(s)\right] Q(s).$$

Bezpośrednie znalezienie odwrotnej transformacji równań (3.10) jest trudne ze względu na skomplikowaną postać funkcji Theodorsena.

4. Aproksymacja funkcji Theodorsena

Aby obliczyć transformację odwrotną równań (3.10), funkcję Theodorsena aproksymuje się w taki sposób, aby było możliwe znalezienie odwrotnej transformaty dla funkcji przybliżonej.

Proponowane w [3] przybliżenie polega na zastąpieniu funkcji Theodorsena ilorazem wielomianów Pade'go zmiennej zespolonej s :

$$C(s) = \frac{A(s)}{B(s)}. \quad (4.1)$$

Wprowadzenie dodatkowej zmiennej stanu $X(s)$ zdefiniowanej jako iloraz:

$$X(s) = \frac{Q(s)}{B(s)}. \quad (4.2)$$

umożliwia znalezienie odwrotnej transformacji Laplace'a równań (3.10).

Przez podstawienie (4.1) i (4.2) do (3.10) otrzymuje się obciążenia aerodynamiczne w przestrzeni czasu:

$$L_c(t) = 2\pi\rho V(t)b\mathcal{L}^{-1}\{A(s)X(s)\}, \quad (4.3)$$

$$M_c(t) = \left(\frac{1}{2} + a\right)bL_c(t) - \pi\rho V(t)b^2\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}. \quad (4.4)$$

Dodatkowa zmienna stanu $X(s)$ we wzorach (4.3) i (4.4) jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego, które otrzymuje się w wyniku transformacji prawej strony (4.2) do przestrzeni czasu. Rząd otrzymanego w ten sposób równania różniczkowego jest równy rzędowi wielomianu aproksymującego $B(s)$.

5. Wyniki obliczeń przykładowych

W celu zilustrowania stosowania algorytmu obliczania obciążeń aerodynamicznych podane zostały dwa przykłady różnych aproksymacji funkcji Theodorsena. Aproksymacje te zostały obliczone dla ruchu harmonicznego w ten sposób aby możliwie dobrze przybliżały przebieg funkcji Theodorsena w przestrzeni częstości przy możliwie niskim rzędzie aproksymacji.

Obliczenia przeprowadzono dla aproksymacji pierwszego i drugiego rzędu. Na rysunkach 6 ÷ 12 liniami przerywanymi zaznaczono wyniki obliczeń dla aproksymacji pierwszego rzędu, a ciągłymi dla aproksymacji drugiego rzędu.

5.1. Przykład 1

Aproksymacja wielomianami Pade'go pierwszego rzędu:

$$C(s) = \frac{0.81s + 0.04}{s + 0.04}.$$

Dodatkowa zmienna stanu X jest rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$\dot{X}(t) + 0.04X(t) = Q(t).$$

Obciążenia aerodynamiczne oblicza się z następujących zależności:

$$L_c(t) = 2\pi bV(t)(0.81V_0X(t) + 0.04),$$

$$M_c(t) = \left(\frac{1}{2} + a\right)bL_c(t) - \pi\rho V(t)b^2Q(t).$$

5.2. Przykład 2

Aproksymacja wielomianami Pade'go drugiego rzędu:

$$C(s) = \frac{0.5s^2 + 0.2808s + 0.1365}{s^2 + 0.3455s + 0.01365}.$$

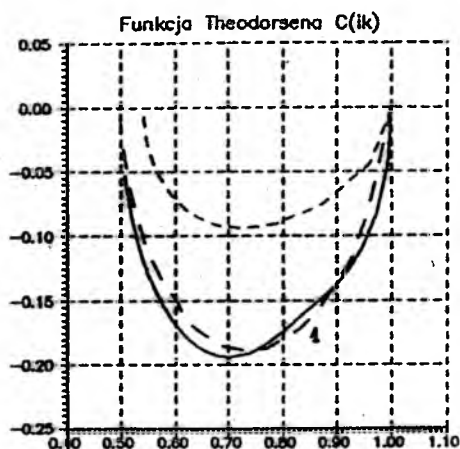
W tym przypadku dodatkowe zmienne stanu X_1 i X_2 są rozwiązaniami układu dwu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01365V_0^2 & -0.3455V_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ Q(t) \end{bmatrix}.$$

Obciążenia aerodynamiczne oblicza się z następujących zależności:

$$L_c(t) = 2\pi bV(t)(0.006885V_0^2 X_1(t) + 0.10805V_0^2 X_2(t)) + \rho V(t)Q(t),$$

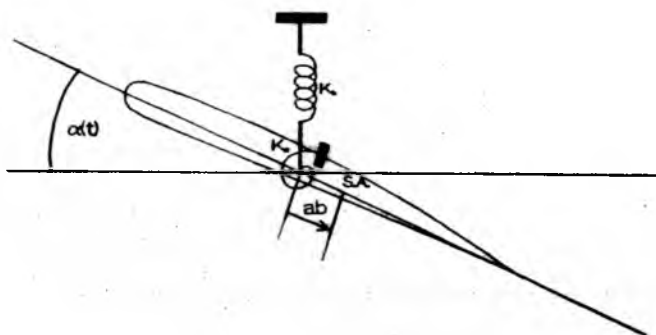
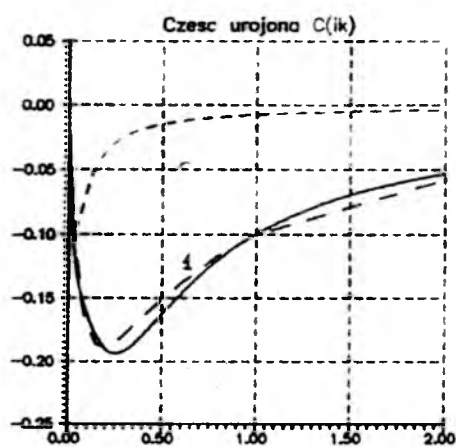
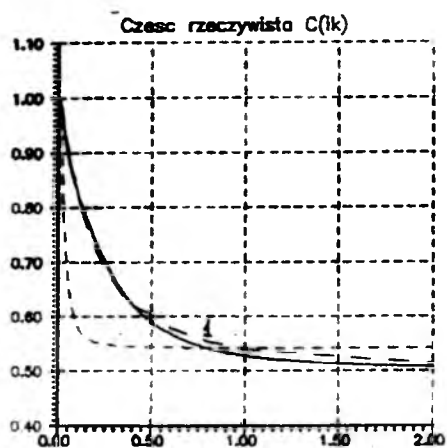
$$M_c(t) = \left(\frac{1}{2} + a\right)bL_c(t) - \pi\rho V(t)b^2Q(t).$$



Rys. 6.

Na rys.6 zostały pokazane sparametryzowane przez częstość drgań aproksymowane funkcje Theodorsena obliczone dla obu przykładów.

Na rys.7 i 8 przedstawiono części rzeczywiste i urojone tych funkcji. Dodatkowo wyniki aproksymacji porównano z nieaproksymowaną funkcją Theodorsena (krzywa 1).



Obliczenia flatteru elementarnego łopaty wirnika śmigłowca przeprowadzono dla modelu fizycznego pokazanego na rys.9. Równania ruchu przekroju mają postać:

$$m\ddot{h} + S_a\ddot{\alpha} + K_h(h, \alpha) = F,$$

$$S_a\ddot{h} + I_a\ddot{\alpha} + K_a(h, \alpha) = M - abF.$$

Dane liczbowe obliczeń flatteru podano w Tabeli I.

Przyjęto, że predkość opływu jest harmoniczną funkcją czasu:

$$V(t) = 97 + 30 \sin(26.78t).$$

Tabela I

masa zredukowana przekroju łopaty	$m = 9.5 \text{ [kg/m]}$
moment statyczny przekroju łopaty	$S_a = 0.059 \text{ [kg]}$
moment bezwładności przekroju łopaty	$I_a = 0.072 \text{ [kgm]}$
długość cięciwy	$c = 0.44 \text{ [m]}$
gęstość powietrza	$\rho = 0.125 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
szywność zredukowana giętą	$K_h = 7949.9 \text{ [N/m}^2\text{]}$
szywność zredukowana skrętna	$K_a = 783.8 \text{ [N/rad]}$
odległość środka aerodynamicznego od środka skręceń	$a = 0.0 \text{ [m]}$

Na rys.10 i 11 pokazano zmiany kąta nastawienia α i wychylenia h w funkcji czasu otrzymane dla dwu aproksymacji funkcji Theodorsena.

Wykonano także obliczenia dla skokowej zmiany predkości opływu:

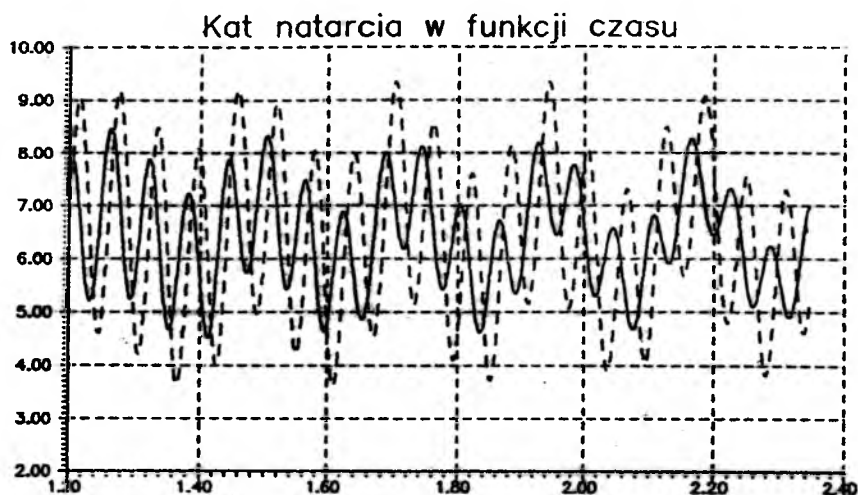
$$V(t) = 97 + 35I(t - 93).$$

Przebiegi obciążeń aerodynamicznych pokazano na rys.12 i 13.

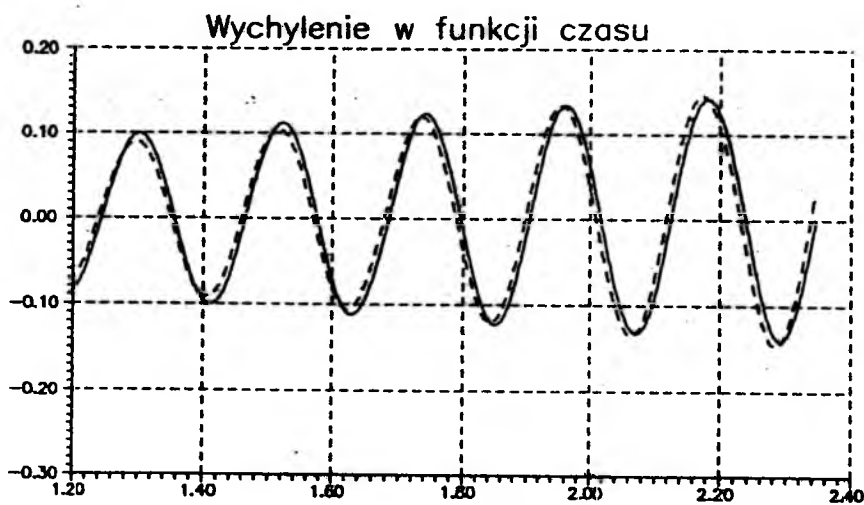
6. Podsumowanie

Przedstawiono metodę wyznaczania obciążeń aerodynamicznych profilu poruszającego się ruchem płaskim, gdy predkość opływu jest dowolną funkcją czasu. Metoda, wykorzystująca aproksymację funkcji Theodorsena, obowiązuje dla przypadku małych zaburzeń opływu.

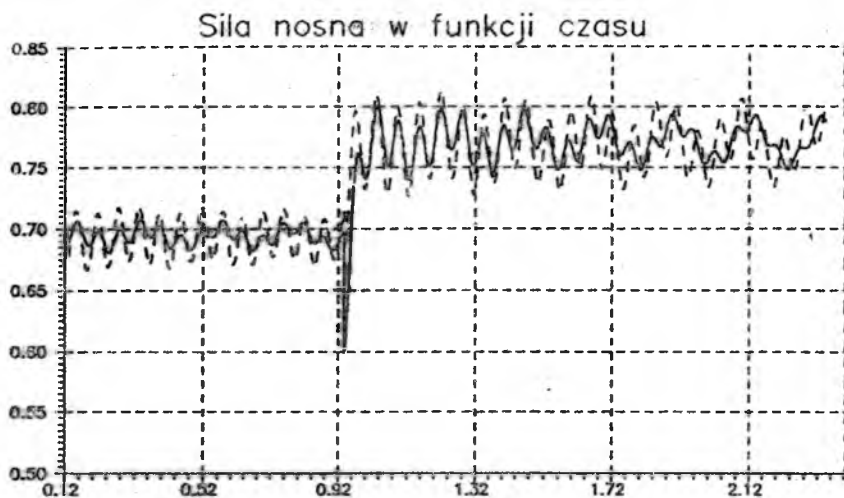
Pokazano możliwość zastosowania tej metody do wyznaczania obciążeń łopaty wirnika nośnego śmigłowca.



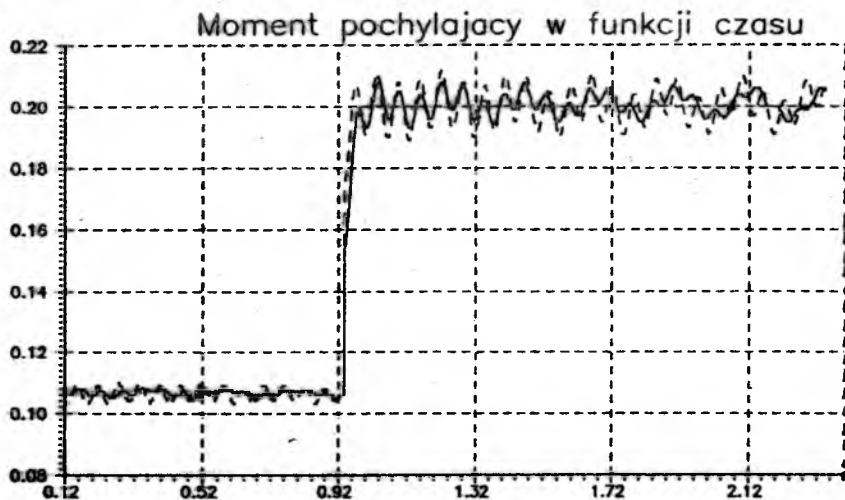
Rys. 10.



Rys. 11.



Rys. 12.



Rys. 13.

Literatura

1. BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., HALFMAN R.L., 1955, *Aeroelasticity*, Addison Weseley Publishing Company Inc.
2. DOWELL E.H., CURTIS H.C., SCANLAN R.H., SISTO F., 1978, *A Modern Course in Aeroelasticity*, Sijthoff & Noordhoff
3. DINYAVARI M.A.H., FRIEDMANN P.P., 1986, *Application of Time-Domain Unsteady Aerodynamics to Rotary Wing Aeroelasticity*, AIAA Journal, 24, 9
4. TOROK M.S., 1989, *Rotor Loads and Stability Analysis Using Non-Linear Unsteady Aerodynamics*, Ph.D. Thesis, University of Maryland
5. VAN DER WALL B.G., 1991, *The Influence of Variable Flow Velocity on Unsteady Airfoil Behavior*, M.Sc. Thesis, University of Maryland
6. THEODORSEN T., 1935, *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Rep., 496
7. GREENBERG K.M., 1947, *Airfoil in Sinusoidal Motion in a Pulsating Stream*, NACA Rep., 1326

OBLICZANIE STRAT CAŁKOWITYCH TURBULENTNEGO PRZEPŁYWU W DYFUZORACH PIERŚCIENIOWYCH¹

KRZYSZTOF J. JESIONEK

Politechnika Wrocławska

Przedstawiono metodę obliczeń warstwy przyściennej w przepływie dyfuzorowym, zapewniającą wysoką zbieżność wyników teoretycznych z rezultatami badań doświadczalnych. Podano równanie ogólne, oraz na jego podstawie odpowiednie wyrażenie szczegółowe dla poddźwiękowych dyfuzorów pierścieniowych. Zaproponowany sposób nie wymaga korzystania z dodatkowych, eksperymentalnych współczynników korekcyjnych.

1. Wstęp

W wielu urządzeniach oraz układach maszynowych związanych z ruchem płynu wylania się często potrzeba opóźnienia przepływu. Z tego też względu ważnym elementem większości maszyn i dynamicznych systemów przepływowych jest dyfuzor. W elemencie tym strumień rozszerza się i energia kinetyczna płynu napływającego z dużą prędkością ulega w pewnym stopniu konwersji w energię potencjalną. Najważniejszym celem dyfuzora jest więc zamiana możliwie największej części ciśnienia dynamicznego strumienia wlotowego na ciśnienie statyczne.

W lotniczych silnikach turbinowych zastosowanie dyfuzora, umieszczonego za wirnikiem turbiny spalinowej, powiększa rozporządzalny spadek entalpii stopnia. Dyfuzor więc spełnia rolę podobną do skraplacza parowej turbiny kondensacyjnej. Bardzo ważnym zagadnieniem jest takie zaprojektowanie tego kanału, aby nie wystąpiło w nim zjawisko oderwania warstwy przyściennej. Wtedy bowiem nie jest efektywnie wykorzystywana, pod względem przepływowym, przestrzeń dyfuzorowa. W wyniku oderwania spada znacznie odtworzenie ciśnienia statycznego. Ujemne oddziaływanie wspomnianego zjawiska dotyczy zarówno części silnika przed dyfuzorem (zmniejsza się bowiem rozporządzalny spadek entalpii stopnia turbiny spalinowej), jak i bezpośrednio za nim (wprowadzenie niekorzystnych warunków przepływowych poprzez znaczne odkształcenia pól prędkości np w dopalaczu lub też w dyszy wylotowej).

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Sprecyzowanie optymalnych, dla danego zastosowania, parametrów geometrycznych dyfuzora jest bardzo trudne, ponieważ jego osiągi zależą od wielu zmiennych. Obecny poziom mechaniki płynów umożliwia teoretyczne określenie zachowania się dyfuzora tylko dla najprostszych przypadków.

Przewidywanie warunków przepływu w dyfuzorach jest nadal nie rozwiązany problemem w mechanice płynów. Najważniejszym komplikującym zagadnieniem jest tutaj obecność skierowanego przeciwnie do kierunku strumienia płynu gradientu ciśnienia statycznego, którego dokładny wpływ na rozkład prędkości nie daje się ująć metodami analizy matematycznej. Problem staje się coraz trudniejszy w miarę wzrostu złożoności konstrukcji kanału dyfuzorowego. Pojawia się bowiem wtedy coraz więcej bezwymiarowych parametrów geometrycznych których oddziaływanie na warunki przepływu w dyfuzorze powinno być najpierw poznane, a następnie uwzględnione w procesie projektowania.

2. Straty całkowite

Bilans energetyczny dla poddźwiękowego przepływu dyfuzorowego można w najprostszej postaci zapisać w sposób następujący [1,2]:

$$\zeta_{1-2} + \zeta_w + C_{p1-2} = 1, \quad (2.1)$$

gdzie:

- ζ_{1-2} – współczynnik strat wewnętrznych na odcinku pomiędzy przekrojami kontrolnymi: wlotowym – 1 i wylotowym – 2,
- ζ_w – współczynnik straty wylotowej,
- C_{p1-2} – współczynnik przyrostu ciśnienia statycznego.

Strata całkowita, która jest sumą strat wewnętrznych (tarcia i oderwania) i straty wylotowej określona jest przez współczynnik:

$$\zeta_c = \zeta_{1-2} + \zeta_w, \quad (2.2)$$

który może być także wyrażony w postaci równania A.S.Ginevskiego [3]:

$$\zeta_c = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \frac{1}{n^2(1 - \Delta_2^2)^2}, \quad (2.3)$$

gdzie:

- ρ – gęstość przepływającego czynnika,
 n – stopień rozwarcia dyfuzora (stosunek pól przekrojów wylotowego A_2 do wlotowego A_1),
 $\bar{\Delta}_2^*$ – względna powierzchnia przepływu odpowiadająca stracie wydatku. Z definicji, dla i -tego przekroju:

$$\bar{\Delta}_i^* = \frac{\Delta_i^*}{A_i} = \int_0^1 \left(1 - \frac{c'_i}{c_i}\right) \frac{dA}{A_i}, \quad (2.4)$$

przy czym dodatkowo wprowadzone wielkości to:

- Δ_i^* – miara powierzchniowa straty wydatku,
 c'_i – prędkość lokalna,
 c_i – prędkość czynnika w rdzeniu potencjalnym.

Dla niewielkich przyrostów ciśnienia w dyfuzorze, zmiana gęstości jest do pominięcia. Ponieważ wtedy $\rho_1 \approx \rho_2$, więc:

$$\zeta_c = \frac{1}{n^2(1 - \bar{\Delta}_2^*)^2}. \quad (2.5)$$

Przytoczone zależności są ważne dla przypadku wyrównanego profilu prędkości w przekroju wlotowym.

3. Równanie ogólne dla przepływu dyfuzorowego

Względną powierzchnię przepływu odpowiadającą stracie wydatku można także wyznaczyć w sposób teoretyczny na podstawie np ogólnej zależności dla turbulentnego przepływu w kanałach dyfuzorowych, wyprowadzonej w pracy [4]:

$$\bar{\Delta}_2^* = \frac{0.0288 H L n^3 (1 - \bar{\Delta}_2^*)^3}{\text{Re}_L^{0.2} A_2 \Pi_2^{-1}} \int_0^1 \bar{\Pi}_i \frac{(A_1/A_i)^{2.8}}{(1 - \bar{\Delta}_2^* \bar{x}^{0.8})^{2.8} \bar{x}^{0.2}} d\bar{x}, \quad (3.1)$$

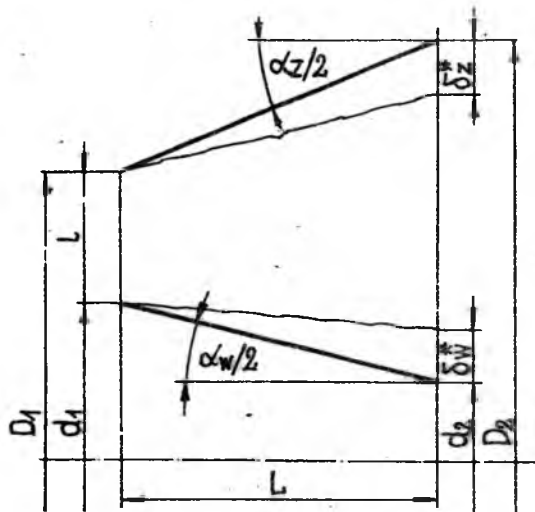
gdzie:

- L – długość dyfuzora,
 x – współrzędna analizowanego przekroju, rys.1,
 $\bar{x}$ – bezwymiarowa współrzędna, $\bar{x} = x/L$,
 Π – obwód przekroju poprzecznego kanału,
 H – parametr kształtu warstwy przyściennej, $H = \delta^*/\delta^{**}$,
 δ^* – miara liniowa straty wydatku,
 δ^{**} – miara liniowa straty pędu,
 δ – grubość warstwy przyściennej, rys.1,
 α – kąt rozwarcia dyfuzora, rys.1.

Równanie (3.1) daje możliwość teoretycznego obliczenia wartości względnej powierzchni $\bar{\Delta}_2^*$ w przekroju wylotowym dowolnego kanału dyfuzorowego pod warunkiem, że nie zachodzi w nim zjawisko oderwania warstwy przyściennej i zachowany jest jeszcze rdzeń potencjalny.

4. Model przepływu dla dyfuzora pierścieniowego

Rozpatrując przypadek stosowanej często w maszynach osiowych klasy kanałów dyfuzorowych jakimi są dyfuzory pierścieniowe, należy odpowiednio przekształcić zaproponowane równanie ogólne. W tym celu do zależności (3.1) podstawia się, mając na uwadze rysunek 1, następujące wyrażenia charakterystyczne:



Rys. 1. Geometria dyfuzora pierścieniowego

$$\Pi_2 \frac{1}{A_2} = (\pi D_2 + \pi d_2) \frac{1}{\frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{4}{D_2 - d_2}, \quad (4.1)$$

$$n = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4}}{\frac{\pi D_1^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{D_2^2 - d_2^2}{D_1^2 - d_1^2}, \quad (4.2)$$

$$\bar{\Pi}_i = \frac{\Pi_i}{\Pi_2} = \frac{\pi D_i + \pi d_i}{\pi D_2 + \pi d_2} = \frac{D_i + d_i}{D_2 + d_2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{A_i}{A_1} = \frac{\frac{\pi D_i^2}{4} - \frac{\pi d_i^2}{4}}{\frac{\pi D_1^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{D_i^2 - d_i^2}{D_1^2 - d_1^2}. \quad (4.4)$$

Teraz, wykorzystując proste zależności geometryczne, określić można odpowiednie wyrażenia opisujące średnice lokalne:

$$D_i = D_1 \left[1 + \bar{x} (\sqrt{n_z} - 1) \right], \quad (4.5)$$

a także:

$$d_i = d_1 \left[1 + \bar{x} (\sqrt{n_w} - 1) \right], \quad (4.6)$$

gdzie:

$$n_z = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2, \quad (4.7)$$

jest stopniem rozwarcia stożka zewnętrznego, oraz:

$$n_w = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2, \quad (4.8)$$

dla stożka wewnętrznego.

W związku z powyższym, wykorzystując (4.5) oraz (4.6), zależności (4.3) i (4.4) można przedstawić w sposób następujący:

$$\bar{\Pi}_i = \frac{D_1 \left[1 + \bar{x} (\sqrt{n_z} - 1) \right] + d_1 \left[1 + \bar{x} (\sqrt{n_w} - 1) \right]}{D_2 + d_2}, \quad (4.9)$$

oraz:

$$\frac{A_i}{A_1} = \frac{D_1^2 \left[1 + \bar{x} (\sqrt{n_z} - 1) \right]^2 + d_1^2 \left[1 + \bar{x} (\sqrt{n_w} - 1) \right]^2}{D_1^2 - d_1^2}. \quad (4.10)$$

Zależności (4.1), (4.2), (4.9) i (4.10) podstawia się teraz do ogólnego równania (3.1), a następnie, po wykonaniu szeregu przekształceń dochodzi się do postaci:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_2^* &= B_s n^2 \left(1 - \bar{\Delta}_2^* \right)^3 \underbrace{D_1 (D_1^2 - d_1^2)^{1.8}}_{\int_0^1 \left(\frac{D_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_z} - 1)] + d_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_w} - 1)]}{D_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_z} - 1)] - d_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_w} - 1)]} \right)^{-1.8} d\bar{x}} \\ &\quad \underbrace{\left(\frac{D_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_z} - 1)] + d_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_w} - 1)]}{D_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_z} - 1)] - d_1 [1 + \bar{x} (\sqrt{n_w} - 1)]} \right)^{2.8}}_{(1 - \bar{\Delta}_2^{*0.8})^{2.8} \bar{x}^{0.2}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dla analizowanego przypadku obliczeń aerodynamicznych dyfuzora, wygodniej jest posługiwać się liczbą Reynoldsa, w której charakterystycznym wymiarem liniowym nie jest długość kanału L , tylko średnica przekroju wlotowego D_1 . Dlatego też w miejsce:

$$Re_L = \frac{c_1 L}{\nu}, \quad (4.12)$$

gdzie: ν – kinematyczny współczynnik lepkości, wprowadza się liczbę:

$$\text{Re}_{D_1} = \frac{c_1 D_1}{\nu}, \quad (4.13)$$

wykorzystując następującą zależność pomiędzy nimi:

$$\text{Re}_L = \frac{L}{D_1} \text{Re}_{D_1}. \quad (4.14)$$

W rezultacie w równaniu (4.11) wystąpi współczynnik B_s , który zdefiniowany jest przez następującą zależność:

$$B_s = \frac{0.1152H}{\text{Re}_{D_1}^{0.2}} \left(\frac{L}{D_1} \right)^{0.8}. \quad (4.15)$$

Dla uogólnienia przeprowadzanych rozważań wygodniej jest posługiwać się bezwymiarowymi parametrami geometrycznymi. W tym celu przyjąć można, na przykład wymiar D_1 na rysunku 1 jako podstawowy, i do niego odnosić wszystkie pozostałe występujące w równaniu (4.11) średnice i długości. Postępując zgodnie z powyższym, oraz wykorzystując zależności (4.7) i (4.8), można zaznaczoną część wyrażenia (4.11) zapisać w sposób następujący:

$$D_1 \left[D_1^2 \left(1 - \frac{d_1^2}{D_1^2} \right) \right]^{1.8} \cdot \int_0^1 \frac{D_1^{-1.8} \left\{ [1 + \bar{x}(\frac{D_2}{D_1} - 1)] + \frac{d_1}{D_1} [1 + \bar{x}(\frac{d_2}{D_1} - 1)] \right\}^{-1.8}}{D_1^{2.8} \left\{ [1 + \bar{x}(\frac{D_2}{D_1} - 1)] - \frac{d_1}{D_1} [1 + \bar{x}(\frac{D_2}{D_1} - 1)] \right\}^{2.8}} d\bar{x}.$$

Uwzględniając natomiast, że:

$$\frac{d_1}{D_1} = \bar{d}_1, \quad (4.16)$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \bar{D}_2, \quad (4.17)$$

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2 \cdot D_1}{d_1 \cdot D_1} = \frac{\bar{d}_2}{\bar{d}_1}, \quad (4.18)$$

oraz upraszczając wyłączone uprzednio przed nawiasy średnice D_1 , równanie (4.11) doprowadzić można do postaci:

$$\bar{\Delta}_2^* = B_s n^2 (1 - \bar{\Delta}_2^*)^3 (1 - \bar{d}_1^2)^{1.8}. \quad (4.19)$$

$$\int_0^1 \frac{\left\{ [1 + \bar{x}(\bar{D}_2 - 1)] + \bar{d}_1 + \bar{x}(\bar{d}_2 - \bar{d}_1) \right\}^{-1.8} \bar{x}^{-0.2} d\bar{x}}{\left\{ [1 + \bar{x}(\bar{D}_2 - 1)] - \bar{d}_1 - \bar{x}(\bar{d}_2 - \bar{d}_1) \right\}^{2.8} (1 - \bar{\Delta}_2^* \bar{x}^{0.8})^{2.8}}.$$

Zwraca uwagę fakt, że powyższe wyrażenie wyprowadzone na podstawie ogólnej postaci zaproponowanego równania (3.1) ma nieco prostszą formę, aniżeli podobna zależność otrzymana na podstawie całkowego związku Karmana przez M.E.Dejczę i A.E.Zarjankina [1], gdzie po szeregu przekształceń otrzymuje się:

$$\bar{\delta}_2^* \approx \bar{\Delta}_2^* = B \frac{(\bar{D}_2^2 - \bar{d}_2^2)^{3.34} (1 - \bar{\Delta}_2^*)^{3.34}}{\bar{D}_2^2 (\bar{D}_2^2 - \bar{d}_2^2) (1 - \bar{d}_1^2)^{0.2}} \quad (4.20)$$

$$\cdot \left[\int_0^1 \frac{[1 + \bar{x}(\bar{D}_2 - 1)]^{1.25} (1 - \bar{\Delta}_2^* \bar{x}^{0.5})^{-3.92} d\bar{x}}{\left\{ [1 + \bar{x}(\bar{D}_2 - 1)]^2 - \bar{d}_1^2 \left[1 + \bar{x} \left(\frac{\bar{d}_2}{\bar{d}_1} - 1 \right) \right]^2 \right\}^{3.92}} \right]^{0.8}$$

przy czym:

$$B = \frac{0.144H}{\text{Re}_l^{0.2}} \left(\frac{L}{D_1} \right)^{0.8} \quad (4.21)$$

Przeprowadzając natomiast podobny wywód według metody Zarjankina otrzymano w pracy [1]:

$$\bar{\Delta}_2^* = B_k n^{0.2} (1 - \bar{\Delta}_2^*)^3 \frac{(1 + \bar{d}_1)(\bar{D}_2 - \bar{d}_2)^{3.8}}{D_2 + \bar{d}_2} \quad (4.22)$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{\left([1 + \bar{x}(\bar{D}_2 - 1)]^2 - [\bar{d}_1 + \bar{x}(\bar{d}_2 - \bar{d}_1)]^2 \right)^{-1} d\bar{x}}{[(1 - \bar{d}_1) + \bar{x}(\bar{D}_2 - 1) + \bar{d}_1 - \bar{d}_2](1 - \bar{\Delta}_2^* \bar{x}^{0.5})^{2.8}}$$

gdzie:

$$B_k = \frac{0.0576H}{\text{Re}_l^{0.2}} \left(\frac{L}{D_1} \right)^{0.8} \frac{D_2}{l_2} \quad (4.23)$$

przy czym, zgodnie z oznaczeniami zamieszczonymi na rys.1:

$$D_2 \text{ sr} = \frac{D_2 + d_2}{2} \quad (4.24)$$

$$l_2 = \frac{D_2 - d_2}{2} \quad (4.25)$$

5. Zakończenie

Wykorzystując równanie (4.11) oraz zależność (2.5) i (4.15) określić można współczynnik strat całkowitych dla dyfuzorów pierścieniowych. Konieczna jest w

tym celu znajomość parametru kształtu H warstwy przyściennej. W analizowanym przypadku zastosowano empiryczną zależność podaną w pracach [1] i [2]:

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = 1.4 \left[1 + \frac{\sqrt{n} - 1}{\left(\frac{L}{h}\right)^{0.2}} \right]. \quad (5.1)$$

Przed obliczeniami wartości współczynnika strat całkowitych, należy za pomocą odpowiednich kryteriów [5,6] i [7] sprawdzić, czy w kanale dyfuzorowym nie występuje zjawisko oderwania. Wtedy prezentowany sposób umożliwia wyznaczenie wartości ζ_c z dokładnością rzędu $0 \div 10 \%$ w stosunku do wyników badań eksperymentalnych, a więc z dokładnością błędu pomiaru. Dokładność ta jest także nieco lepsza od obydwu wyżej wspomnianych metod.

6. Literatura

1. DEJČ M.E., ZARJANKIN A.E., 1970, *Gazodinamika diffuzorov i vychlopnykh patrubkov turbomašin*, Izdatelstvo Energija, Moskva
2. DEJČ M.E., ZARJANKIN A.E., 1984, *Gidrogazodinamika*, Energoatomizdatelstvo, Moskva
3. GINEVSKIJ A.S., 1965, *O rasčete gidravličeskogo soprotivlenija kanalov s bezotryvnym i otrivnym tečeniem*, Inżynerno-fizičeskij Žurnal, VIII, No 4, s.540-545
4. JESIONEK K.J., 1992, *Analiza nieściśliwego przepływu dyfuzorowego i powstających strat*, Prace Naukowe Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej Nr 43, Seria: Monografie, Nr 21, Wrocław
5. JESIONEK K.J., ZARJANKIN A.E., 1992, *Straty całkowite przepływu turbulentnego w dyfuzorach stożkowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 1154, Seria: Mechanika Nr 107, XXXI Sympozjon: Modelowanie w Mechanice, Politechnika Śląska i PTMTS (Oddział w Gliwicach), Wisła, s.173-180
6. JESIONEK K.J., ZARJANKIN A.E., 1991, *Kryterium oderwania przepływu od gładkiej powierzchni*, Politechnika Łódzka, Instytut Maszyn Przepływowych, Konferencja: SYMKOM '91, Compressor & Turbine Stage Flow Path, Theory, Experiment & User Verification, Bronisławów
7. ZARJANKIN A.E., JESIONEK K.J., 1989, *Model vzniknovenija otriva pograničnogo sloja ot stenok kanala*, Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej, Seria: Preprinty nr 9/89, Konferencja: Hydroturbo '89 Conference, Brno
8. ZARJANKIN A.E., JESIONEK K., 1990, *O ocenie granicznej wartości wzdlużnego gradientu ciśnienia zapewniającego przepływ bez oderwania strumienia wzdluż gładkiej powierzchni*, Mechanika Płynów, IX Konferencja Krajowa, Sekcja Mechaniki Płynów Komitetu Mechaniki Polskiej Akademii Nauk, Kraków, s.405-410

BADANIA MOŻLIWOŚCI ZNAECZNEJ REDUKCJI WYBRANEJ POCHODNEJ WSPÓŁCZYNNIKA MOMENTU ZAWIASOWEGO STERU WYSOKOŚCI NA DRODZE MODYFIKACJI JEGO GEOMETRII¹

ZYGMUNT WYSOCKI

Instytut Lotnictwa, Warszawa

1. Wstęp

Prace badawcze mające na celu, ogólnie rzecz biorąc, optymalizację geometrii elementów sterowania samolotu z punktu widzenia charakteru, przebiegów i wartości współczynnika momentu zawiasowego oraz jego pochodnych względem kąta natarcia α i wychylenia steru δ_H są istotnym elementem eksperymentów tunelowych.

Z reguły wymagają one indywidualnego, specyficznego podejścia. Zależy ono zarówno od geometrii badanej konfiguracji jak i od wymagań narzuconych przez konstruktora.

Tematem niniejszych rozważań będzie określenie możliwości znacznego zmniejszenia wartości pochodnej b_2 współczynnika momentu zawiasowego $C_{\delta H}$ steru wysokości względem kąta jego wychylenia δ_H , na drodze zmian geometrii steru.

2. Omówienie założeń eksperymentu

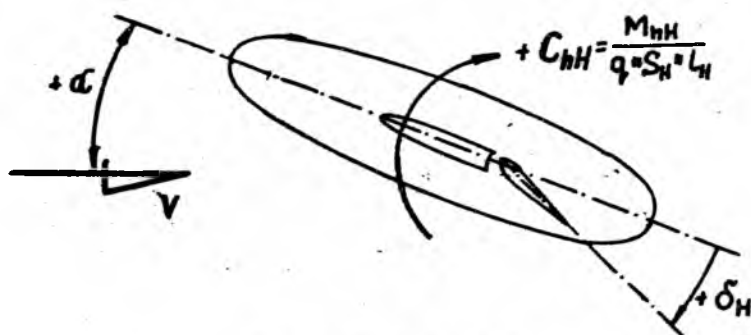
Eksperyment został przeprowadzony w tunelu ϕ 1.5 m na modelu w skali 1:4 izolowanego usterzenia wysokości, w układzie odniesienia przedstawionym na rys.1.

Ogólna geometria usterzenia widoczna jest na kolejnym rysunku, rys.2, zaś rys.3 i rys.4 są natomiast ilustracją badanych modyfikacji steru wysokości.

Pierwotnym układem była konfiguracja, w której ster miał nosek kołowy (NK), kompensacja osiowa wynosiła zaś $K_0 = 25\%$.

W wyniku wcześniejszych, tak eksperymentów jak i analizy teoretycznej, dokonano modyfikacji geometrii noska, nie zmieniając kompensacji steru:

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Układ odniesienia

— modyfikację tą ($NM\ 1$) określono tak, by w zakresie niewielkich kątów wychYLENIA steru $\delta_H = \pm 5^\circ$ opóźnić wyjście noska z obrysu profilu teoretycznego — było to podyktowane wymaganiami związanymi z dużymi prędkościami.

Dla obu powyższych konfiguracji osiągnięto wprowadzić poprawny charakter liniowości przebiegów $C_{RH} = f(\alpha)$ w dość szerokim zakresie kątów wychYLENIA δ_H jak też zbliżoną do wymaganej wartość pochodnej $\partial C_{RH} / \partial \alpha$, to równocześnie jednak wartość pochodnej $\partial C_{RH} / \partial \delta_H$ była zdecydowanie zbyt wysoka $b_2 = -0.0060\ [1/\text{deg}]$ (przy zadawalającej jednakże liniowości przebiegu zależności $C_{RH} = f(\delta_H)$).

- Wymagane przez konstruktorów wartości pochodnych współczynnika momentu zawiasowego określono na poziomie:

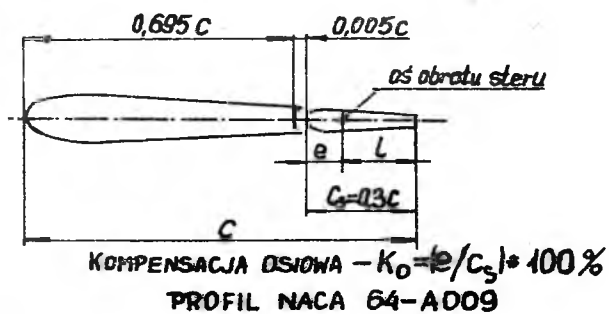
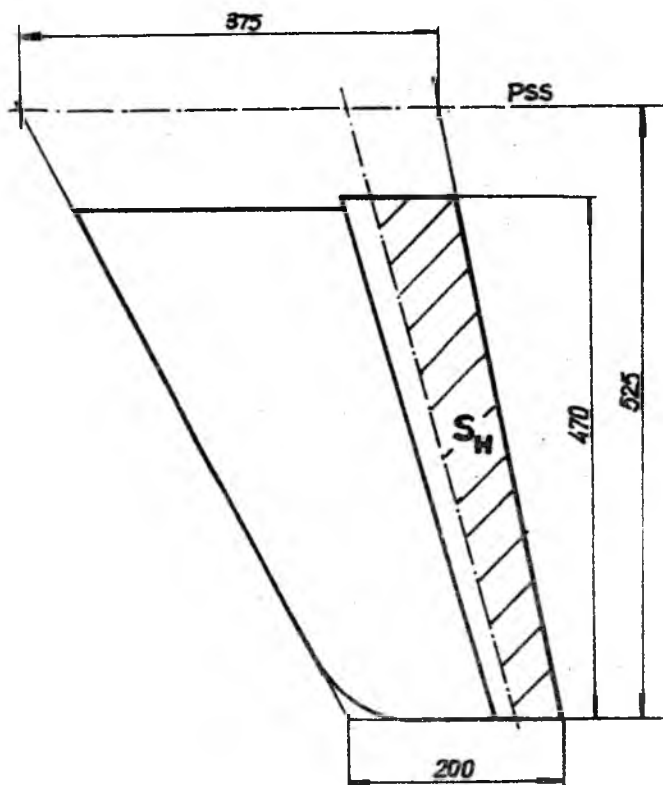
$$b_1 = -0.00075[1/\text{deg}]$$

$$b_2 = -0.00600[1/\text{deg}]$$

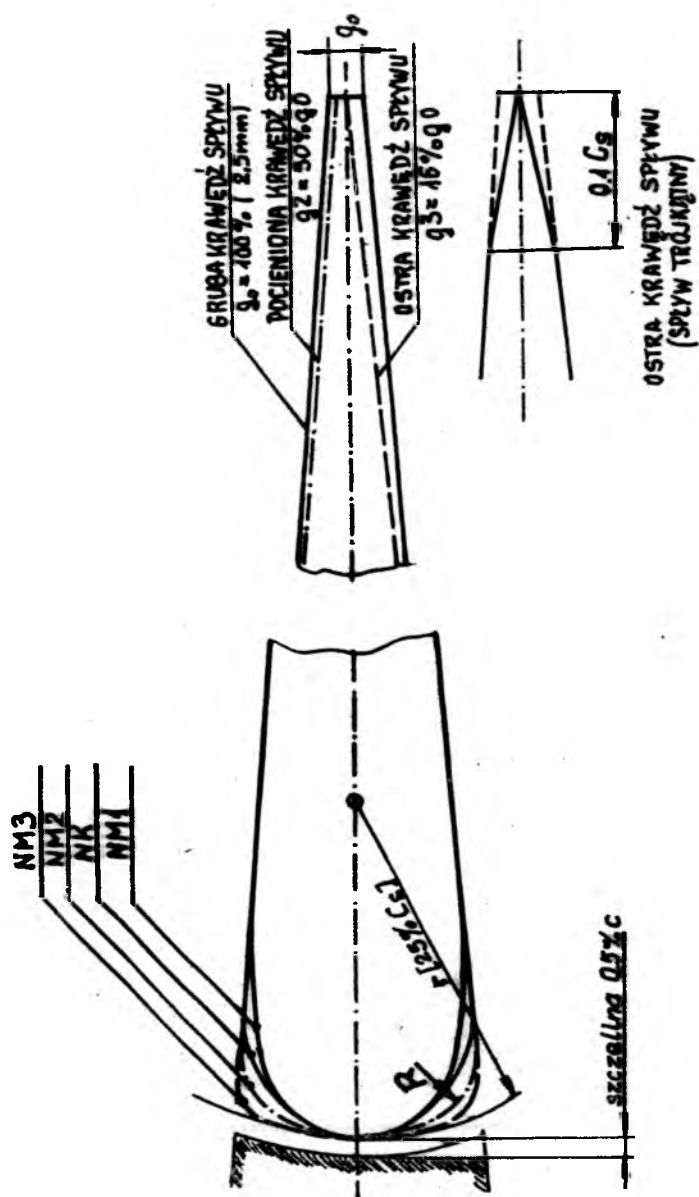
dla zakresu $Ma = 0.2 - 0.3$.

Przeprowadzone badania jak i obliczenia wskazywały, że osiągnięcie wymaganych wartości pochodnych tak względem kąta natarcia α jak i kąta wychYLENIA δ_H byłoby możliwe dopiero przy znacznych wartościach kompensacji osiowej $K_0 > 30\%$. Mogłoby to jednak doprowadzić do przekompensowania steru.

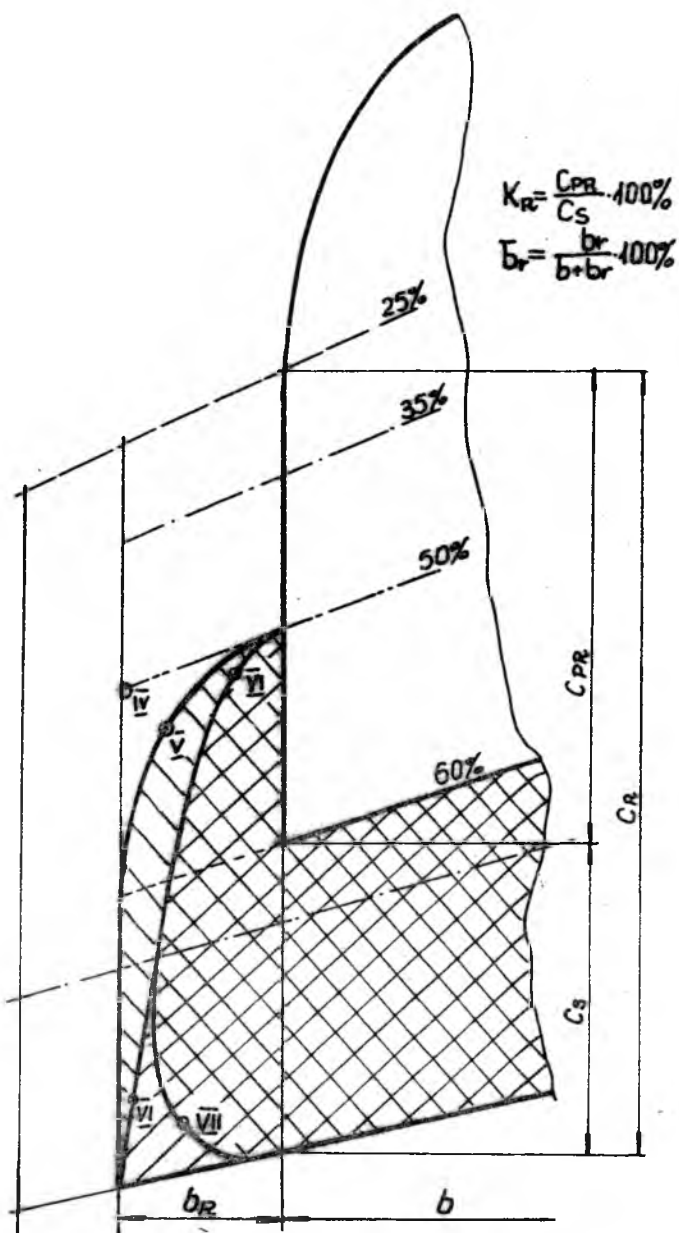
Istotnym zatem zagadnieniem było dążenie do znacznego zmniejszenia wartości pochodnej b_2 i zapewnienie liniowości charakterystyk $C_{RH} = f(\delta_H)$, bez konieczności tak radykalnych zmian K_0 .



Rys. 2. Geometria usterzenia wysokości



Rys. 3. Porównanie kształtów badanych wariantów steru wysokości



Rys. 4. Geometria badanych wariantów kompensacji rogowej

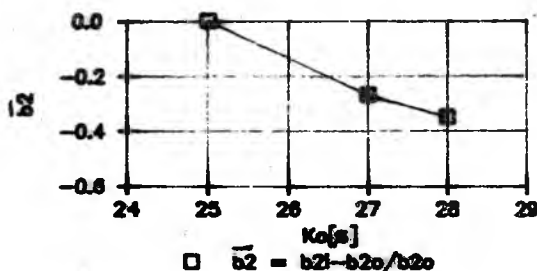
Przeprowadzono badania i analizę zmian wartości b_2 dla następujących modyfikacji geometrii steru:

- zmiana kompensacji osiowej steru,
- zmiana kształtu noska steru,
- zmiana grubości krawędzi spływu steru,
- wprowadzenie i modyfikacja geometrii kompensacji rogowej steru.

3. Krótkie omówienie wyników prac badawczych

Wpływ poszczególnych czynników geometrycznych na zmiany pochodnej b_2 współczynnika momentu zawiasowego przedstawiono na kolejnych rysunkach rys.5 ÷ 7 w postaci uogólnionych zależności. Na rys.8 przedstawiono natomiast wpływ zmian geometrii kompensacji rogowej na zmiany wartości b_2 badanego usterzenia.

3.1. Wpływ kompensacji osiowej

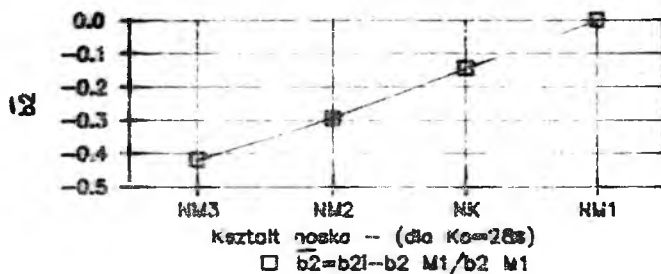


Rys. 5. Wpływ kompensacji osiowej

Wzrost kompensacji osiowej wpływa na zmniejszenie bezwzględnych wartości pochodnych b_1 i b_2 , przy czym zmiany te są silniejsze dla pochodnej b_2 .

Dla badanego izolowanego usterzenia wysokości wzrost kompensacji osiowej z $K_0 = 25\%$ na $K_0 = 28\%$ powoduje spadek pochodnej b_2 do poziomu c.a. $0.7 \div 0.75$ wariantu wyjściowego (rys.5).

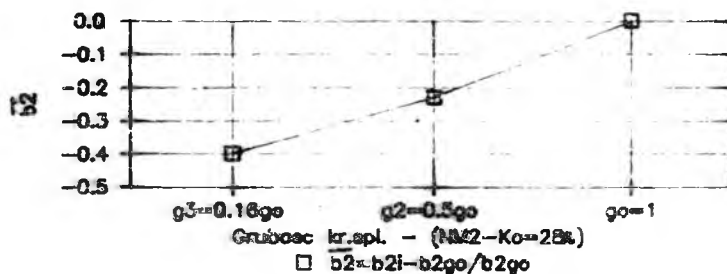
3.2. Wpływ kształtu noska steru



Rys. 6. Wpływ zmiany kształtu noska

Zaproponowane modyfikacje nosków *NM 2* i *NM 3* polegały na stopniowym wypełnianiu noska (jak na rys.3). Modyfikacje te w istotny sposób wpłynęły na spadek pochodnej b_2 współczynnika momentu zawiasowego izolowanego usterzenia wysokości – do poziomu $0.6 \div 0.7$ wartości wyjściowej (rys.6).

3.3. Wpływ grubości krawędzi spływu



Rys. 7. Wpływ grubości krawędzi spływu

Dotychczas przedstawione zależności były przede wszystkim wynikiem badań poszczególnych konfiguracji steru z grubą krawędzią spływu – stałą na całej rozpiętości steru. ($g_0 = 2.5$ mm na modelu, 10 mm na samolocie – odpowiadało to orientacyjnie 1.25% cięciwy końcowej usterzenia zaś 0.7% jego cięciwy przykadłubowej).

Zdecydowano się na przeprowadzenie badań mających ustalić możliwości zmniejszenia pochodnej b_2 poprzez pocienienie krawędzi spływu – stopniowo do 50% i 16% grubości wyjściowej g_0 .

Zaobserwowano znaczny, korzystny wpływ zmniejszania grubości krawędzi spływu na wartość analizowanej pochodnej b_2 (rys.7).

Osiągnięty końcowy poziom wartości pochodnej b_2 (odpowiadający c.a. $0.6 \div 0.8$ wartości przy g_0) spełniał w zadowalający sposób wymagania konstruktorów.

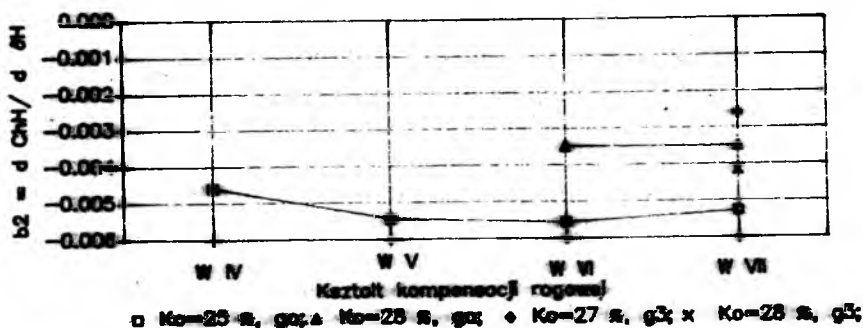
Uzyskano je dla dwu następujących wariantów:

- pierwszy – z krawędzią spływu $0.5g_0$, noskiem NM 3 przy $K_0 = 27\%$;
- drugi – z krawędzią spływu $0.16g_0$, nieco mniej wysklepionym noskiem NM 2 lecz przy wyższej kompensacji $K_0 = 28\%$.

Dla powyższych wariantów steru wysokości otrzymano również liniowość przebiegu charakterystyk $C_{\alpha H} = f(\alpha)$ i $C_{\delta H} = f(\delta_H)$ w szerokim zakresie kątów natarcia i wychylenia steru (rys.9 i 10).

Niezależnie od przedstawionych wyżej zmian grubości krawędzi spływu, zastosowano także krawędź spływu o ostrym, trójkątnym charakterze (rys.3). Wprawdzie pochodna b_2 spełniała założone wymagania lecz charakter zmian zależności $C_{\alpha H} = f(\alpha)$ był dość silnie nieliniowy.

3.4. Wpływ kompensacji rogowej



Rys. 8. Wpływ kształtu kompensacji rogowej

Przebadano również, w ograniczonym zakresie, wpływ zmian geometrii kompensacji rogowej na charakter przebiegu zależności współczynnika momentu zawieszowego w funkcji kątów natarcia α i wychylenia steru δ_H .

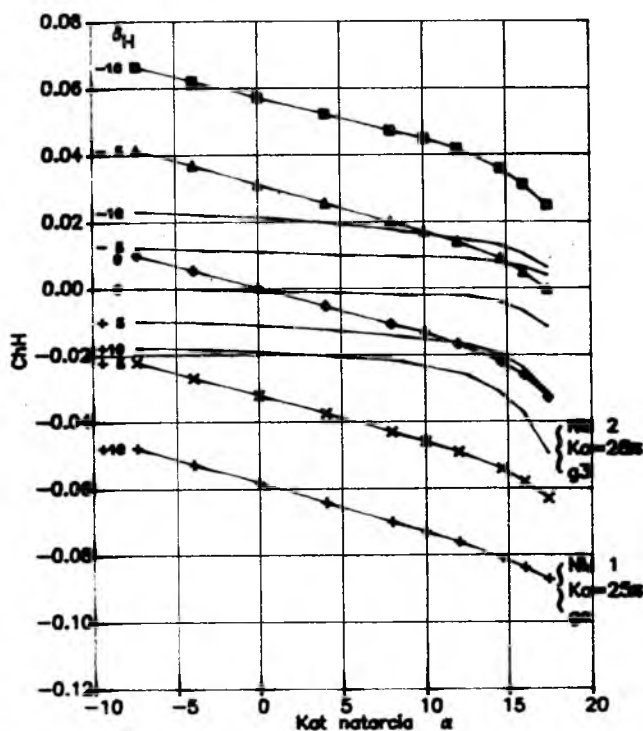
Począwszy od wariantu noszącego oznaczenie W IV uzyskano liniowość przebiegów charakterystyk $C_{\alpha H} = f(\alpha)$ i $C_{\delta H} = f(\delta_H)$ w szerokim zakresie tak kątów α jak i δ_H .

Nie zaobserwowano jednak istotnego wpływu zrealizowanych zmian geometrii kompensacji rogowej na wartości pochodnych b_1 i b_2 .

Warto jednak zaznaczyć, że wartość pochodnej b_1 była niewielka i spełniała założenia konstruktorów.

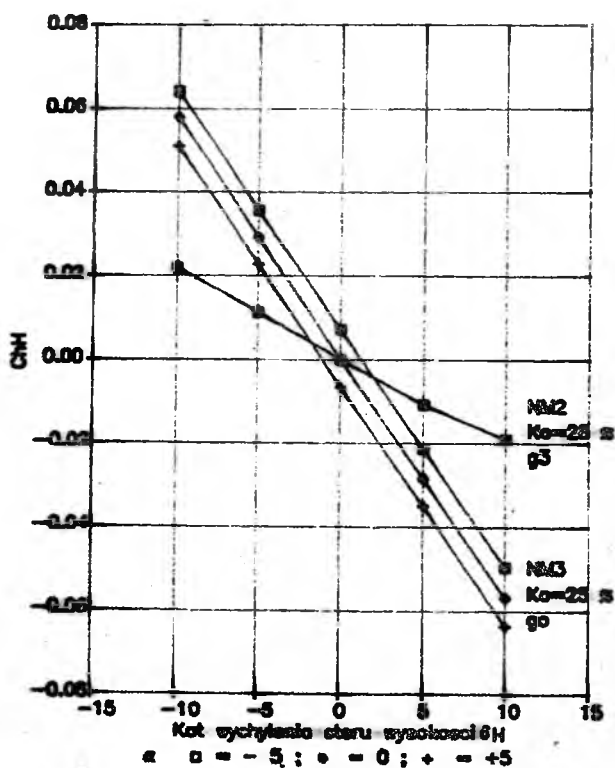
Dopiero łączne zastosowanie kompensacji rogowej, wyższych kompensacji osiowych jak i pocienienie krawędzi spływu pociągnęło za sobą znaczny spadek wartości pochodnej b_2 .

Można zatem stwierdzić, że, z punktu widzenia celu pracy, zastosowanie, takich jak zrealizowano, zmian geometrii kompensacji rogowej, nie przyniosło oczekiwanych efektów w postaci spadku b_2 .



Rys. 9. Zależności $C_{hH} = f(\alpha)$

Na wykresach przedstawionych na rys.9 i 10 zaprezentowano przebiegi $C_{hH} = f(\alpha)$ i $C_{hH} = f(\delta_H)$ uzyskane dla wariantu wyjściowego oraz jednego z wytypowanych wariantów spełniających założone wymagania.

Rys. 10. Zależności $C_{hH} = f(\delta_H)$

W poniższej tabeli zamieszczono natomiast zmiany wartości pochodnych b_1 i b_2 dla wybranych wariantów modyfikacji badanego steru wysokości.

Badany wariant	$\partial C_{hH} / \partial \alpha$	$\partial C_{hH} / \partial \delta_H$
NM 1; $K_0 = 25\%$ g_0	-0.0015	-0.0057
NM 2; $K_0 = 28\%$ g_3	-0.0002	-0.0021
W VII; $K_0 = 27\%$ g_3	$\cong 0$	-0.0026

4. Wnioski

Z przedstawionej powyżej analizy wyników widać, że poprzez zastosowanie

proponowanych modyfikacji geometrii steru wysokości takich jak zmiana kształtu noska i grubości krawędzi spływu, możliwe jest znaczne zmniejszenie wartości pochodnej b_2 . Modyfikacje te zapewniają także liniowość przebiegu charakterystyk tak $C_{hH} = f(\alpha)$ jak i $C_{hH} = f(\delta_H)$.

Osiągnięcie pożądaných wartości pochodnej b_2 wymaga, w przypadku badanego steru wysokości, zastosowania wyższej od wyjściowej wartości kompensacji osiowej.

Należy jednak dodać, że przedstawione wyżej warianty modyfikacji geometrii steru są korzystne w zakresie małych prędkości.



SOKÓŁ MS

ŚMIGŁOWIEC
MYŚLIWSKO-
SZTURMOWY



INSTYTUT LOTNICTWA

O PEWNEJ METODZIE UPRASZCZANIA MODELU RUCHU SAMOŁOTU¹

MARIA A. ZŁOCKA

Politechnika Warszawska

Modele ruchu stosowane do badania własności dynamicznych korkociagu samolotu nie zawsze mogą być wykorzystane w pełnej formie. Konieczne są uproszczenia modelu w przypadku wymagania aby czas symulacji ruchu był zbliżony do czasu rzeczywistego lotu. W pracy zaproponowano zastosowanie metody badania wpływu uproszczeń modelu na symulowany ruch.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

α	- wektor stałych współczynników,
B	- macierz w równaniach wrażliwości,
C_D	- opór aerodynamiczny,
C_L	- siła nośna,
C_{l_q}	- bezwymiarowa pochodna momentu pochylającego względem bezwymiarowej składowej prędkości kątowej q ,
C_x	- bezwymiarowy współczynnik siły aerodynamicznej względem osi Ox ,
C_{x_k}	- bezwymiarowa pochodna siły względem bezwymiarowej składowej prędkości kątowej, $k = p, q, r$,
$C_{x_{\delta_j}}$	- bezwymiarowa pochodna siły względem kątów wychyleń powierzchni sterowych,
C_z	- bezwymiarowy współczynnik siły względem osi Oz ,
F_0	- wektor główny sił,
g	- przyspieszenie ziemskie,
h	- wysokość lotu,
J_x, J_y, J_z	- momenty bezwładności,
J_{xz}	- moment dewiacji,
K_0	- wektor krętu,

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

L, M, N	-	współrzędne momentu sił w układzie $Oxyz$,
P, Q, R	-	współrzędne wektora prędkości kątowej,
p, q, r	-	bezwymiarowe współrzędne wektora prędkości kątowej,
Ω	-	wektor prędkości kątowej,
T	-	siła ciągu,
t	-	czas,
x	-	wektor stanu,
X, Y, Z	-	współrzędne wektora sił w układzie $Oxyz$,
X_P, X_Q, X_R	-	pochodne siły względem składowych prędkości kątowej,
V_0	-	prędkość środka masy samolotu,
α	-	kąt natarcia,
β	-	kąt ślizgu,
δ_j	-	kąt wychylenia powierzchni sterowej,
λ_k	-	bezwymiarowy współczynnik aerodynamiczny,
Θ, Φ, Ψ	-	kąty Eulera - lotnicze.

1. Wstęp

Ruchowi samolotu w atmosferze towarzyszy wiele skomplikowanych zjawisk, których dzisiejszy poziom nauki nie pozwala jeszcze w pełni uwzględnić. Konieczne są zatem uproszczenia modelu. Dotyczą one, zależnie od rozpatrywanego ruchu, stopni swobody, opływu lub postaci działających sił. Założenie, że samolot jest ciałem sztywnym z ruchomymi ale nieodkształcalnymi układami sterowania pozwala zredukować liczbę stopni swobody do sześciu, a opływ samolotu traktować jako quasi-stacjonarny. Zmiana położenia powierzchni sterowych w przyjętym modelu wpływa na siły aerodynamiczne, nie wpływa na parametry masowe, które uważa się za stałe. Siły aerodynamiczne, które w rzeczywistości zależą w skomplikowany sposób od kształtu samolotu i jego ruchu, dla dowolnego przestrzennego lotu wyznacza się w przybliżony sposób w oparciu o współczynniki aerodynamiczne, otrzymane z obliczeń numerycznych i pomiarów doświadczalnych [2,9]. Sposób obliczania sił znacząco wpływa na czas wykonywanej symulacji numerycznej ruchu samolotu. W przypadku wymagania aby czas symulacji ruchu był zbliżony do czasu rzeczywistego lotu konieczne są dalsze uproszczenia modelu. Istotnym staje się problem wpływu uproszczeń na symulowany ruch.

2. Przyjęte układy odniesienia

W celu wyprowadzenia równań ruchu samolotu zostały przyjęte dwa rodzaje układów współrzędnych: układ inercjalny i układy nieinercjalne związane z samolotem. Układ inercjalny $Zhsd$ związany jest z Ziemią, której ruch pominięto. W układzie tym określone jest położenie środka masy samolotu względem Ziemi. Jest on układem kartezjańskim prawoskrętnym, równoległym do nieinercjalnego układu zwanego układem grawitacyjnym, w którym jedna oś ma kierunek i zwrot przyspieszenia ziemskiego. Układ grawitacyjny wraz z dwoma pośrednimi układami i układem podstawowym "dynamicznym" $Oxyz$ sztywno – związanym z samolotem wyznaczają kąty Eulera – lotnicze [2]. Oś Ox układu podstawowego leży w płaszczyźnie symetrii samolotu i jest równoległa do średniej cięciwy aerodynamicznej. Oś Oy poprowadzona jest wzdłuż prawego skrzydła. Układ podstawowy jest układem kartezjańskim prawoskrętnym. Macierz transformacji z układu grawitacyjnego do układu $Oxyz$ ma postać:

$$L_{dg} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \cos \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Współczynniki aerodynamiczne wyznaczone metodą badań tunelowych podane są w układzie związanym z opływem modelu. Wyznaczenie macierzy transformacji dowolnego wektora z układu aerodynamicznego (związanego z opływem) wymaga zdefiniowania kąta natarcia α i kąta ślizgu β :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{W}{U}\right) & -\Pi \leq \alpha \leq \Pi, \\ \beta &= \arcsin\left(\frac{V}{V_0}\right) & -\Pi \leq \beta \leq \Pi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie U , V i W są współrzędnymi wektora prędkości samolotu $V_0 = [U, V, W]^T$ w układzie $Oxyz$.

Po uwzględnieniu powyższych założeń macierz:

$$L_{da} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

jest macierzą transformacji z układu aerodynamicznego (tunelowego) do układu $Oxyz$.

3. Równania ruchu samolotu w locie przestrzennym

Dynamiczne równania ruchu samolotu zostały wyprowadzone przy zastosowaniu podstawowych twierdzeń:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}_0}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}_0 &= \mathbf{F}_0, \\ \frac{d\mathbf{K}_0}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}_0 &= \mathbf{M}_0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

gdzie:

- $\mathbf{P}_0$ – pęd samolotu $\mathbf{P}_0 = m\mathbf{V}_0$,
- $\mathbf{K}_0$ – wektor krętu względem początku układu współrzędnych $Oxyz$,
- $\frac{d\mathbf{P}_0}{dt}, \frac{d\mathbf{K}_0}{dt}$ – pochodne lokalne,
- $\mathbf{F}_0$ – główny wektor sił $\mathbf{F}_0 = [X, Y, Z]^T$,
- $\mathbf{M}_0$ – moment sił liczony względem początku układu $\mathbf{M}_0 = [L, M, N]^T$,
- $\boldsymbol{\Omega}$ – prędkość kątowna samolotu $\boldsymbol{\Omega} = [P, Q, R]^T$.

Po uwzględnieniu płaszczyzny symetrii samolotu równania ruchu samolotu można sporowadzić do postaci normalnej:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= -QW + RV + \frac{X}{m}, \\ \dot{V} &= -RU + PW + \frac{Y}{m}, \\ \dot{W} &= -PW + QU + \frac{Z}{m}, \\ \dot{P} &= \left(\frac{J_x - J_z}{J_x} - \frac{J_{xz}}{J_x J_z} \right) \frac{QR}{D} + \left(1 - \frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \frac{J_{xz} PQ}{J_x D} + \frac{L}{J_x D} + \frac{J_{xz} N}{J_x J_z D}, \\ \dot{Q} &= \frac{M}{J_y} + \frac{J_z - J_x}{J_y} PQ + \frac{J_{xz}}{J_y} (R^2 - P^2), \\ \dot{R} &= \left(\frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} - \frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \frac{PQ}{D} + \left(\frac{J_y - J_z}{J_x} - 1 \right) \frac{J_{xz} QR}{J_x D} + \frac{J_{xz} L}{J_x J_z D} + \frac{N}{J_z D},\end{aligned}\tag{3.2}$$

gdzie:

- J_x, J_y, J_z – momenty bezwładności,
- J_{xz} – moment dewiacji,

$$D = 1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}.$$

Do układu (3.2) należy dołączyć związki kinematyczne:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi \sec \Theta & \cos \Phi \sec \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ -\dot{s} \\ -\dot{h} \end{bmatrix} = L_{dg}^{-1} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix},$$

tworzące razem układ dwunastu nieliniowych równań różniczkowych, w którym dziewięć jest wzajemnie zależnych i można je przedstawić w postaci wektorowej:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \delta(t), \mathbf{a}), \quad (3.4)$$

gdzie:

$\mathbf{x} = [U, V, W, P, Q, R, \Theta, \Phi, h]^T$ jest wektorem stanu,

$\delta = [\delta_L, \delta_V, \delta_H, T]^T$ jest wektorem sterowania, w którym współrzędne to kąty wychyleń powierzchni sterowych (rys.1) i siła ciągu,

$\mathbf{a}$ jest wektorem stałych parametrów.

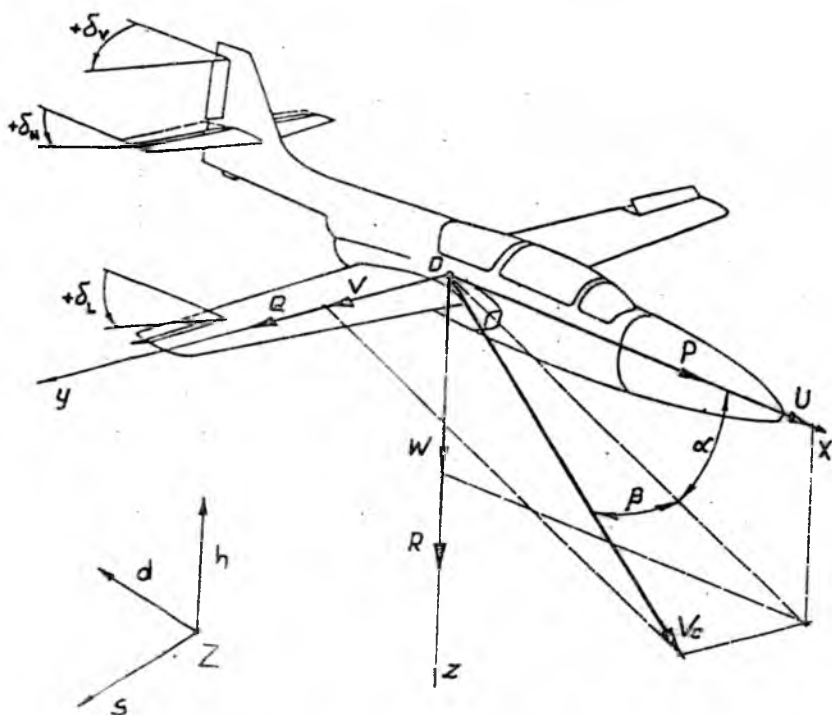
Trzy ostatnie współrzędne wektora stanu sprzęgnięte są z pozostałymi w równaniu (3.4) przez siłę ciężkości i siły aerodynamiczne. Pozostałe równania z układu (3.2) uwzględniane są jeżeli konieczne jest określenie położenia samolotu w przestrzeni, lub jeżeli wymaga tego prawo sterowania.

4. Siły i momenty aerodynamiczne

Wyznaczenie sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot jest istotnym problemem w symulacji numerycznej i badaniu własności dynamicznych ruchu samolotu. W przypadkach dowolnego przestrzennego ruchu, szczególnie na dużych kątach natarcia siły te zależą w skomplikowany sposób od kształtu samolotu, wychyleń powierzchni sterowych, prędkości, kątów natarcia i ślizgu. Składową siły (3.1) można przedstawić jako sumę:

$$\mathbf{X} = \sum_i \mathbf{X}_i(\alpha, \beta, V_0, \Omega, \delta_j, \mathbf{a}_k) \quad (4.1)$$

sił pochodzących od poszczególnych części samolotu [9], w której δ_j jest współrzędną wektora sterowania (3.4), $\mathbf{a}_k$ jest współrzędną wektora parametrów. Opracowane do tej pory metody (teoretyczne i doświadczalne) nie wyznaczają dokładnie tych sił dla dowolnego przestrzennego ruchu samolotu, szczególnie dla ruchu na



Rys. 1. Przyjęty układ współrzędnych

nadkrytycznych kątach natarcia. W przypadku tym stosuje się metodę superpozycji [2,9], w myśl której siłę (3.4) można przedstawić:

$$\begin{aligned}
 X = & -mg \sin \theta + X_\alpha(\alpha, \beta) + \sum X_{\delta_j}(\alpha, \beta) \delta_j + X_P(\alpha, \beta) P + \\
 & + X_Q(\alpha, \beta) Q + X_R(\alpha, \beta) R + T_x + \dots,
 \end{aligned}
 \quad (4.2)$$

gdzie:

$$X_P = \frac{\partial X}{\partial P}, \quad X_Q = \frac{\partial X}{\partial Q}, \quad X_R = \frac{\partial X}{\partial R},$$

T_x - składowa siły ciągu względem osi $0x$.

Składowe w równaniu (4.2) wyznaczone są na podstawie badań tunelowych i badań w locie, w których określone są bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne [2,3,4]:

$$C_x(\alpha, \beta) = \frac{X_\alpha(\alpha, \beta)}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 S}, \quad (4.3)$$

$$C_{x_{\delta_j}}(\alpha, \beta) = \frac{X_{\delta_j}(\alpha, \beta)}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S} \quad j = H, L, V, \quad (4.4)$$

$$C_{x_k}(\alpha, \beta) = \frac{X_k(\alpha, \beta)}{\frac{1}{4}\rho V_0^2 S c} \quad k = P, Q, R, \quad (4.5)$$

gdzie:

- ρ - gęstość powietrza,
- S - powierzchnia nośna płata,
- c - średnia cięciwa aerodynamiczna,

odniesione do układu osi $Oxyz$ (rys.1).

Siła określona równaniem (4.2) liniowo zależy od kątów wychyleń powierzchni sterowych i od współrzędnych wektora prędkości kątowej. Jest to tradycyjnie stosowane uproszczenie [2,3]. W przypadku zaburzonego lotu prostoliniowego dla podkrytycznych kątów natarcia (kąt ślizgu jest mały i małe są składowe prędkości kątowej samolotu) siły aerodynamiczne występujące w równaniach ruchów "podłużnych" zależą od współrzędnej Q prędkości kątowej Ω oraz od kąta wychylenia steru wysokości δ_H [2,3] (współczynniki $C_{x_{\delta_L}}$, $C_{x_{\delta_V}}$, C_{x_P} , C_{x_R} są równe zero). Przybliżenie to dla dowolnego przestrzennego ruchu samolotu, a szczególnie na nadkrytycznych kątach natarcia może być stosowane po analizie wpływu uproszczeń na symulowany ruch. Do analizy tej proponuje się wykorzystanie teorii wrażliwości.

5. Zastosowanie analizy wrażliwości do upraszczania modelu ruchu samolotu

Teoria wrażliwości częściej stosowana do badania wpływu zmiany parametrów konstrukcyjnych na stateczność zaburzonego ruchu ustalonego samolotu [5,9,10,11] jest również przydatna do badania symulowanego ruchu na nadkrytycznych kątach natarcia w symulacji cyfrowej korkociągu samolotu. W tym celu wyznacza się funkcje wrażliwości [1,8,9] zdefiniowane następująco:

$$u_{ij} = \lim_{\Delta a_j} \frac{x_i(t, a_1, \dots, a_j + \Delta a_j, a_n) - (t, a_1, \dots, a_j, a_n)}{\Delta a_j}, \quad (5.1)$$

Tworzą one macierz wrażliwości $U = [u_{ij}]$, w której i dotyczy współrzędnych wektora stanu, a j odpowiedniego, zmienianego parametru.

Funkcje wrażliwości można otrzymać w wyniku rozwiązywania równań wrażliwości:

$$\dot{u}_j = B u_j + c_j, \quad (5.2)$$

w których:

$$u_j = \left[\frac{\partial U}{\partial a_j}, \frac{\partial V}{\partial a_j}, \frac{\partial W}{\partial a_j}, \frac{\partial P}{\partial a_j}, \frac{\partial Q}{\partial a_j}, \frac{\partial R}{\partial a_j}, \frac{\partial \Theta}{\partial a_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial a_j}, \frac{\partial h}{\partial a_j} \right]^T,$$

macierz **B** taka sama dla wszystkich równań wrażliwości ($j = 1, n$) ma postać:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (5.3)$$

a wektor $\mathbf{c}_j$ wyznaczany jest dla każdego parametru a_j wg zależności:

$$\mathbf{c}_j = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta, \mathbf{a})}{\partial a_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5.4)$$

Jżeli wybranym parametrem jest warunek początkowy x_{i0} to wektor $\mathbf{c}_j$ w równaniu (5.2) jest równy zero.

Na rys.3 ÷ 7¹ przedstawione zostały funkcje wrażliwości wektora stanu na zmianę pola powierzchni usterzenia pionowego SV i na zmianę warunków początkowych współrzędnych U i W wektora V_0 . Efektywność działania usterzenia pionowego może być zmniejszona przez negatywne oddziaływanie usterzenia poziomego i z tego względu ważne jest wyznaczenie wspomnianych funkcji. Wejście w korkociąg rzadko zaczyna się od warunków równowagi czyli przeciągnięcia statycznego. Wobec powyższego pokazane na rys.6 i 7 funkcje wrażliwości dostarczają istotnych informacji o symulowanym ruchu.

Przedstawiona analiza wrażliwości może być zastosowana do uproszczania modelu symulowanego ruchu samolotu. Po zastosowaniu podanej w równaniu (4.2) postaci sił aerodynamicznych wektorowe równanie (3.4) można przedstawić:

$$\dot{\mathbf{x}} = f_0(\mathbf{x}, \delta, \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(\mathbf{x}, \delta, \mathbf{a}), \quad (5.5)$$

gdzie λ_k są dużo mniejszymi od występujących w pierwszej składowej równania współczynnikami aerodynamicznymi (10 ÷ 12), które można przyjąć za stałe w dużym zakresie kątów natarcia i ślizgu. Po wyznaczeniu funkcji wrażliwości, $\partial \mathbf{x} / \partial \lambda_k$, ($k = 1, \dots, n$) i sprawdzeniu wpływu zmian wspomnianych współczynników na wektor stanu zmienia się strukturę modelu przez przyjęcie, że λ_k jest równe zero, a tym samym upraszcza się równanie (5.5).

6. Wybrane przykłady obliczeniowe

Przykładowe obliczenia zostały wykonane dla samolotu typu szkolno-treningowego z napędem śmigłowym. Samolot ten o masie 1550 kg ma płat trapezowy o

¹rysunki zamieszczono na końcu pracy

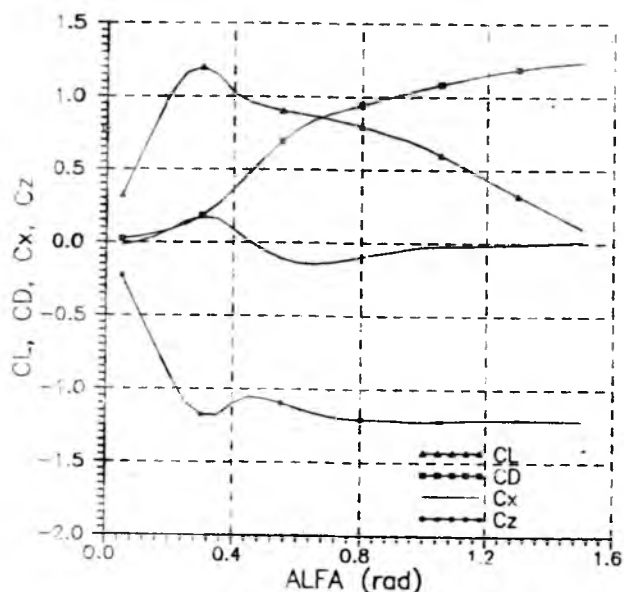
powierzchni 12.28 m^2 i małym skosie (2.5°). Na rys.2 przedstawiono charakterystyki aerodynamiczne gładkiej konfiguracji dla opływu symetrycznego, odniesione do układu prędkościowego C_L , C_D i do układu związanego z samolotem C_x , C_z przyjęte na podstawie dmuchań tunelowych wykonanych w Instytucie Lotnictwa. Symulowany był korkociąg samolotu zaczynający się od przeciągnięcia statycznego. Po przepadnięciu samolot wykonał jedną zwiłkę, po czym następował manewr wyprowadzenia z korkociagu. Na zamieszczonych wykresach (rys.3 ÷ 8) przedstawione w funkcji czasu współrzędne wektora stanu ilustrują przepadanie i zwiłkę korkociagu. Na rys.3 ÷ 5 przedstawiono współrzędne wektora stanu i ich funkcje wrażliwości na zmianę pola powierzchni usterzenia pionowego $S_V = 2.5 \text{ m}^2$. Zmniejszenie efektywności usterzenia pionowego najbardziej wpływa na ślizg samolotu. Nieduża zmiana warunków początkowych U_0 , W_0 w rozpatrywanym przedziale czasu nie zmieni charakteru ruchu (samolot wejdzie w korkociąg i wykona zwiłkę). Na rys.6 i 7 przedstawiono współrzędne U , Θ i ich funkcje wrażliwości na zmianę wymienionych warunków początkowych.

W rozważanych równaniach ruchu samolotu zastosowanych w symulacji numerycznej korkociagu mogą być pominięte składowe sił od niektórych pochodnych krzyżowych [7]. Wynika to z obliczonych funkcji wrażliwości przedstawionych na rys.8 ÷ 10. W rozpatrywanym przedziale czasu zmiana wartości współrzędnej R w wyniku pominięcia składowych sił i momentów od bezwymiarowych pochodnych C_{x_p} i C_{l_q} jest tak mała, że można przyjąć ją za zero. Wpływ tych pochodnych na pozostałe współrzędne wektora stanu jest mały (rys.9 i 10) i założenie, że pochodne te są równe zero może być również w tym przypadku zastosowane.

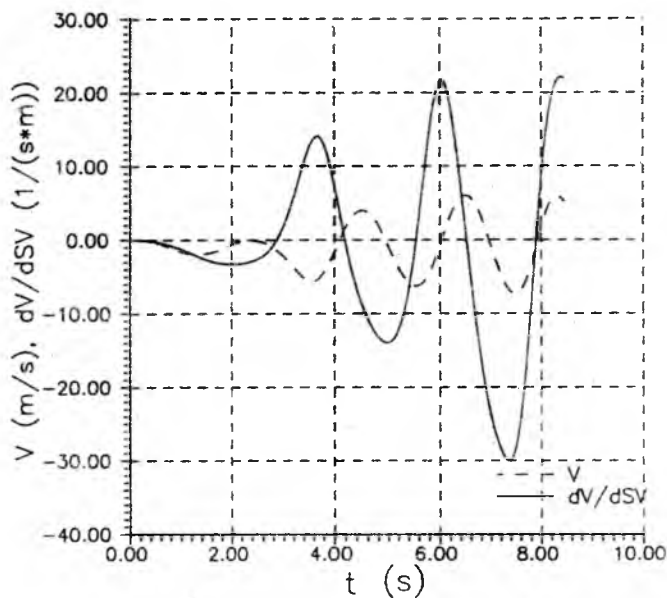
Literatura

1. ARCZEWSKI K., GORAJ Z., MARYNIAK J., PIETRUCHA J., 1979, *Zagadnienie wrażliwości modeli obiektów ruchomych w ujęciu dynamicznym*, Zbiór Referatów XVIII Symp. "Modelowanie w Mechanice" PTMTiS, Gliwice-Wisła
2. ETKIN B., 1972 *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley Sohns, Inc. New York, London, Sydney, Toronto
3. GILBERT W.P., LIBBEY CH.E., 1972, *Investigation of an Automatic Spin-Prevention System for Fighter Airplanes*, NASA TN D-6670, Washington
4. GILBERT W.P., NGUYEN L.T., VAN GUNST R.W., 1976 *Simulator Study of the Effectiveness of an Automatic Control System Designed to Improve the High-Angle-of-Attack Characteristics of a Fighter Airplane*, NASA TN D-8176, Washington
5. GORAJ Z., 1983, *Wrażliwość parametryczna postaci naturalnych drgań samolotu poruszającego się po pasie startowym*, Zbiór Referatów XXII Symp. "Modelowanie w Mechanice", Gliwice-Wisła, 145-154
6. GUTOWSKI R., 1971, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa
7. ORLIK-RÜCKEMANN K.J., 1977, *Aerodynamic Coupling between Lateral and Longitudinal Degrees of Freedom*, AIAA J., 15

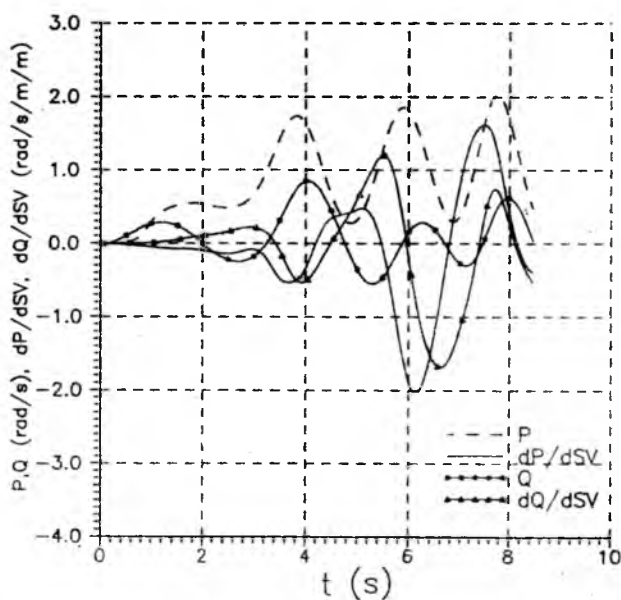
8. TOMOVIĆ R., VUKOBRATOVIĆ M., 1972, *General Sensitivity Theory*, AEPC, New York
9. ZŁOCKA M., 1982, *Symulacja numeryczna ruchów samolotu w dowolnej konfiguracji lotu i badanie wrażliwości wektora stanu na zmiany parametrów konstrukcyjnych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa
10. ZŁOCKA M., MARYNIAK J., 1983, *Wrażliwość stateczności integralnej nieodkształcalnego samolotu na zmiany wielkości parametrów konstrukcyjnych*, XXII Symp. "Modelowanie w Mechanice", Zbiór Referatów, Gliwice-Wisła, 455-462
11. ZŁOCKA M., 1984, *Zastosowanie analizy wrażliwości do badania modelu przestrzennego ruchu samolotu*, XXIII Symp. "Modelowanie w Mechanice", Zbiór Referatów, Gliwice-Wisła, 441-446



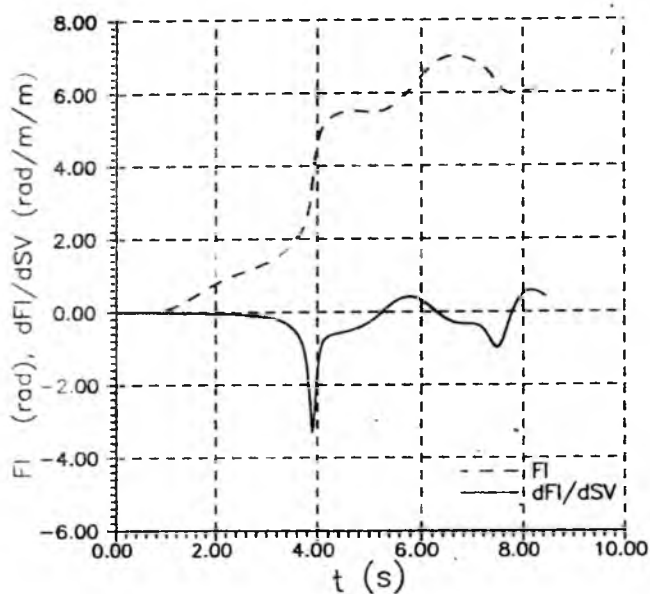
Rys. 2. Charakterystyki aerodynamiczne opływu symetrycznego w funkcji kąta natarcia α



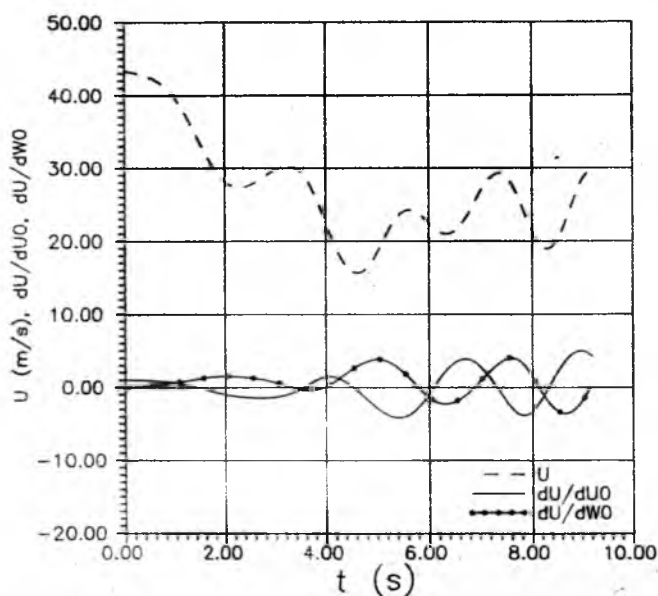
Rys. 3. Boczna składowa prędkości samolotu V i jej funkcja wrażliwości względem pola powierzchni usterzenia pionowego SV



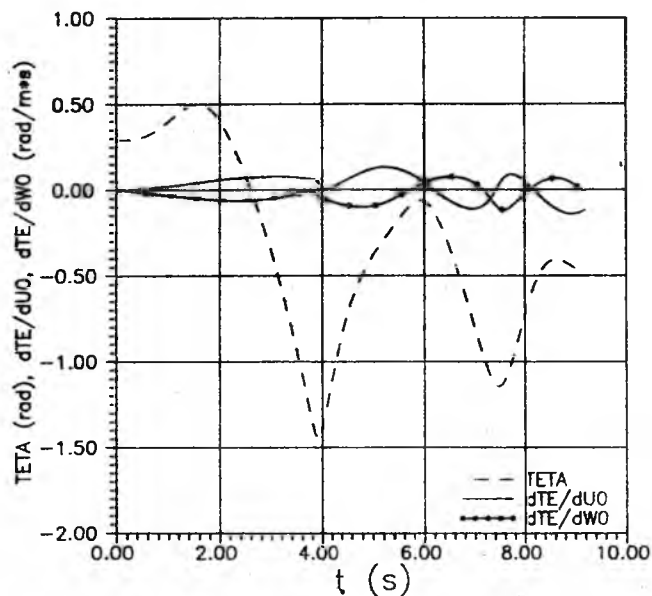
Rys. 4. Składowe prędkości kątowej P , Q i ich funkcje wrażliwości względem pola powierzchni usterzenia pionowego SV



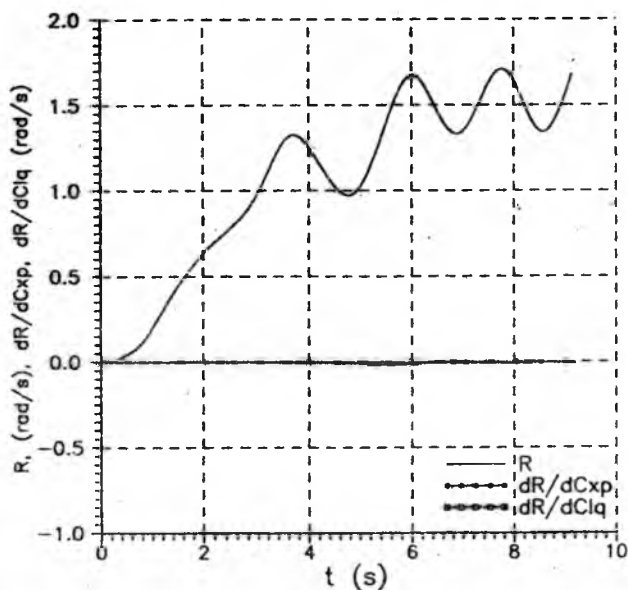
Rys. 5. Kąt przechylenia i jego funkcja wrażliwości liczona względem pola powierzchni usterzenia pionowego SV



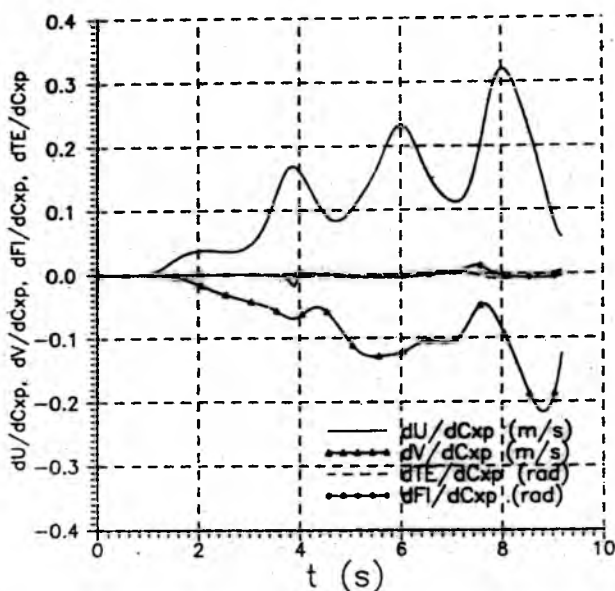
Rys. 6. Składowa prędkości samolotu U i jej funkcja wrażliwości względem warunków początkowych U_0, W_0



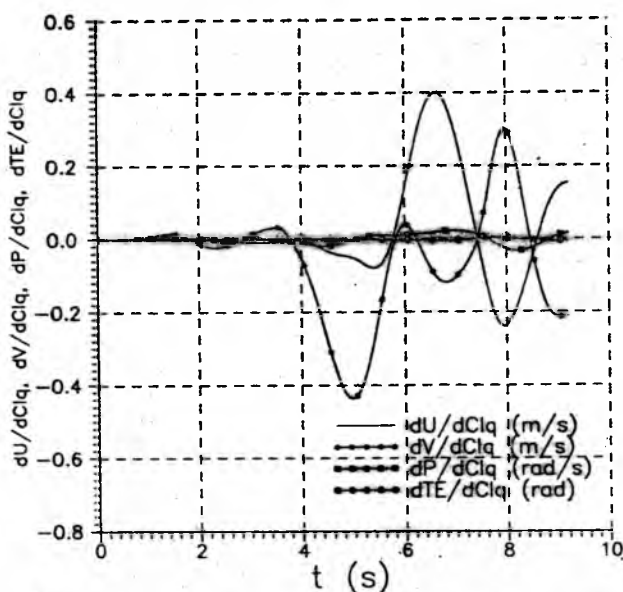
Rys. 7. Kąt pochylenia Θ i funkcje wrażliwości kąta na zmianę warunków początkowych U_0, W_0



Rys. 8. Składowa prędkości katowej R i jej funkcja wrażliwości na zmianę wybranych pochodnych aerodynamicznych



Rys. 9. Funkcje wrażliwości wybranych współrzędnych wektora stanu na zmianę pochodnej aerodynamicznej C_z ,



Rys. 10. Funkcje wrażliwości wybranych współrzędnych wektora stanu na zmianę pochodnej aerodynamicznej C_x ,

MODEL DYNAMIKI LOTU SAMOLOTÓW DO IMITATORÓW NAWIGACYJNYCH¹

ZBIGNIEW KOCZOROWSKI

JERZY MANEROWSKI

FRANCISZEK ZGRZYWA

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa

1. Wstęp

W imitatorach szkolenia nawigatorów naprowadzania samolotów obraz sytuacji powietrznej obejmuje jednocześnie zobrazowanie – na ekranie wskaźnika radiolokacyjnego (imitatora wskaźnika) – przestrzennego położenia kilkudziesięciu sterowanych różnych typów samolotów. Opracowano matematyczne modele dynamiki lotu wraz z komputerowymi programami do zobrazowania przestrzennego położenia samolotów w ww. imitatorze.

Zastosowano w tym celu popularny mikrokomputer IBM PC-XT/AT. Ograniczona moc obliczeniowa tego mikrokomputera wymaga zastosowania uproszczonych matematycznych modeli dynamiki lotu samolotu. Modele te muszą jednak odzwierciedlać podstawowe charakterystyki osiąговые rzeczywistego samolotu w pełnym zakresie użytkowym.

Przedstawiono rozwiązania organizacyjne i strukturę oprogramowania omawianego bloku generacji obrazu. Zamieszczono wyniki porównawcze parametrów ruchu rzeczywistego samolotu i jego komputerowego modelu.

2. Równania ruchu

Model matematyczny dynamiki lotu oparto na równaniach ruchu samolotu traktowanego jako punkt materialny. Przy założeniu, że lot odbywa się bez ślizgu, równania ruchu opisujące zmiany w czasie: prędkości lotu V , kursu Ψ i pochylenia toru lotu samolotu Θ przyjęto w postaci:

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

$$\begin{aligned}\dot{V} &= g(n_z - \sin \Theta), \\ \dot{\Psi} &= g\left(\frac{n_z \sin \Phi}{V \cos \Theta}\right), \\ \dot{\Theta} &= g(n_z \cos \Phi - \cos \Theta)\frac{1}{V},\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie:

n_x, n_z - przeciążenie podłużne i normalne,

$$n_x = \frac{T - P_x}{mg}, \quad n_z = \frac{P_z}{mg},\tag{2.2}$$

Φ - kąt przechylenia samolotu,

T - ciąg silników,

P_x, P_z - siła oporu i siła nośna,

$$P_x = C_x S q_h, \quad P_z = C_z S q_h,\tag{2.3}$$

C_x, C_z - współczynniki sił,

q_h - ciśnienie dynamiczne na wysokości h lotu,

m - masa samolotu,

g - przyspieszenie ziemskie.

Zależności określające ciąg silnika przedstawiono w postaci algebraicznego wielomianu, w którym zmiennymi są: prędkość obrotowa wirnika silnika, temperatura gazów w dopalaczu oraz parametry lotu samolotu (liczba Macha lotu, gęstość powietrza). W analogicznej postaci przedstawiono zależności określające współczynniki sił (2.3). W przypadku wielomianów określających te współczynniki zmiennymi niezależnymi są: kąt natarcia, kąt skosu skrzydła (w przypadku samolotu o zmiennej geometrii skrzydła), kąt wychylenia klap i liczba Macha lotu.

Do wyznaczenia współczynników wymienionych wielomianów zastosowano metodę identyfikacji [3]. Stosując wymienną metodę, określono wskaźniki jakości identyfikacji oraz dodatkowo przeprowadzając doświadczalną weryfikację modelu [2], ustalono postać zależności określających ciąg silnika i współczynniki sił (2.3) w najprostszej postaci, zapewniającej wymaganą dokładność odwzorowania samolotu przez jego komputerowy model.

Do rozwiązania podanych wyżej równań oraz określenia położenia samolotu względem grawitacyjnego układu współrzędnych zastosowano metodę przyrostową.

Przykładowo prędkość lotu samolotu w chwili t jest równa:

$$V(t) = V(t - \Delta t) + \Delta t \dot{V}(t - \Delta t),\tag{2.4}$$

gdzie: Δt jest krokiem czasowym.

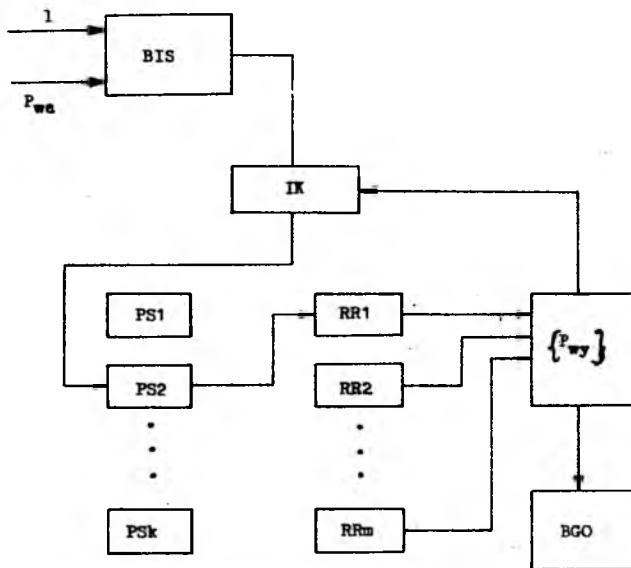
Sterowanie samolotem (modelem samolotu) jest całkowicie odmienne od sterowania stosowanego w klasycznych modelach symulacyjnych [1,4].

Sterowanie w rozpatrywanym przypadku odbywa się przez zmianę: przeciążenia normalnego n_z , kątów pochylenia θ i przechylenia Φ , prędkości obrotowej wirnika silnika, temperatury gazów w dopalaczu itp. Przebiegi czasowe wymienionych parametrów sterowania odpowiadają przebiegom rzeczywistego samolotu w danym manewrze (zakręt na określony kurs, wykonanie figury akrobacji lotniczej, rozpędzanie do określonej prędkości itp.).

3. Struktura programu komputerowego

Zobrazowanie sytuacji powietrznej na ekranie wskaźnika radiolokacyjnego obejmuje N sterowanych samolotów.

W tym celu opracowano komputerowy program, którego schemat funkcjonalny pokazano na rys.1.

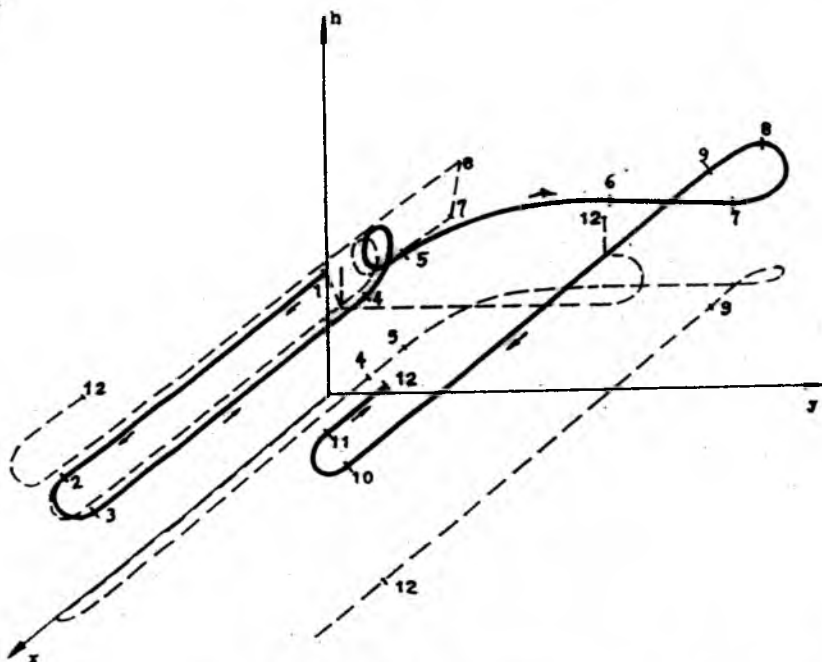


Rys. 1. Schemat funkcjonalny programu komputerowego; BIS – blok identyfikacji samolotu, IK – identyfikacja komend nawigatora, PS1 ÷ PSk – procedury określające prawa sterowania, RR1 ÷ RRm – równania ruchu, BGO – blok generacji obrazu sytuacji powietrznej.

Wielkościami wejściowymi do programu (bloku identyfikacji samolotu BIS) są żądane parametry ruchu P_{we} l -tego ($l \in 1, \dots, N$) samolotu (zmiana kursu o

określoną wartość, uzyskanie określonej prędkości lotu, wykonanie figury akrobacji lotniczej itp). Parametry $P_{we} = P_{we}(l)$ są zawarte w komendach operatora imitatora naprowadzania szkolonego nawigatora i dotyczą realizacji lotu przez l -ty samolot.

W bloku identyfikacji komend IK następuje wybór odpowiedniego prawa sterowania samolotem ($PS1 \div PSk$) oraz określonego typu równań ruchu ($RR1 \div RRm$). Układ m równań ruchu stanowi m szczególnych przypadków równań (2.1).



Rys. 2. Tor lotu samolotu. 1-2, 3-4, 9-10, 11-12 — prostoliniowe loty poziome; 2-3 — półprzewrót; 4-5 — pętla; 5-6, 8-9 — zakręty; 7-8 — zwrot bojowy; 10-11 — półpętla.

Przykładowy zestaw realizowanych przez opracowany program elementów lotu (manewrów) modelu samolotu pokazano na rys.2. Niżej zamieszczono wybrane zależności określające prawa sterowania oraz równania ruchu dla realizacji wybranych manewrów samolotu.

W zakręcie model samolotu sterowany jest kątem przechylenia Φ . Zmiana w czasie kąta Φ jest zbliżona do przebiegów w rzeczywistych lotach — odpowiednio dla danego typu samolotu. Z trzeciego równania (2.1) z wykorzystaniem (2.2) i (2.3) wyznacza się współczynnik siły nośnej C_z ($\theta = 0$). Następnie oblicza się współczynnik C_x . Zmiany prędkości oraz kursu wyznaczone są odpowiednio z pierwszego i drugiego równania układu (2.1). W przypadku zakrętu ze stałą

prędkością, w każdym kroku obliczeń wyznaczana jest prędkość obrotowa wirnika silnika (w przypadku silnika z dopalaczem dodatkowo temperatura gazów w dopalaczu) z warunkiem $\dot{V} = 0$.

Sterowanie modelem samolotu w lotach wznoszących i nurkowych realizowane jest bezpośrednio kątem θ lub składową pionową prędkości lotu.

Sterowanie w manewrach skomplikowanych takich jak: pólpetla, zwrot bojowy i półprzewrót wykonywanych od wysokości h_0 do żądanej wysokości h_x (z przechyleniem Φ_0), realizowane jest przeciążeniem n_x . W lotach tych przeciążenie założono w postaci:

$$n_x = \frac{QV}{g}, \quad (3.1)$$

gdzie zmianę kątovej prędkości pochyłania Q w funkcji wysokości lotu przyjęto w postaci:

a) liniowej

$$Q = \frac{V}{R} \left[\eta + 2(1 + \eta) - \frac{h - h_0}{h_x - h_0} \right], \quad (3.2)$$

b) nieliniowej

$$Q = \frac{V}{R} \left[1 + \mu \cos \pi \left(1 + \frac{h - h_0}{h_x - h_0} \right) \right], \quad (3.3)$$

oraz

$$R = 0.5(h_x - h_0) \frac{1}{\cos \Phi_0}. \quad (3.4)$$

W zależnościach (3.2) i (3.3) η i μ określają intensywność zmian prędkości kątowych (krzywizny toru lotu). Stosowanie zależności (3.3) umożliwia dokładniejsze odwzorowanie toru lotu samolotu przez model. W rozpatrywanym przypadku ruch modelu opisują: pierwsze i trzecie równanie (2.1) oraz nw. zależności określające kątovej prędkości Eulera:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= Q \sin \Phi \operatorname{tg} \theta, \\ \dot{\theta} &= Q \cos \Phi, \\ \dot{\Psi} &= Q \sin \Phi \frac{1}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Weryfikacja modeli

Niżej zamieszczono wybrane wyniki porównawcze parametrów lotu modeli i rzeczywistych samolotów. Wymienione wyniki dotyczą szkolno-bojowego samolotu poddźwiękowego (SBSP) oraz samolotów naddźwiękowych: myśliwskiego (MSN) i szturmowego (SSN).

W tablicach 1, 2 przedstawiono porównanie niektórych wyników uzyskanych z badań modelu z wynikami prób w locie podczas wykonywania pólpetli (tablica 1) i zakrętu na stałej wysokości (tablica 2).

Tablica 1. Parametry lotu modeli i samolotów w pólpetli (m – model, s – samolot)

		Parametry początkowe			Parametry końcowe			
		V_p [km/h]	h [m]	n_{zp} [-]	V_k [km/h]	h [m]	n_{zk} [-]	t_r [s]
SBSP	m	717	2150	5.1	324	3500	1.2	16
	s			4.8	323		1.4	16
MSN	m	1100	2000	4.3	640	6000	1.8	26
	s			5.0	670		1.3	25
SSN	m	1100	730	4.4	670	4630	2.1	25
	s			5.0	630		1.4	27

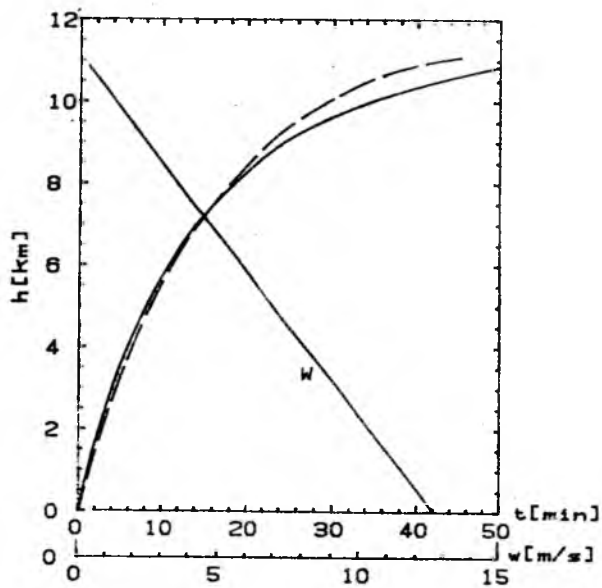
Tablica 2. Parametry lotu modeli i samolotów w zakręcie (m – model, s – samolot)

		$\Delta\Psi$ [deg]	t_r [s]	V_p [km/h]	V_k [km/h]
SBSP	m	90	24	410	370
	s		25		390
SSN	m	220	41	823	790
	s		39		788

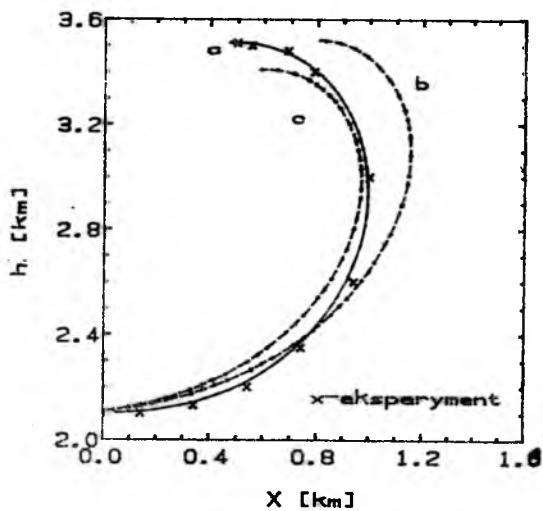
Wyniki zamieszczone w tablicy 1 (dla pólpetli) otrzymano dla przeciążenia n_z (3.1), w którym kątowa prędkość pochylenia Q została wyznaczona z (3.3). Loty rozpoczynano (w przypadku modelu i samolotu) z jednakowymi prędkościami V_p . Uzyskano przy tym praktycznie jednakowe czasy realizacji t_r figury. Różnice w wartościach prędkości i przeciążenia w chwili zakończenia manewru V_k i n_{zk} mieszczą się w granicach występujących w rzeczywistych lotach.

W przypadku zmiany kursu o kąt $\Delta\Psi$ (tablica 2) uzyskano praktycznie całkowitą zgodność wyników modelu z próbami w locie.

Na rysunku 3 porównano przebieg zmiany wysokości lotu SBSP i modelu podczas wykonywania lotu na pułap ze zmienną prędkością wznoszenia w . Charakter zmiany $w = w(h)$ przyjęto tak jak w rzeczywistych lotach, linia przerywana dotyczy samolotu rzeczywistego a linia ciągła modelu.



Rys. 3. Lot samolotu na pułap



Rys. 4. Tory lotu samolotu i modelu w pólce dla różnych przebiegów przeciążenia

Na rysunku 4 pokazano tor lotu SBSP i modelu podczas wykonywania pólpetli. Dla modelu założono trzy różne przebiegi przeciążenia normalnego podczas manewru:

- a – przebieg taki jak na samolocie rzeczywistym,
- b, c – stałe w czasie, różne wartości przeciążenia.

Czas wykonania figury wynosi:

- a – 15 s,
- b – 18 s,
- c – 14 s,

w rzeczywistym locie – 16 s.

Wyniki uzyskane z badań symulacyjnych modeli są bliskie wynikom uzyskanym z prób w locie. Występujące różnice nie mają istotnego znaczenia z punktu widzenia przewidzianego zastosowania.

Literatura

1. DŻYGADŁO Z., BOIDAK R., 1985, *Numerical modelling of the dynamics of aerobatic manoeuvres*, J.Techn.Physics, 26
2. MANEROWSKI J., RYMASZEWSKI S., NOWAKOWSKI M., 1988, *Komputerowy model dynamiki lotu samolotu zweryfikowany próbami w locie*, MTiS, 3-4
3. MANEROWSKI J., 1992, *Identyfikacja modelu dynamiki lotu poddźwiękowego samolotu*, MTiS, 30, 1
4. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej nr 32

NUMERYCZNA ANALIZA PARAMETRÓW RUCHU MODELU SAMOŁOTU BOJOWEGO W NAWIGACYJNYCH UKŁADACH WSPÓLRZĘDNYCH¹

GRZEGORZ BĘCZKOWSKI

JERZY MANEROWSKI

STANISŁAW RYMASZEWSKI

FRANCISZEK ZGRZYWA

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa

W oparciu o wyniki [1] przedstawiono komputerowy model symulacyjny lotu współczesnego samolotu wojkowego w nawigacyjnych układach współrzędnych z uwzględnieniem wybranych elementów zastosowania bojowego.

Przedstawiono wyniki obliczeń uzyskanych za pomocą opracowanego modelu, które stanowią jedynie ilustrację jego zastosowań.

1. Wstęp

W pracy [1] przedstawiono model dynamiki lotu sterowanego samolotu w nawigacyjnych układach współrzędnych. W wymienionej pracy ruch samolotu rozpatrywany jest względem Ziemi, traktowanej jako elipsoida obrotowa. Podane są tam ogólne zależności umożliwiające realizację lotu po z góry założonej trasie. W opracowanym tam modelu wykorzystywany jest klasyczny model dynamiki lotu (ruch samolotu rozpatrywany jest względem nieruchomego układu współrzędnych), opracowany metodą identyfikacji z wykorzystaniem prób w locie [2].

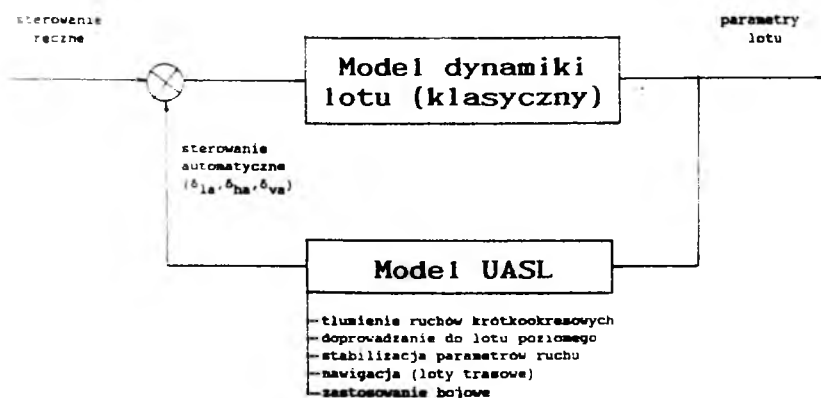
Niniejsza praca stanowi rozwinięcie problemów podjętych w [1]. Wykorzystano tu przedstawione w ww. pracy równania ruchu wraz z zależnościami i algorytmami umożliwiającymi określenie położenia samolotu względem Ziemi i założonej trasy lotu oraz ogólne prawa sterowania samolotem w lotach trasowych.

Opracowany w niniejszej pracy model umożliwia realizację (nierozpatrywanych w [1]) następujących elementów lotu sterowanego automatycznie modelu naddźwiękowego samolotu o zmiennej geometrii skrzydła:

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

- lot trasowy składający się z określonej liczby odcinków wybranej trasy (z możliwością powrotu na pierwotnie założoną trasę lotu po odejściu od trasy na zakresie sterowania ręcznego),
- automatyczne i półautomatyczne podejście do lądowania,
- zastosowanie bojowe.

2. Opis modelu



Rys. 1. Schemat funkcjonalny modelu

Schemat funkcjonalny opracowanego modelu symulacyjnego przedstawia rys.1. Omawiany model opiera się na modelu dynamiki lotu samolotu w klasycznej postaci [2] oraz modelu układu automatycznego sterowania lotem (UASL). Model dynamiki rozszerzono o równania określające położenie samolotu w nawigacyjnych układach współrzędnych [1]. Uwzględniono przy tym wpływ wiatru geostroficznego na parametry ruchu samolotu. Model UASL stanowią układy równań różniczkowych i algebraicznych opisujących wychylenia steru wysokości, steru kierunku i lotek, w funkcji parametrów ruchu samolotu i wybranego zakresu pracy UASL. Rozpatrywane zakresy pracy UASL przedstawiono na rys.1. Dla pierwszych trzech z ww. zakresów, prawa sterowania przyjęto jak dla rzeczywistych układów sterowania stosowanych na współczesnych samolotach wojskowych [3]. Dla zakresu pracy UASL "nawigacja" przyjęto w modelu, że linią pozycyjną po której realizowany jest lot trasowy samolotu jest ortodroma. W tym przypadku podstawowym prawem sterowania samolotem w kanale przechylenia jest prawo ste-

rowania lotką tzw. "lot po trasie", określone równaniem różniczkowym w postaci:

$$a\ddot{\delta}_{la} + \dot{\delta}_{la} = f(\Phi_n, \dot{\Phi}_n, \Phi, \dot{\Phi}, P, \dot{P}, q), \quad (2.1)$$

gdzie:

- $\Phi, \dot{\Phi}_n$ – aktualne i nakazane przechylenie samolotu,
- P – prędkość kątowna przechylania,
- q – ciśnienie dynamiczne,
- a – współczynnik równania,
- $()$ – pochodna względem czasu.

Nakazane przechylenie samolotu opisane jest równaniem, którego prawa strona zależna jest od parametrów nawigacyjnych (Z i $\dot{Z}$):

$$b\dot{\Phi}_n + \Phi_n = i_z Z + i_{\dot{z}} \dot{Z}, \quad |\Phi_n| < 30^\circ, \quad (2.2)$$

gdzie:

- $Z, \dot{Z}$ – zboczenie i prędkość zboczenia z trasy lotu,
- $b, i_z, i_{\dot{z}}$ – współczynniki równania.

Dla omawianego zakresu prawo sterowania w kanale pochylenia odpowiada zakresowi "stabilizacja".

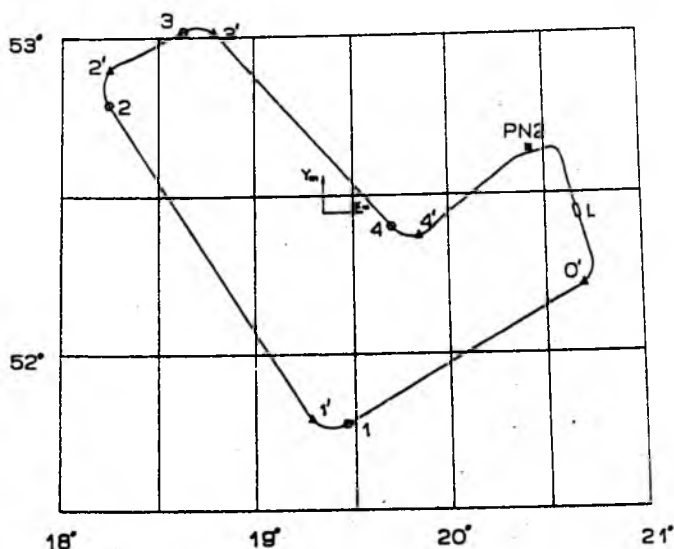
Zakres "zastosowanie bojowe" określony w modelu UASL, umożliwia realizację automatycznego bombardowania wybranych celów z lotu poziomego, nurkowego oraz z pętli ze stałym przeciążeniem normalnym. Do wyznaczenia czasu zrzutu bomby wykorzystano w modelu klasyczne równania ruchu rzutu ukośnego punktu materialnego w ośrodku stawiającym opór. Rozwiązując powyższe równania numerycznie dla aktualnych warunków początkowych zrzutu wyznaczanych w oparciu o znane parametry lotu samolotu oraz dla znanego położenia samolotu względem celu obliczany jest czas, w którym następuje zrzut bomb. Wymieniony czas odpowiada czasowi, w którym pozioma odległość samolotu do celu jest równa zasięgowi bomby zrzucanej z samolotu.

W opracowanym modelu współrzędne geograficzne celu mogą być wprowadzone jako punkt leżący na zaprogramowanej trasie lotu co gwarantuje prawidłowy nalot na cel oraz umożliwia wyznaczenie odległości do celu z zależności nawigacyjnych [1].

3. Wyniki obliczeń symulacyjnych

Przedstawione poniżej wyniki analizy numerycznej parametrów ruchu modelu samolotu dotyczą zakresów "nawigacja" i "zastosowanie bojowe".

3.1. Lot trasowy



Rys. 2. Trasa lotu na mapie o odwzorowaniu stożkowym

Na rys.2 pokazano na siatce mapy o odwzorowaniu stożkowym wyniki lotu modelu samolotu na zakresie nawigacji po założonej trasie wraz z podejściem do lądowania do wysokości 50m. Charakterystyczne punkty prezentowanego lotu to:

- L – lotnisko,
- 1,2,3,4 – punkty zmiany trasy zwane też punktami zmiany kursu,
- $0', 1', 2', 3', 4'$ – punkty początkowe kolejnych odcinków trasy,
- PN2 – wyniesiony punkt nawigacyjny.

Współrzędne geograficzne lotniska i punktów zmiany trasy 1, 2, 3, 4 są danymi wejściowymi do modelu i stanowią opis zadanej trasy lotu. Współrzędne punktów $0', 1', 2', 3', 4'$ są współrzędnymi geograficznymi samolotu wykonującego zakręt na kolejny punkt zmiany trasy. Zapamiętywane są one automatycznie przez model w chwili, gdy aktualny kurs samolotu różni się o 5° od kursu nakazanego na kolejny punkt zmiany trasy. Punkt PN2 jest punktem charakterystycznym budowania manewru do lądowania. Współrzędne tego punktu wyznaczane są automatycznie przez model na podstawie znanego położenia lotniska, nakazanego kursu lądowania

i strefy dolotu do lotniska. Lot samolotu po zaprogramowanej trasie pomiędzy kolejnymi punktami zmiany trasy jest zatem realizowany po budowanych automatycznie przez model ortodromach cząstkowych $0'-1$, $1'-2$, $2'-3$, $3'-4$. Po dolocie do punktu 4 (końcowy punkt trasy) realizowana jest procedura powrotu na lotnisko, która obejmuje lot po ortodromie $4'$ -PN2 oraz pozostałe podzakresy nawigacyjne lotu ze sterowaniem automatycznym (przedstawione poniżej).

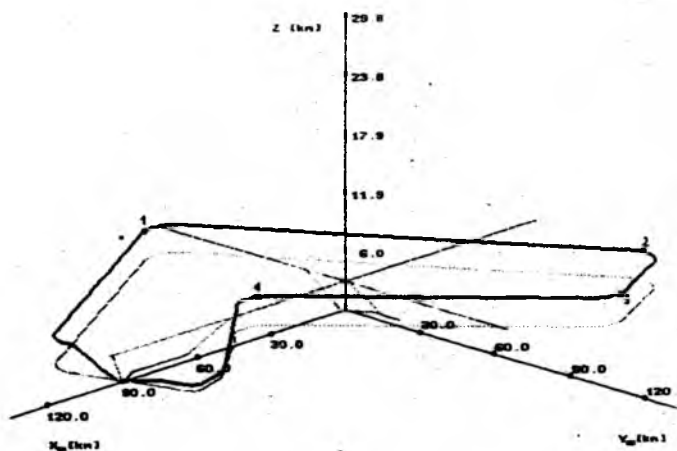
W przedstawionym na rys.2 locie, wykorzystywane są następujące podzakresy sterowania nawigacyjnego:

- w kanale przechylenia czyli sterowanie lotką;
 - "lot po trasie" czyli lot po ortodromach cząstkowych (od punktu $0'$ do punktu leżącego 7 km przed PN2),
 - wyjście na określony kurs lotu (3-ci zakręt na kurs prostopadły do kursu lądowania oraz 4-ty zakręt na kurs lądowania),
 - lot wg radiolatarni kursowej lotniska (etap podejścia do lądowania),
- w kanale pochylenia czyli sterowanie sterem wysokości;
 - stabilizacja wysokości barometrycznej,
 - zniżanie po torze zniżania zaprogramowanym w modelu UASL,
 - lot wg radiolatarni zniżania do wysokości 50 m (etap podejścia do lądowania),
- w kanale odchylenia czyli sterowanie sterem kierunku;
 - tłumienie.

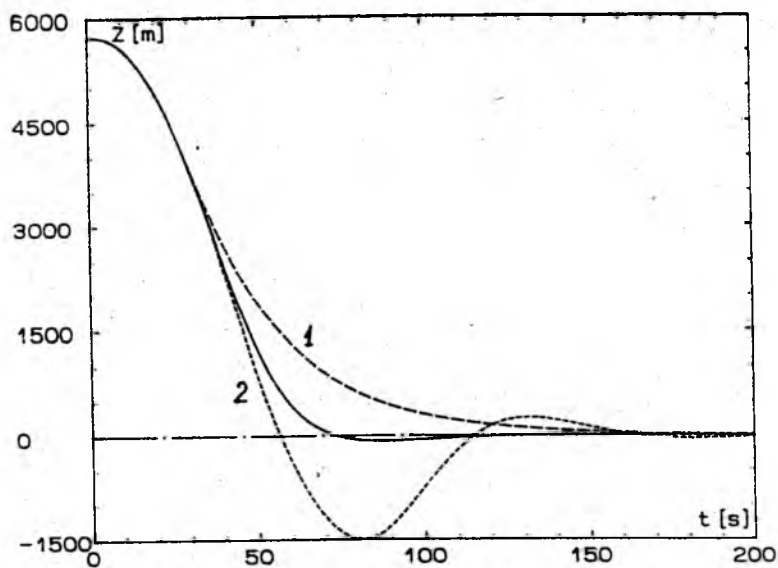
Na rys.3 pokazano trasę lotu w układzie przestrzennym X_{mapy} , Y_{mapy} oraz wysokość. Na rysunku tym widoczny jest pionowy profil trasy lotu, składający się z poprzednio wymienionych podzakresów nawigacyjnych UASL (widoczne są zakresy lotu realizowane w kanale pochylenia).

3.2. Wpływ wartości współczynników praw sterowania na parametry lotu trasowego samolotu

Wartości współczynników i_z oraz i_z w przedstawionym powyżej prawie sterowania lotką tzw. "lot po trasie" dobrano w modelu UASL metodą kolejnych przybliżeń. Wpływ zmiany wartości tych współczynników na sposób dolotu samolotu do wyznaczonej trasy, pokazano na rys.4. Założono przy tym, że w chwili zerowej samolot znajdował się w odległości 5700m od trasy, lecąc kursem równoległym do niej.



Rys. 3. Trasa lotu

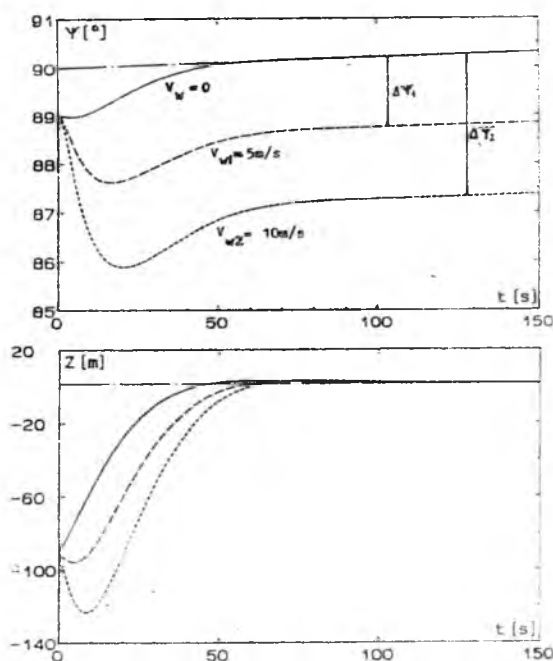


Rys. 4. Wpływ prawa sterowania samolotem na parametry ruchu

Linia punktowa na rys.4 to nakazana trasa lotu ($Z = 0$), linia ciągła przedstawia zmianę w czasie zboczenia samolotu od założonej trasy dla dobranych wartości współczynników i_z oraz i_z , zaś linie przerywane odpowiadają wartości współczynnika i_z większej o 50% (linia 1) i mniejszej o 50% (linia 2) od dobranej.

Jak widać dobór współczynników ma istotny wpływ na efektywność lotu trassowego, co ma szczególne znaczenie przy wykonywaniu zadań bojowych, np. na prowadzenie na cel.

3.3. Wpływ wiatru na parametry ruchu samolotu



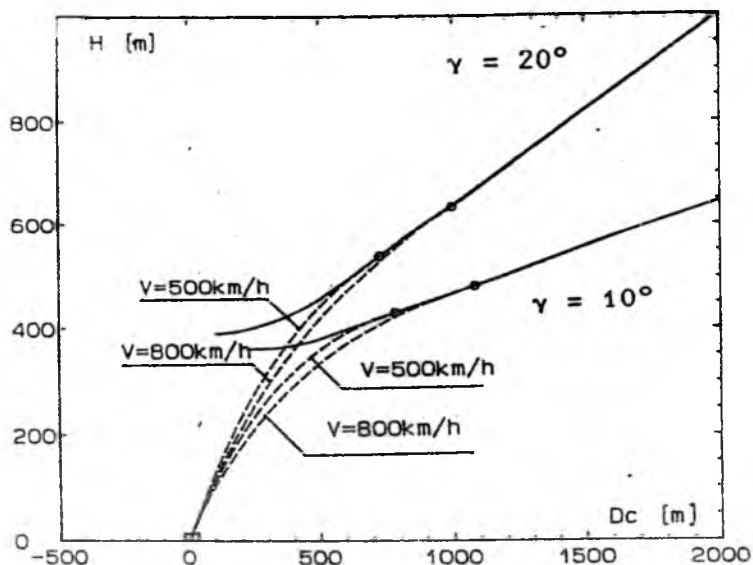
Rys. 5. Wpływ wiatru na parametry lotu

Opracowany model dynamiki lotu samolotu uwzględnia wpływ wiatru na parametry ruchu, w tym na parametry nawigacyjne. Na rys.5 pokazano wpływ wiatru geostroficznego na zmianę kursu lotu i zboczenia z trasy w funkcji czasu. Przyjęto, że w chwili $t = 0$ samolot porusza się z prędkością V_s , kursem geograficznym 89° i zboczeniem z trasy równym 90 m . Linia punktową pokazano na rysunku kurs nakazany trasy lotu i założoną trasę lotu, zaś linią ciągłą zmianę kursu i zboczenia samolotu bez wpływu wiatru ($V_w = 0$). Linie przerywane przedstawiają

zmianę omawianych parametrów z uwzględnieniem oddziaływania stałego wiatru wiejącego z północy z prędkościami $V_{w1} = 5 \text{ m/s}$ i $V_{w2} = 10 \text{ m/s}$.

Jak widać ruch samolotu w przypadku oddziaływania wiatru realizowany jest po założonej trasie ($Z = 0$) z kursem geograficznym poprawionym o wielkość znoszenia samolotu przez wiatr (poprawki $\Delta\psi_1$ i $\Delta\psi_2$). Poprawki są przez model generowane automatycznie (por. (2.2)).

3.4. Zastosowanie bojowe

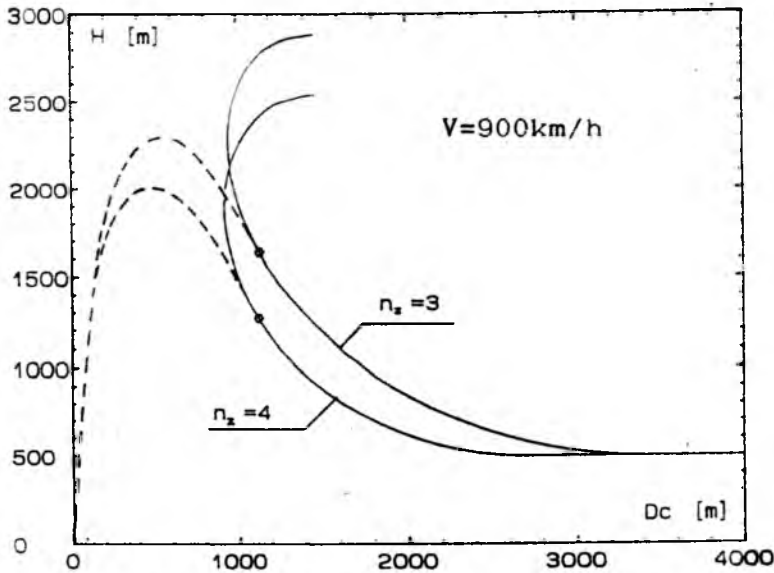


Rys. 6. Tory lotu samolotu i bomby – bombardowanie celu z lotu nurkowego

Na rys.6 i 7 przedstawiono wyniki obliczeń uzyskane z modelu, wykorzystywanego do bombardowania celu o współrzędnych położenia, wysokości $H = 0$ i odległości $D_c = 0$. Na ww. rysunkach pokazano tor lotu samolotu (linia ciągła) i bomby (linia przerywana).

Zamieszczone wyniki dotyczą bombardowania z lotu nurkowego (rys.6) i pętli (rys.7). W przypadku bombardowania z lotu nurkowego podano wyniki dla dwóch kątów nurkowania γ i dwóch prędkości lotu V . W drugim przypadku bombardowania celu (rys.7) założono stałe przeciążenie normalne w pętli ($n_x = 4$ i $n_z = 3$).

W rozpatrywanych przypadkach samolot sterowany jest automatycznie, a lot odbywa się z zerowym kątem ślizgu.



Rys. 7. Tory lotu samolotu i bomby – bombardowanie celu z pętli

4. Uwagi końcowe

Przedstawiony komputerowy model symulacyjny, umożliwia praktycznie realizację lotów z elementami zastosowania bojowego rzeczywistego samolotu wojkowego.

Model może być wykorzystywany do analizy pracy i doboru układów automatycznego sterowania do istniejącego, nowo opracowywanego lub modyfikowanego samolotu.

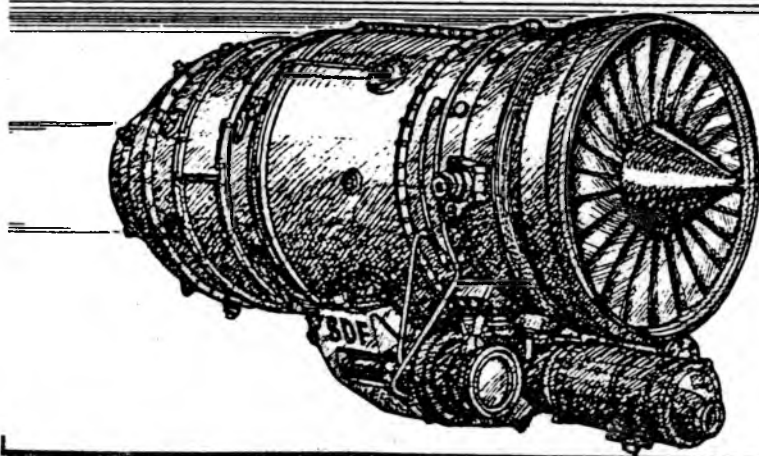
Zamieszczone wyniki obliczeń stanowią jedynie ilustrację zastosowań opracowanego modelu.

Literatura

1. MANEROWSKI J., 1992, *Model of dynamics of aircraft flight in navigational coordinate system*, MTiS, 3, 30
2. MANEROWSKI J., 1992, *Identyfikacja modelu dynamiki lotu poddźwiękowego samolotu*, MTiS, 1, 30
3. R.C.NELSON R.C., 1989, *Flight stability and automatic control*, McGraw-Hill

D-18A

PIERWSZY POLSKI SILNIK
DWUPRZEPŁYWOWY



INSTITUTE OF AVIATION

WPLYW STOPNIA UPROSZCZENIA MODELU NA SYMULACJĘ DYNAMIKI SAMOLOTU JAKO OBIEKTU STEROWANIA¹

JERZY BOROWSKI

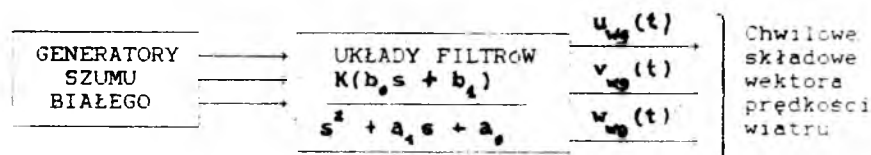
WIESŁAW SOBIERAJ

Wojakowska Akademia Techniczna, Warszawa

1. Modele

Synteza adaptacyjnego układu sterowania lotem, może być przeprowadzona w sposób poprawny przy wykorzystaniu symulacji komputerowej. Niezbędna jest przy tym znajomość właściwości dynamicznych obiektu sterowania jakim jest samolot, oraz zjawisk fizycznych zachodzących w środowisku ruchu.

W zaproponowanym układzie symulacyjnym zdeterminowane właściwości środowiska ruchu samolotu zostały opisane zależnościami zgodnymi z Atmosferą Wzorcową. Właściwości stochastyczne uwzględniono natomiast w modelu turbulencji atmosfery. Model ten schematycznie przedstawiono na rys.1.



Rys. 1. Model turbulencji atmosfery

Ze względu na to, że opracowano wiele modeli dynamiki samolotu uwzględniających różne czynniki, symulację komputerową przeprowadzono dla kilku wybranych modeli w różnych stopniach uproszczenia. Decyzja o wyborze modelu powinna być poprzedzona badaniem przydatności z punktu widzenia specyfiki syntezy oraz dokładności odtwarzania parametrów ruchu w stanach nieustalonych.

Badania takie przeprowadzono w oparciu o charakterystyki aerodynamiczne i konstrukcyjne rzeczywistego samolotu.

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Podstawą dla większości modeli dynamiki ruchu samolotu jest układ równań wektorowych:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i),$$

gdzie:

$\mathbf{G} = \sum_i m_i \mathbf{V}_i$ - główny wektor ilości ruchu (pędu),

$\mathbf{K} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i)$ - główny moment ilości ruchu (kręt).

1.1. Model nr 1

Pierwszym uproszczeniem ogólnych równań ruchu jest założenie, że samolot jest ciałem doskonale sztywnym oraz jego masa pozostaje niezmienna w czasie.

Otrzymany w ten sposób model dynamiki można przedstawić układem nieliniowych, uwikłanych równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{du_k}{dt} - rv_k + qw_k \right) &= X(\alpha, \alpha_w, V, H, \bar{n}_n, \theta, \delta_m, \beta, \beta_w, \dots), \\ m \left(\frac{dv_k}{dt} - pw_k + ru_k \right) &= Y(V, H, \beta, \beta_w, \delta_n, \dots), \\ m \left(\frac{dw_k}{dt} - qu_k + pv_k \right) &= Z(\alpha, \alpha_w, V, H, \bar{n}_n, \theta, \delta_m, \beta, \beta_w, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x \frac{dp}{dt} - I_{xz} \left(pq + \frac{dr}{dt} \right) + (I_z - I_y)qr + I_{yz}(r^2 - q^2) + I_{xy} \left(pr - \frac{dq}{dt} \right) &= \\ &= L(V, H, \beta, \beta_w, p, q, r, \delta_n, \bar{n}_n, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y \frac{dq}{dt} + I_{xz}(p^2 - r^2) + (I_x - I_z)rp + I_{yz} \left(qp - \frac{dr}{dt} \right) - I_{xy} \left(qr - \frac{dp}{dt} \right) &= \\ &= M(\alpha, \dot{\alpha}, \alpha_w, \dot{\alpha}_w, V, H, \bar{n}_n, q, p, r, \delta_m, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z \frac{dr}{dt} - I_{xz} \left(\frac{dp}{dt} - rq \right) + (I_y - I_x)pq - I_{yz} \left(rp - \frac{dq}{dt} \right) + I_{xy}(q^2 - p^2) &= \\ &= N(V, H, \beta, \beta_w, p, q, r, \delta_l, \delta_n, \bar{n}_n, \dots), \end{aligned}$$

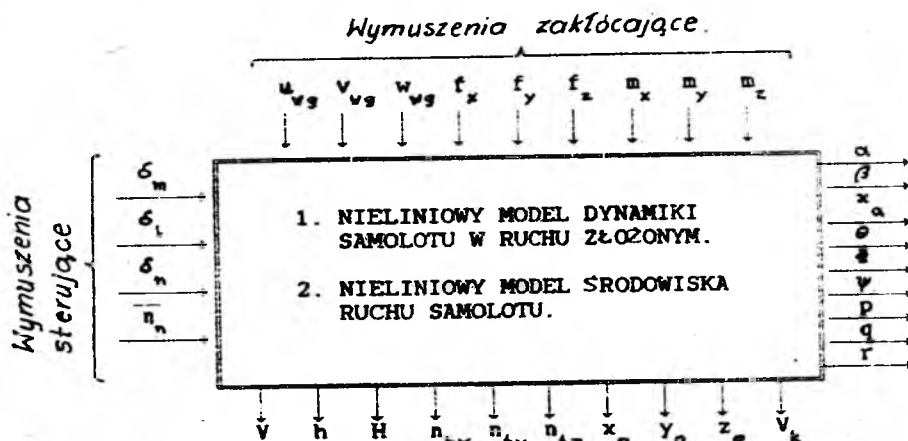
gdzie:

- H - wysokość geopotencjalna,
 α_w - kąt natarcia wiatru,
 β_w - kąt ślizgu wiatru,
 $\bar{n}_n$ - obroty względne silników,
 m - masa samolotu.

Pozostałe oznaczenia zgodne z PN-83/L-01010.

Pierwsze trzy równania to równania równowagi sił, pozostałe to równania równowagi momentów w stanach dynamicznych.

Schemat ogólny modelu przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Schemat ogólny nieliniowego modelu dynamiki układu "samolot-środowisko" w ruchu złożonym; f_x, f_y, f_z - składowe siły zaburzające ruch w układzie współrzędnych związanych z samolotem; m_x, m_y, m_z - składowe momenty zaburzające ruch w układzie współrzędnych związanych z samolotem; h - wysokość geometryczna lotu samolotu; pozostałe oznaczenia jak poprzednio

Jest to najogólniejszy z rozpatrywanych modeli, gdyż pozostałe otrzymywano przez wprowadzenie określonych założeń upraszczających.

1.2. Model nr 2

Model nr 2 to nieliniowy model dynamiki samolotu w izolowanym ruchu podłużnym. W modelu tym oprócz typowych dla tego typu przypadku uproszczeń, założono stałą wartość przyspieszenia ziemskiego. Nie rozróżnia się przy tym wysokości geometrycznej i geopotencjalnej. Nie uwzględniono w nim również dodatkowych sił związanych z dobowym ruchem Ziemi i momentów giroskopowych pochodzących od wirujących mas silników napędowych. Można go przedstawić

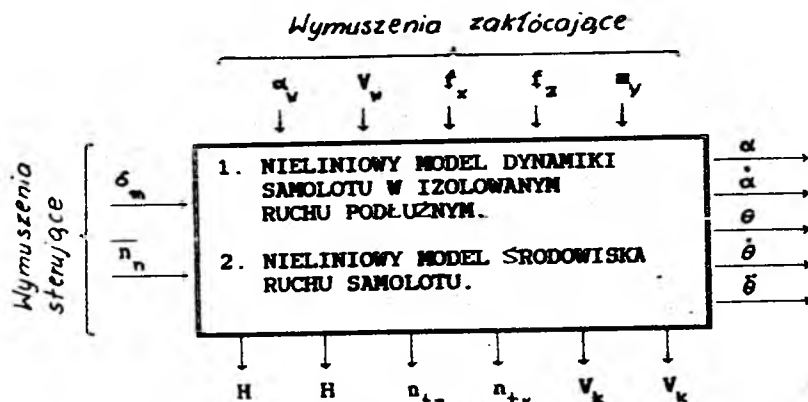
układem nieliniowych uwikłanych równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} m \frac{dV_k}{dt} &= F_{xk}(V, H, \alpha, \alpha_w, \bar{n}_n, \theta, \dots), \\ -m V_k \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) &= F_{yk}(V, H, \alpha, \alpha_w, \bar{n}_n, \delta_m, \theta, \dots), \\ I_v \frac{d^2\theta}{dt^2} &= M(V, H, \alpha, \dot{\alpha}, \alpha_w, \dot{\alpha}_w, \bar{n}_n, \delta_m, \theta, \dot{\theta}, \dots), \\ \frac{dH}{dt} &= V_k \sin(\theta - \alpha), \end{aligned}$$

gdzie:

F_{xk}, F_{yk} – składowe wypadkowej siły w układzie współrzędnych związanym z torem lotu.

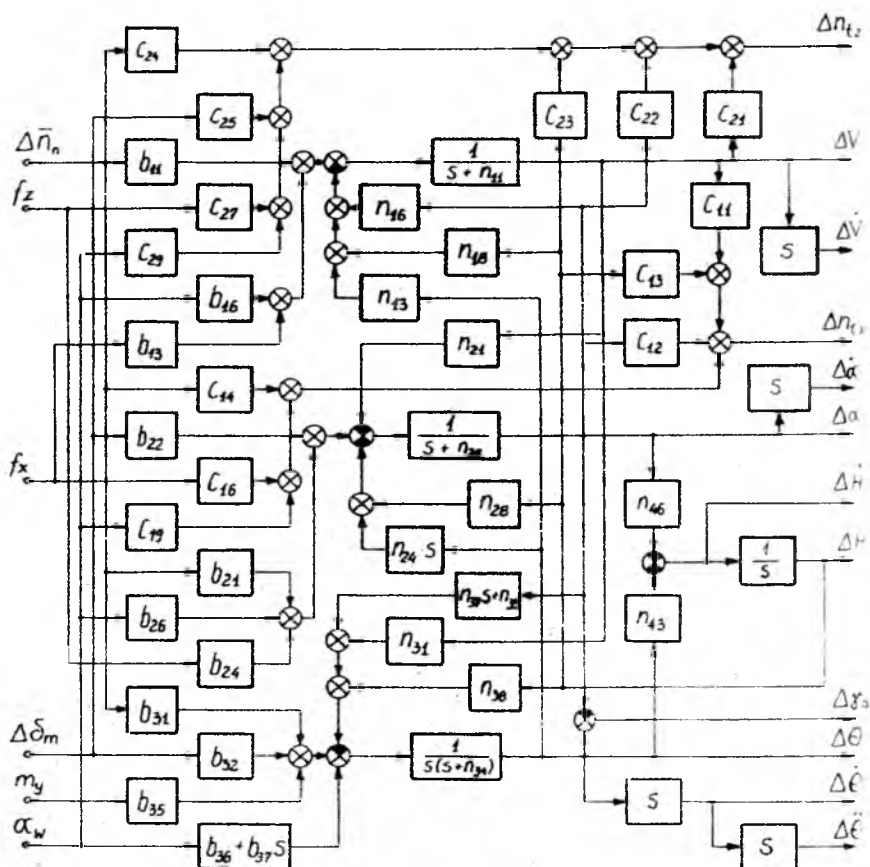
Model ten schematycznie przedstawiono na rys.3.



Rys. 3. Schemat ogólny nieliniowego modelu dynamiki układu "samolot-środowisko" w izolowanym ruchu podłużnym

1.3. Model nr 3

Model nr 3 to pełny linearyzowany model dynamiki samolotu w izolowanym ruchu podłużnym. Model ten uzyskano przez linearyzację modelu nr 2. W modelu tym rozpatrywane są tylko przyrosty wokół punktu pracy. Można go przedstawić



Rys. 4. Schemat strukturalny pełnego linearyzowanego modelu dynamiki samolotu w izolowanym ruchu podłużnym

w postaci zapisu macierzowego:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{w1} & b_{w2} & \cdots & b_{wk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1j} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{i1} & n_{i2} & \cdots & n_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \end{bmatrix},$$

$$BS = NP,$$

gdzie:

- B** – macierz współczynników względem wymuszeń,
S – wektor przyrostów wymuszeń,
N – macierz współczynników względem parametrów lotu,
P – wektor przyrostów parametrów lotu.

Elementy macierzy **B** i **N** zostały wyznaczone dwoma metodami:

- metodą analityczną,
- metodą numeryczną.

Jako metodę numeryczną przyjęto zmodyfikowaną metodę małych zaburzeń, wykorzystującą cztery przyrosty zaburzeń wokół punktu pracy. Wartości współczynników macierzy obliczone zostały w oparciu o wielomian dogładzający 3-go rzędu wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów.

Dokonując transformaty Laplace'a równania macierzowego, model nr 3 można przedstawić w postaci schematu strukturalnego zgodnie z rys.4.

1.4. Model nr 4

Jako ostatni model oznaczony nr 4 rozpatrywano linearyzowany model dynamiki samolotu w krótkookresowym ruchu podłużnym.

Model ten opracowano w oparciu o model nr 3 przy uwzględnieniu specyfiki ruchu krótkookresowego. Uwzględniono więc tylko te elementy macierzy **B** i **N** które mają decydujący wpływ w czasie pierwszych kilku sekund lotu, po wystąpieniu zaburzenia.

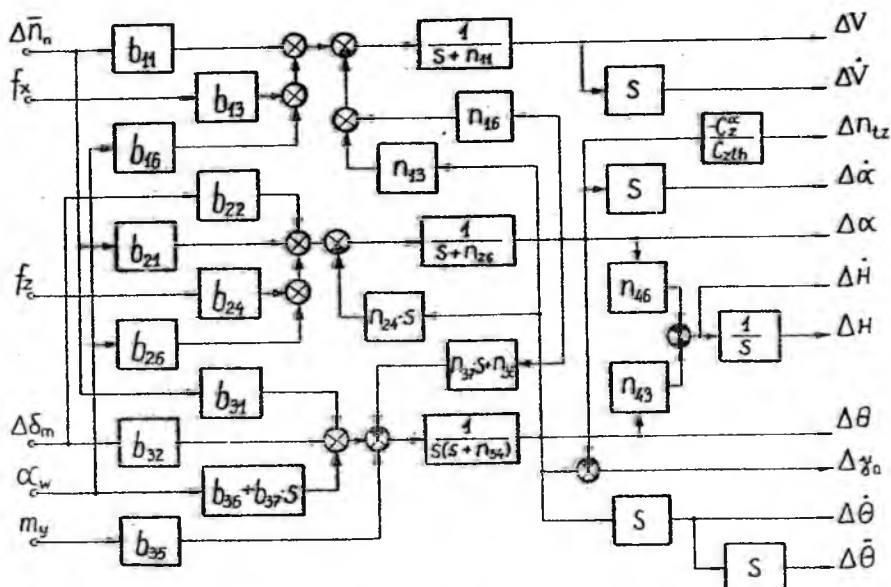
Model ten można opisać układem operatorowych równań ruchu:

$$\begin{aligned}
 (s + n_{11})\Delta V + n_{13}\Delta\theta + n_{16}\Delta\alpha &= b_{11}\Delta\bar{n}_n + b_{13}f_x + b_{16}\Delta\alpha_w, \\
 n_{24}s\Delta\theta + (s + n_{26})\Delta\alpha &= b_{21}\Delta\bar{n}_n + b_{22}\Delta\delta_m + b_{24}f_z + b_{26}\Delta\alpha_w, \\
 s(s + n_{34})\Delta\theta + (n_{37}s + n_{36})\Delta\alpha &= b_{31}\Delta\bar{n}_n + b_{32}\Delta\delta_m + \\
 &\quad + b_{35}m_y + (b_{36} + sb_{37})\Delta\alpha_w, \\
 n_{43}\Delta\theta + n_{46}\Delta\alpha + s\Delta H &= 0.
 \end{aligned}$$

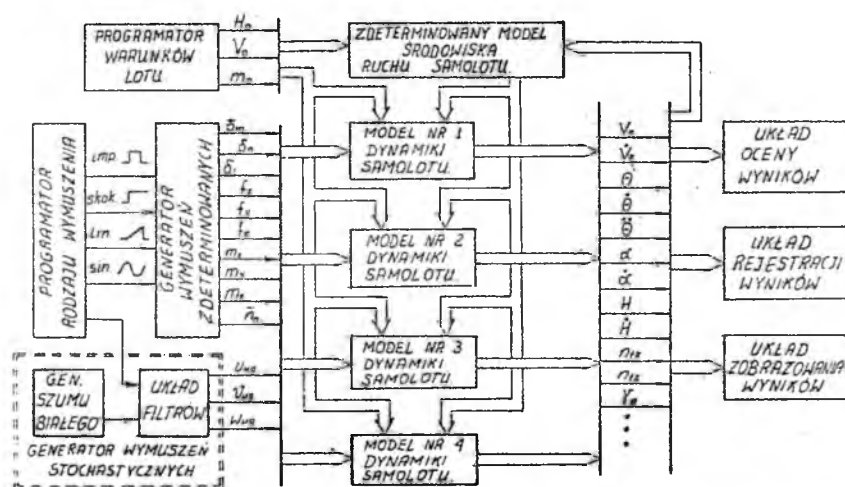
Model ten przedstawiono na rys.5.

2. Wyniki

Wymienione modele poddane były badaniom w układzie komputerowej symulacji, której schemat przedstawiony jest na rys.6.



Rys. 5. Schemat strukturalny linearyzowanego modelu dynamiki samolotu w ruchu krótkookresowym



Rys. 6. Schemat układu do badania dynamiki samolotu jako obiektu sterowania w różnych stopniach uproszczenia

Dokonano analizy porównawczej przedstawionych modeli.

Analiza miała na celu:

1. Określenie wpływu dokonywanych uproszczeń na dokładność odtwarzania parametrów lotu samolotu w stanach nieustalonych.
2. Sprawdzenie przydatności wymienionych modeli z punktu widzenia specyfiki syntezy adaptacyjnego układu sterowania samolotem.

Porównania przebiegów zmian parametrów lotu przy różnych wymuszeniach dokonano metodą jednoczynnikowej analizy wariancji.

Przy każdym rodzaju wymuszenia testowano, czy przebiegi zmian parametrów lotu pochodzą z tej samej populacji generalnej, przy założonym poziomie istotności.

Przykładowe przebiegi zmian parametrów lotu i weryfikacje hipotez H_0 , zakładających, że pochodzą one z jednej populacji generalnej przedstawiono na rys.7 ÷ 14.

Rys.7 i 8 ilustrują, że różnice w odtwarzaniu parametrów lotu dla modeli nieliniowych i linearyzowanych pogłębiają się przy większych wartościach wychylenia steru wysokości. Nieliniowe modele dla tych przypadków nie różnią się istotnie względem siebie podobnie jak modele linearyzowane.

Przebiegi zmian parametrów na rys.9 i 10 są ilustracją zasady, że zmiana warunków lotu nie wpływa na tendencje rozbieżności między modelami nieliniowymi i linearyzowanymi.

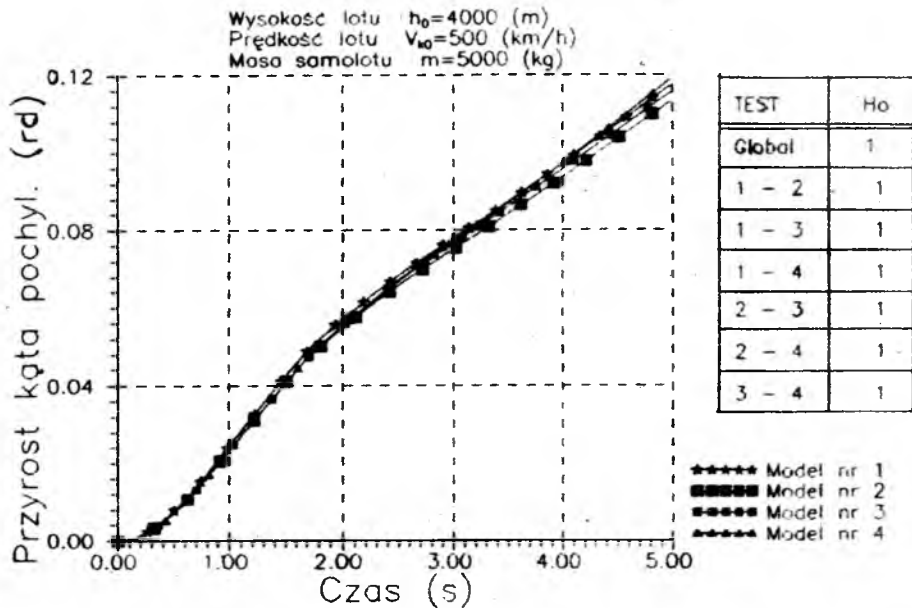
Na rys.11 i 12 pokazano, że istnieją przypadki kiedy dla jednych parametrów lotu wszystkie modele różnią się istotnie między sobą, dla innych parametrów natomiast przy tym samym wymuszeniu i tych samych warunkach początkowych stwierdzamy, że nie różnią się istotnie.

Rys. 13 jest ilustracją skrajnego przypadku, kiedy linearyzowany model ruchu krótkookresowego dobrze odtwarza przebieg zmian wybranego parametru w przedziale czasu charakterystycznym dla ruchu długookresowego. W większości przypadków natomiast model dynamiki ruchu krótkookresowego zgodnie z oczekiwaniami znacznie odbiega od pozostałych dla długich przedziałów czasu.

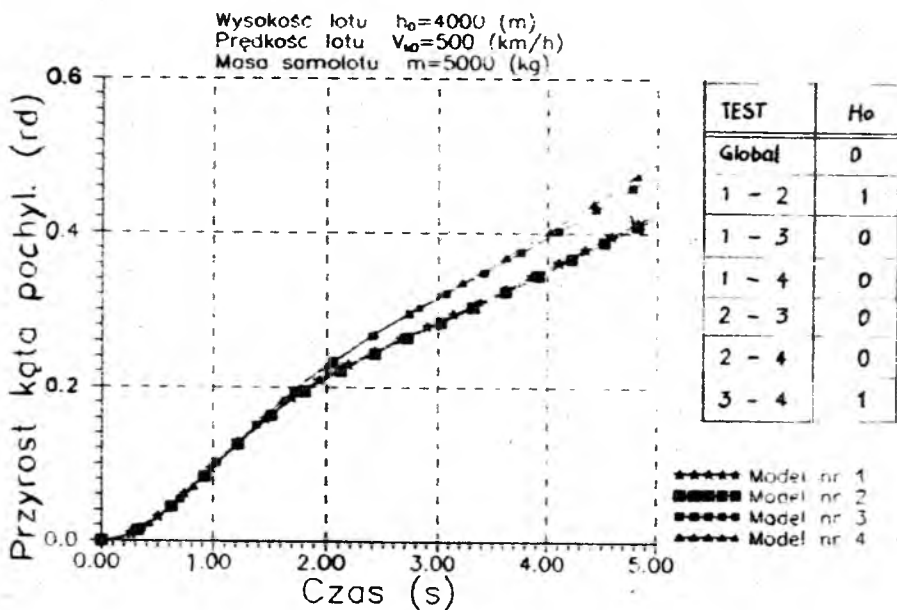
W przypadku wymuszenia turbulencją atmosfery w większości przypadków zmian parametrów modele nieliniowe istotnie różnią się od modeli linearyzowanych. Jako przykład pokazano na rys.14 zmianę kąta natarcia.

3. Wnioski

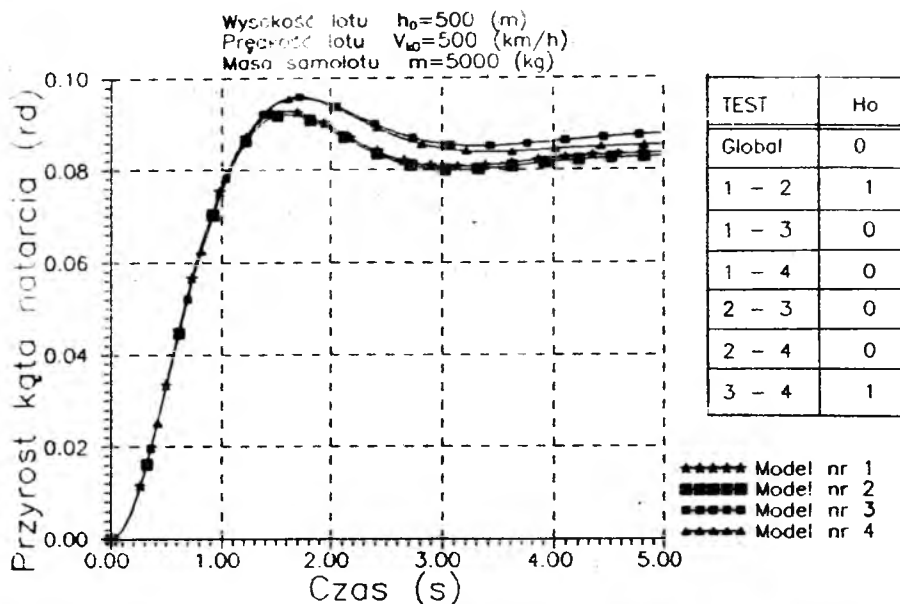
Przeprowadzone badania obejmowały 120 testów porównawczych przebiegów zmian parametrów przy różnych wymuszeniach.



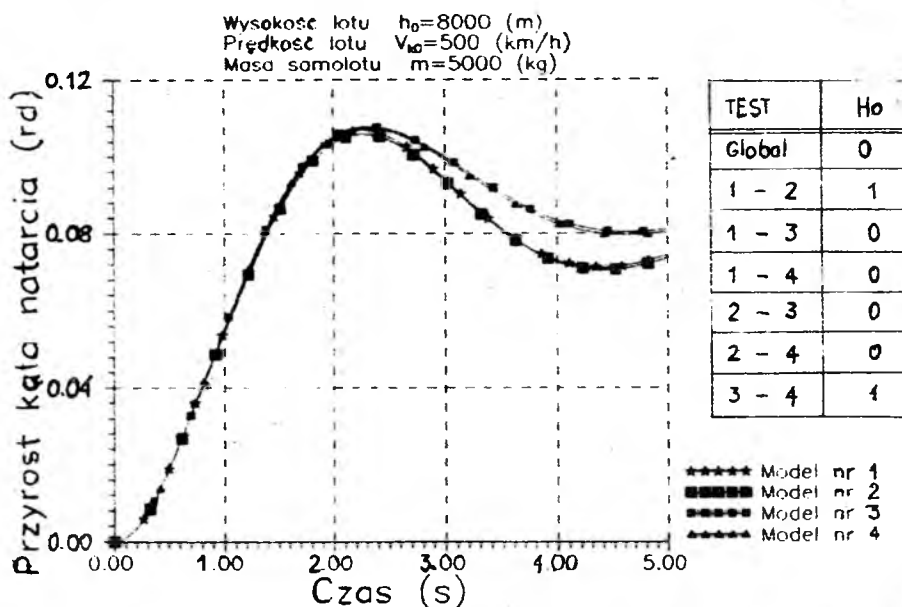
Rys. 7. Zmiana kąta pochylenia samolotu $\Delta\theta = f(t)$ po wychyleniu steru wysokości $\delta_m = -0.5$ [deg]



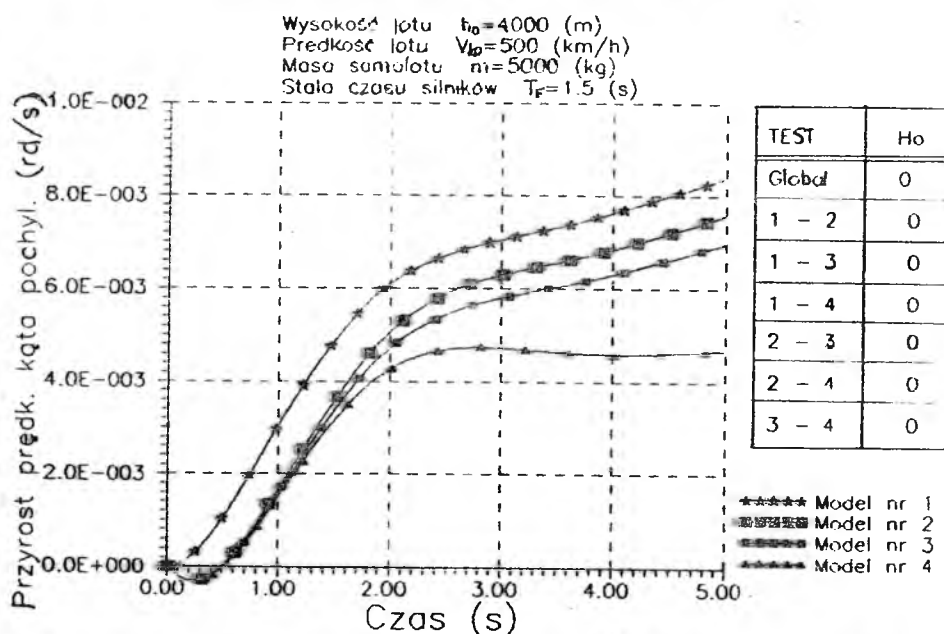
Rys. 8. Zmiana kąta pochylenia samolotu $\Delta\theta = f(t)$ po wychyleniu steru wysokości $\delta_m = -2$ [deg]



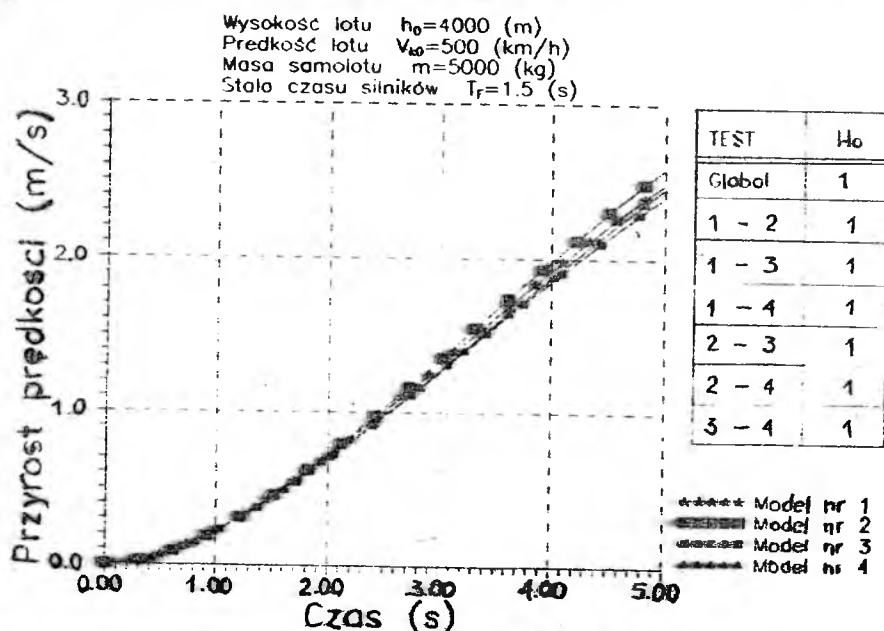
Rys. 9. Zmiana kąta natarcia $\Delta\alpha = f(t)$ po skokowym wychyleniu steru wysokości $\delta_m = -2$ [deg]



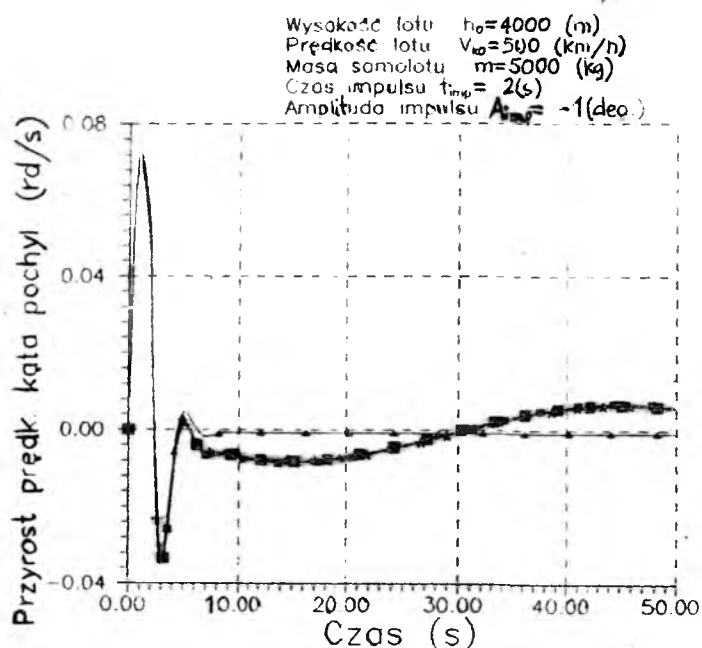
Rys. 10. Zmiana kąta natarcia $\Delta\alpha = f(t)$ po skokowym wychyleniu steru wysokości $\delta_m = -2$ [deg]



Rys. 11. Przyrost prędkości zmian kąta pochylecia $\Delta\dot{\theta} = f(t)$ po zmianie obrotów silników napędowych $\Delta\bar{n}_n = 10\%$

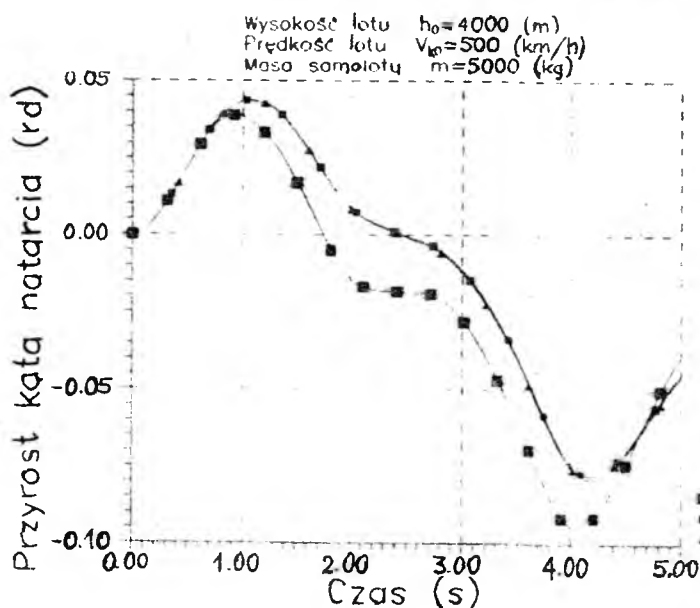


Rys. 12. Przyrost prędkości samolotu $\Delta V_k = f(t)$ po zmianie obrotów silników napędowych $\Delta\bar{n}_n = 10\%$



TEST	Ho
Global	1
1 - 2	1
1 - 3	1
1 - 4	1
2 - 3	1
2 - 4	1
3 - 4	1

Rys. 13. Przyrost prędkości zmian kąta pochylenia $\Delta\theta = f(t)$ po impulsowym wychyleniu steru wysokości - ruch długookresowy



TEST	Ho
Global	0
2 - 3	0
2 - 4	0
3 - 4	1

Rys. 14. Przyrost kąta natarcia $\Delta\alpha = f(t)$ po skokowym wychyleniu steru wysokości $\delta_m = -2$ [deg] i zaburzeniu turbulencją atmosfery

Wnioski z analizy są następujące:

1. W przeważającej liczbie przypadków modele 1 i 2 nie różniły się między sobą w sposób istotny. Zasada ta dotyczy również modeli 3 i 4 dla krótkich przedziałów czasu po wystąpieniu zaburzenia.
2. Modele linearyzowane w większości przypadków różniły się istotnie od modeli nieliniowych.
3. Różnice w odtwarzaniu parametrów lotu były zależne od następujących czynników:
 - wielkości zaburzenia,
 - rodzaju zaburzenia,
 - analizowanego parametru lotu,
 - warunków początkowych analizowanego ruchu.

Różnice te powiększały się przy zwiększaniu przedziału czasu analizy zmian parametrów.

Jednoznacznie więc nie można stwierdzić, który z wymienionych modeli jest najbardziej przydatny dla potrzeb syntezy adaptacyjnego układu sterowania samolotem. Wybór modelu zależny będzie m.in. od przyjętego prawa sterowania wykorzystującego odpowiednie parametry ruchu samolotu.

Czas obliczeń przy modelach nieliniowych znacznie się wydłuża. Dla przyjętej metody rozwiązywania równań różniczkowych i przyjętej metodzie interpolacji charakterystyk aerodynamicznych samolotu stosunek czasów obliczeń dla modelu nr 4 i 1 jest jak 1 : 35. Stosunek czasów jest bardzo zależny od przyjętej metody interpolacji charakterystyk aerodynamicznych samolotu.



THE PZL-130 ORLIK TRAINING AIRCRAFT



A fully acrobatic turboprop tandem two-seat military trainer which, as a result of specific design, comprises jet like handling qualities, maintaining low training costs, characteristic for turboprop power. Due to these features, a wide training syllabus is possible, containing also the phases normally executed on costly jets only. The jet-pilot cues on a propeller driven plane are the result of the following:

- aircraft general geometry - low aspect ratio wing and high surface loading, maintaining low draw and power loading;

- cockpit interior design, general arrangement and instrumentation, similar to typical jet-plane cockpit.

A combined effect of the minimal overall dimensions, low weight and high power, result in:

- excellent performance - both, level speed and jet-like climb;

possibility to take significant underwing stores, giving a wide spectrum of training tasks.

The aircraft consists of a semimonocoque all metal low wing structure with retractable tricycle-type landing gear and is powered by the Czechoslovak Walter M.601T

engine rated 560 kW (i.e. 750 HP) or by 3 other kinds of Pratt & Whitney Canada engines of the PT6A family, rated from 405 to 700 kW (550 to 950 HP).

It comprises systems like the electric, hydraulic, pneumatic, air conditioning, oxygen supply and the escape (ejection seats) systems.

An audio integrating system controls the audio services from all the communication, navigation and interphone systems. On customer demand, single or dual VHF, UHF and/or HF systems may be installed. Both cockpits are to be fully instrumented and furnished according to customer's specification. The optional equipment pattern includes various avionic and flight instrumentation systems from simple ones, up to very sophisticated with GPS, LORAN, ILS, MLS, FMS, EFIS and HUD included. Also systems like the de-icing, emergency locator, anti-g etc. may be installed.

Any other requirement of the customer, will be investigated with great care. The manufacturer is ready to start talks concerning details of equipment any time. The deliveries can start in about one year after contract signing.

MODEL PROCESU WSTĘPNEJ ORIENTACJI BEZKARDANOWEGO SYSTEMU NAWIGACJI INERCJALNEJ¹

ALBERT ORTYL

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wprowadzenie

Lotnicze inercjalne systemy nawigacyjne w sposób autonomiczny wyznaczają parametry charakteryzujące pozycję, prędkość i położenie przestrzenne statku powietrznego (SP). Jako dane wejściowe do wyliczenia tych parametrów wykorzystują informacje o liniowym i kątowym ruchu SP względem przestrzeni inercjalnej, mierzone przez elementy pomiarowe wchodzące w skład systemu. W systemach kardanych elementy pomiarowe zamontowane są na stabilizowanej giroskopowo platformie, natomiast w systemach bezkardanowych są bezpośrednio zamontowane na kadłubie SP.

Blok pomiarowy rozpatrywanego bezkardanowego systemu nawigacji inercjalnej składa się z trzech przyspieszeniomierzy i trzech urządzeń mierzących prędkości kątowe, które w ogólności nazywać będziemy giroskopami. Osie pomiarowe przyspieszeniomierzy i giroskopów wyznaczają pomiarowy układ współrzędnych P w taki sposób, że na każdej osi układu znajduje się jeden giroskop i jeden przyspieszeniomierz. Założono, że pomiarowy układ współrzędnych w sposób idealny pokrywa się z układem związanym ze SP. W ten sposób sygnały z przyspieszeniomierzy i giroskopów reprezentują składowe wektorów przyspieszenia pozornego i prędkości kątowej ruchu SP względem przestrzeni inercjalnej wzdłuż osi pomiarowego układu współrzędnych. Aby realizować zadania nawigacyjne należy przyjąć pewien bazowy układ współrzędnych B , w którym będzie rozwiązywane główne równanie nawigacji inercjalnej:

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

gdzie:

- $\mathbf{a}$ – wektor przyspieszenia pozornego;
- $\mathbf{w}$ – wektor przyspieszenia bezwzględnego, $\mathbf{w} = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$;
- $\mathbf{g}$ – wektor przyspieszenia siły ciężkości.

¹ Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Zmierzone w pomiarowym układzie współrzędnych sygnały są przeliczane do układu bazowego zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_P^B \mathbf{P}, \quad (1.2)$$

gdzie:

$\mathbf{B}, \mathbf{P}$ – wektory odpowiednio w bazowym i pomiarowym układzie współrzędnych

$$\mathbf{C}_P^B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{C} = 1, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{C}^T = \mathbf{E},$$

$\mathbf{T}$ – symbol transformacji macierzy,

$\mathbf{C}$ – macierz transformacji z pomiarowego do bazowego układu współrzędnych,

$\mathbf{E}$ – macierz jednostkowa.

Wymaga to wyznaczenia macierzy transformacji $\mathbf{C}$, do czego wykorzystuje się sygnały wyjściowe z giroskopów mierzących ruch kątowy SP w przestrzeni inercjalnej. Zależności pomiędzy zmierzonymi prędkościami kątowymi a położeniem przestrzennym określa poniższe równanie:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}_P^B = \mathbf{C}_P^B \boldsymbol{\omega}_P, \quad (1.3)$$

gdzie macierz:

$$\boldsymbol{\omega}_P = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{P3} & \omega_{P2} \\ \omega_{P3} & 0 & -\omega_{P1} \\ -\omega_{P2} & \omega_{P1} & 0 \end{bmatrix},$$

określa zmierzone prędkości kątowe ruchu SP względem inercjalnego układu współrzędnych.

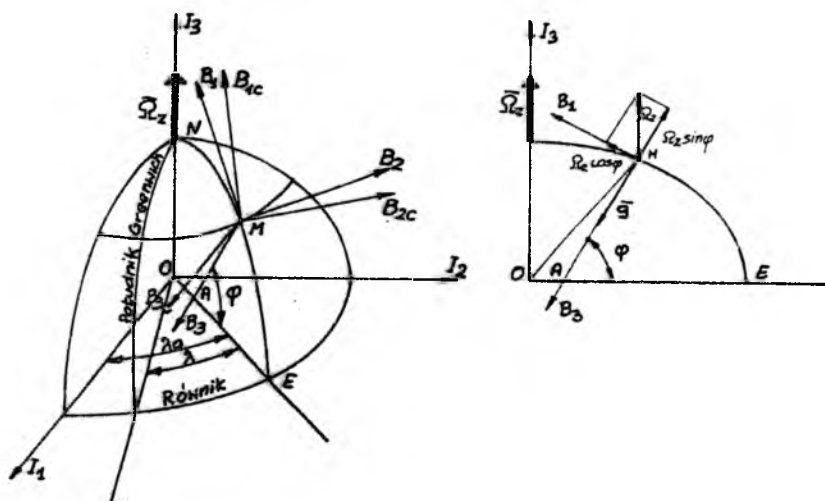
Macierz transformacji $\mathbf{C}$ w dowolnym momencie czasu możemy otrzymać całkując równanie (1.2) z uwzględnieniem warunków początkowych dla $t = 0$. Informacje o warunkach początkowych otrzymujemy podczas przygotowania do pracy systemu nawigacji inercjalnej. Zakres ten obejmuje dwie podstawowe czynności [1]:

1. wstępną orientację bloku pomiarowego;
2. określenie początkowych wartości współrzędnych położenia i prędkości SP.

Pod pojęciem wstępnej orientacji w ogólnym przypadku rozumie się określenie orientacji przestrzennej pomiarowego układu współrzędnych P względem układu bazowego B . Może to być zarówno analityczne określenie wzajemnej orientacji dwóch układów współrzędnych bądź też zestaw czynności pozwalających na uzgodnienie osi tych dwóch układów (systemy kardanolowe).

Przeprowadzenie wstępnej orientacji wymaga rozpatrzenia dwóch głównych układów współrzędnych:

1. pomiarowego układu współrzędnych P związanego z elementami pomiarowymi;
2. bazowego układu współrzędnych B .



Rys. 1. Wzajemne położenie układów współrzędnych B , B_c , I oraz umiejscowienie wektorów prędkości kątownej ruchu dobowego Ziemi Ω_z oraz przyspieszenia siły ciężkości g

W niniejszych rozważaniach jako bazowy układ współrzędnych przyjęto układ, którego osie skierowane są odpowiednio: B_1 – na północ N , B_2 – na wschód E , B_3 – wzdłuż pionu miejscowego i tworzą prawoskrętny, prostokątny układ współrzędnych (rys.1). Fizyczna realizacja konkretnej metody często wymaga wprowadzenia dodatkowych układów współrzędnych – inercjalnego układu współrzędnych I i bazowego-wyliczonego układu współrzędnych B_c . Niezależnie od tego jakimi środkami pomiarowymi dysponujemy wszystkie metody wstępnej orientacji mają jedną łączącą je cechę – każda mierzona wielkość jest wielkością wektorową. Mimo, że zmierzone w procesie wstępnej orientacji wielkości mogą

być przedstawione w postaci wektorów, to do właściwego przeprowadzenia tego procesu wystarczy określić tylko ich kierunek. Określenie modułu wektora i jego składowych nie jest warunkiem koniecznym a tylko procesem pośrednim do określenia kierunku wektora.

Można wykazać [2], że określenie przestrzennego położenia pomiarowego układu współrzędnych przy pomocy wielkości wektorowych wymaga pomiaru minimum dwóch niekolinearnych wektorów, których orientacja względem bazowego układu współrzędnych jest znana.

Przy realizacji wstępnej orientacji względem płaszczyzny horyzontu i południka geograficznego oraz ze względu na przyjętą konfigurację bloku pomiarowego, jako te wektory przyjęto wektor prędkości kątowej ruchu dobowego Ziemi Ω_Z oraz wektor przyspieszenia siły ciężkości g . Należy jednak zaznaczyć, że w rejonach podbiegunowych następuje zakłócenie warunku niekolinearności mierzonych wektorów (rys.1).

2. Sformułowanie problemu

2.1. Założenia

W niniejszych rozważaniach założono, że przygotowanie systemu bezkardanowego do pracy ma odbywać się w sposób jak najbardziej automatyczny i autonomiczny, czyli bez korzystania z zewnętrznych źródeł informacji.

Nieruchomy system bezkardanowy będzie prawidłowo zorientowany, gdy wartości składowych przyspieszenia a_{B1c} , a_{B2c} , a_{B3c} oraz prędkości kątowych ruchu układu bazowego B względem układu inercjalnego I ω_{B1c} , ω_{B2c} , ω_{B3c} spełniają poniższe warunki:

$$\begin{bmatrix} a_{B1} \\ a_{B2} \\ a_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{B1c} \\ a_{B2c} \\ a_{B3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = C_P^B \begin{bmatrix} a_{P1} \\ a_{P2} \\ a_{P3} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{B1} \\ \omega_{B2} \\ \omega_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{B1c} \\ \omega_{B2c} \\ \omega_{B3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_Z \cos \varphi \\ 0 \\ -\Omega_Z \sin \varphi \end{bmatrix} = C_P^B \begin{bmatrix} \omega_{P1} \\ \omega_{P2} \\ \omega_{P3} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

gdzie:

Ω_Z - prędkość kątoowa ruchu dobowego Ziemi,
 $\Omega_Z = 15.04^\circ/h$;

- φ – początkowa szerokość geograficzna;
 C_P^B – macierz transformacji z układu pomiarowego do bazowego;
 $C_P^{B_c}$ – macierz transformacji z układu pomiarowego do bazowego-wyliczonego;
 a_{P1}, a_{P2}, a_{P3} – sygnały wyjściowe z przyspieszeniomierzy;
 $\omega_{P1}, \omega_{P2}, \omega_{P3}$ – sygnały wyjściowe z giroskopów.

W wyniku niedokładnych obliczeń zamiast macierzy transformacji C otrzymujemy macierz C_c , co prowadzi do błędnego przeliczenia zmierzonych składowych przyspieszeń i prędkości kątowych do układu bazowego B – czyli zamodelowany został bazowy-wyliczony układ współrzędnych B_c . Błędy te są uzależnione od wartości macierzy C , wobec czego możemy wprowadzić pętlę sprzężenia zwrotnego, w której błąd przeliczenia przyspieszeń i prędkości kątowych SP jest podawany na wejście systemu w celu uaktualnienia bieżącej macierzy transformacji tak, aby doprowadzić do zrównania się macierzy C_c i C ; zapewnia to spełnienie warunków (2.1) i (2.2).

Aby przejść z układu bazowego B do bazowego-wyliczonego B_c , należy złożyć kolejno trzy obroty [3]:

1. o kąt odchylenia Ψ wokół osi B_3 ;
2. o kąt pochylenia Θ wokół osi B'_2 ;
3. o kąt przechylenia Φ wokół osi B_{1c} .

W dalszej części zostaną rozpatrzone niezależnie każdy z obrotów oraz ich złożenie.

Założono, że została przeprowadzona zgrubna wstępna orientacja i kąty Ψ , Θ , Φ można uznać za małe. Wówczas macierz C_c można uznać za ortogonalną, tzn.:

$$C_c^T C_c = E, \quad (2.3)$$

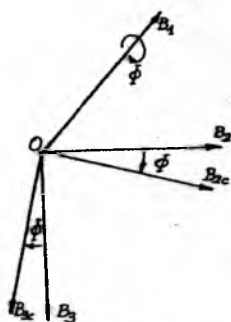
gdzie E – macierz jednostkowa.

2.2. Obrót wokół osi B_1 o kąt przechylenia Φ

Obrót wokół osi B_1 o kąt Φ przedstawiony jest na rys.2.

Bazowy-wyliczony układ współrzędnych B_c jest powiązany z układem bazowym B równaniem macierzowym:

$$B_c = R(\Phi)B, \quad (2.4)$$



Rys. 2.

gdzie $R(\Phi)$ – jest macierzą obrotu zdefiniowaną jako:

$$R(\Phi) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Phi \\ 0 & -\Phi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi \\ 0 & \Phi & 0 \end{bmatrix} = E - \Phi.$$

Z równania (1.2) i (2.4) otrzymujemy:

$$B_c = R(\Phi) C_P^B. \quad (2.5)$$

Macierz C_c otrzymujemy z równań (1.2) i (2.5):

$$C_P^{B_c} = R(\Phi) C_P^B, \quad (2.6)$$

$$C_P^{B_c} = (E - \Phi) C_P^B. \quad (2.7)$$

Aby uzgodnić osie bazowego-wyliczonego układu B_c z osiami układu bazowego B , należy wyznaczyć odpowiednie sygnały różnicy i sprowadzić kąt Φ do zera.

Zmierzone składowe przyspieszeń a_{P1} , a_{P2} , a_{P3} są przeliczane do bazowego-wyliczonego układu współrzędnych B_c wg zależności:

$$A_{B_c} = (E - \Phi) C_P^B A_P, \quad (2.8)$$

która po rozwinięciu ma postać:

$$\begin{bmatrix} a_{B1c} \\ a_{B2c} \\ a_{B3c} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} + \Phi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_{P1} \\ a_{P2} \\ a_{P3} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Z równania (2.9) widać, że składowe a_{B2c} i a_{B3c} są obarczone błędem wynikającym z istnienia kąta przechylenia Φ . Wzorem metody poziomowania

systemów kardanowych, można wykorzystać składową a_{B2c} do wyliczenia sygnału korekcyjnego, który dokona analitycznego obrotu wokół osi B_1 o kąt $(-\Phi)$ (uaktualnienie macierzy C_c):

$$\frac{d}{dt}C_P^{B_c} = C_P^{B_c}\varepsilon_P, \quad (2.10)$$

gdzie:

$$\varepsilon_P = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_{P3} & \varepsilon_{P2} \\ \varepsilon_{P3} & 0 & -\varepsilon_{P1} \\ -\varepsilon_{P2} & \varepsilon_{P1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Sygnały korekcyjne $\varepsilon_{P1}, \varepsilon_{P2}, \varepsilon_{P3}$ otrzymamy poprzez przeliczenie sygnału a_{B2c} do pomiarowego układu współrzędnych:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{P1} \\ \varepsilon_{P2} \\ \varepsilon_{P3} \end{bmatrix} = C_{B_c}^P \begin{bmatrix} a_{B2c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

gdzie:

$$C_{B_c}^P = (C_P^{B_c})^T.$$

Można wykazać [4], że przy takiej pętli sprzężenia zwrotnego kąt przechylenia Φ wraz z upływem czasu maleje wykładniczo do zera ze stałą czasową $1/g$:

$$\frac{d}{dt}\Phi + g\Phi = 0. \quad (2.13)$$

Innymi słowy, bazowy-wyliczony układ współrzędnych B_c dąży do pokrycia się z rzeczywistym układem bazowym B czyli jest realizowana wstępna orientacja względem osi B_1 .

2.3. Obrót wokół osi B_2 o kąt pochylenia θ

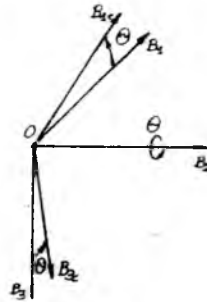
Obrót wokół osi B_2 o kąt θ przedstawiony jest na rys.3.

Bazowy-wyliczony układ współrzędnych B_c powiązany jest z układem pomiarowym P zależnością podobną do (2.5), a mianowicie:

$$B_c = R(\theta)C_P^{B_c}, \quad (2.14)$$

gdzie $R(\theta)$ jest macierzą obrotu zdefiniowaną jako:

$$R(\theta) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} = E - \Theta. \quad (2.15)$$



Rys. 3.

Zmierzone składowe przyspieszeń a_{P1} , a_{P2} , a_{P3} są przeliczane do bazowego-wyliczonego układu współrzędnych B_c wg zależności:

$$A_{Bc} = (E - \Theta) C_P^B A_P, \quad (2.16)$$

która po rozwinięciu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} a_{B1c} \\ a_{B2c} \\ a_{B3c} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} + \Theta \begin{bmatrix} -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_{P1} \\ a_{P2} \\ a_{P3} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Z równania (2.17) wybieramy składową $(-a_{B1c})$ jako daną do wyliczenia sygnałów korekcyjnych ε_{P1} , ε_{P2} , ε_{P3} , takich aby dokonać analitycznego obrotu wokół osi B_2 o kąt $(-\Theta)$. Sygnały korekcyjne otrzymamy przeliczając $(-a_{B1c})$ do układu pomiarowego P :

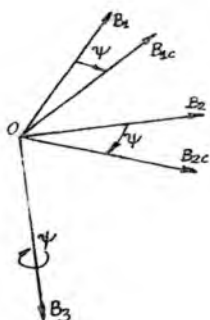
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{P1} \\ \varepsilon_{P2} \\ \varepsilon_{P3} \end{bmatrix} = C_{Bc}^P \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{B1c} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Podobnie jak przy obrocie wokół osi B_1 można wykazać, że przy takiej pętli sprzężenia zwrotnego kąt pochylenia Θ maleje wykładniczo do zera ze stałą czasu $1/g$:

$$\frac{d}{dt}\Theta + g\Theta = 0. \quad (2.19)$$

2.4. Obrót wokół osi B_3 o kąt odchylenia ψ

Obrót wokół osi B_3 o kąt ψ został przedstawiony na rys.4.



Rys. 4.

Bazowy-wyliczony układ współrzędnych B_c jest powiązany z układem pomiarowym zależnością:

$$B_c = R(\Psi) C_P^B P, \quad (2.20)$$

gdzie $R(\Psi)$ jest macierzą obrotu zdefiniowaną jako:

$$R(\Psi) \simeq \begin{bmatrix} 1 & \Psi & 0 \\ -\Psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\Psi & 0 \\ \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E - \Psi. \quad (2.21)$$

W tym przypadku z uwagi na to, że obrót jest realizowany w płaszczyźnie horyzontu, sygnały z przyspieszeniomierzy nie mogą być danymi do wyliczenia sygnałów korekcyjnych. Można natomiast wykorzystać wielkości zmierzone przez giroskopy – składowe prędkości kątowej ruchu dobowego Ziemi Ω_Z .

Przeliczamy zmierzone składowe prędkości kątowej przez zgrubnie wyznaczoną macierz transformacji C_c do bazowego-wyliczonego układu współrzędnych zgodnie z zależnością:

$$\omega_{Bc} = (E - \Psi) C_P^{Bc} \omega_P, \quad (2.22)$$

która po rozwinięciu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \omega_{B1c} \\ \omega_{B2c} \\ \omega_{B3c} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} + \Psi \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \omega_{P1} \\ \omega_{P2} \\ \omega_{P3} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Aby system bezkardanowy był prawidłowo zorientowany to zgodnie z równaniem (2.2) wyraz ω_{B2c} (tzw. składowa wschodnia) powinien się zerować. Wobec tego można wykorzystać tę wartość do wyliczenia sygnałów korekcyjnych ε_{P1} , ε_{P2} , ε_{P3} , takich aby dokonać obrotu wokół osi B_3 o kąt $(-\Psi)$. Sygnały korekcyjne

otrzymamy, przeliczając $(-\omega_{B2c})$ do układu pomiarowego P :

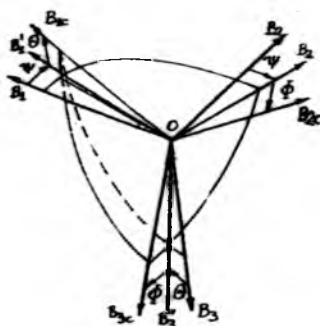
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{P1} \\ \varepsilon_{P2} \\ \varepsilon_{P3} \end{bmatrix} = C_{B_c}^P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{B2c} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach można wykazać [1], że przy takiej pętli sprzężenia zwrotnego kąt Ψ maleje wykładniczo do zera ze stałą czasu $1/(\Omega_Z \cos \varphi)$:

$$\frac{d}{dt}\Psi + \Omega_Z \Psi \cos \varphi = 0. \quad (2.25)$$

2.5. Złożenie trzech obrotów

Bazowy-wyliczony układ współrzędnych B_c można otrzymać z układu bazowego B , dokonując obrotów o kolejne trzy kąty Ψ , Θ , Φ co jest przedstawione na rys.5.



Rys. 5.

Macierze obrotów $R(\Phi)$, $R(\Theta)$, $R(\Psi)$ zostały zdefiniowane wyżej. Bazowy-wyliczony układ współrzędnych B_c jest wobec tego powiązany z układem pomiarowym P zależnością:

$$B_c = R(\Phi)R(\Theta)R(\Psi)C_P^B. \quad (2.26)$$

Jeżeli zdefiniujemy Ω jako antysymetryczną macierz postaci:

$$\Omega = R(\Phi)R(\Theta)R(\Psi) \simeq \begin{bmatrix} 0 & -\Psi & \Theta \\ \Psi & 0 & -\Phi \\ -\Theta & \Phi & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

to równanie (2.26) można zapisać w postaci:

$$B_c = (E - \Omega)C_P^B P. \quad (2.28)$$

Wielkości błędów konieczne do wyliczenia sygnałów korekcyjnych macierzy transformacji wybieramy następująco:

1. wielkość a_{B2c} wykorzystana będzie do korekcji odchylenia wokół osi B_1 ;
2. wielkość $(-a_{B1c})$ zastosujemy do korekcji odchylenia wokół osi B_2 ;
3. wielkość $(-\omega_{B2c})$ wykorzystamy do korekcji odchylenia wokół osi B_1 i B_3 .

Wielkości te otrzymamy przeliczając zmierzone składowe przyspieszeń i prędkości kątowych do bazowego-wyliczonego układu współrzędnych B_c :

$$A_{Bc} = C_P^{B_c} A_P, \quad (2.29)$$

$$\omega_{Bc} = C_P^{B_c} \omega_P. \quad (2.30)$$

Sygnały korekcyjne otrzymamy, przeliczając a_{B2c} , $-a_{B1c}$, $-\omega_{B2c}$ do pomiarowego układu współrzędnych P :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{P1} \\ \varepsilon_{P2} \\ \varepsilon_{P3} \end{bmatrix} = C_P^P \begin{bmatrix} a_{B2c} \\ -a_{B1c} \\ -\omega_{B2c} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Zgodnie ze wzorem (2.10) mamy:

$$\frac{d}{dt} C_P^{B_c} = C_P^{B_c} \varepsilon_P. \quad (2.32)$$

Schemat blokowy układu realizującego tę metodę wstępnej orientacji przedstawia rys.6.

3. Wnioski

W systemach kardanowych w celu przeprowadzenia procesu wstępnej orientacji wykorzystujemy sygnały z elementów pomiarowych do generowania sygnałów korekcyjnych, sterujących silnikami ruchomej platformy (poziomowanie i orientowanie w azymucie).

W systemach bezkardanowych, które nie posiadają ruchomej platformy nie możemy w ten sposób wykorzystywać sygnałów korekcyjnych. Dlatego należy

OCENA MOŻLIWOŚCI WYKONYWANIA LOTÓW ZE ŚLEDZENIEM RZEŻBY TERENU NA PODSTAWIE ANALIZY WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNYCH SAMOŁOTU¹

GRZEGORZ CIĘŻKI

WIESŁAW SOBIERAJ

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wprowadzenie

Systemy sterowania lotem ze śledzeniem rzeźby terenu stosowane są w statkach powietrznych już od kilkunastu lat (np. samoloty F-16, rakiety Cruise). Obniżenie wysokości lotu w celu wykorzystania maskujących właściwości terenu pozwala na zmniejszenie skuteczności radarowych systemów obronnych przeciwnika. O ile zastosowanie "optymalnego" systemu śledzenia terenu w każdym samolocie jest ekonomicznie nieuzasadnione, o tyle dobrze jest znać szanse jakie ma dany samolot na dotarcie do celu bez wykrycia przez przeciwnika. Szanse te w znacznym stopniu zależą od zastosowanego w nim systemu sterowania umożliwiającego lot na małej wysokości.

W artykule przedstawiono wyniki analizy właściwości dynamicznych samolotu I-22MS w aspekcie wykonywania lotów na małej wysokości z uwzględnieniem pewnych ograniczeń. Przyjęte ograniczenia wynikają z możliwości fizjologicznych pilota i stopnia uproszczenia rozwiązań technicznych mających swoje odzwierciedlenie w kosztach realizacji.

Wyniki te pozwalają wstępnie określić:

- maksymalną wysokość przeszkody;
- minimalną odległość od przeszkody;
- zasięg stacji radiolokacyjnej śledzącej rzeźbę terenu;
- przedział zmian sygnałów sterujących.

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

2. Założenia

1. Lot odbywa się na małej wysokości w terenie średnio pofałdowanym. Miernikiem pofałdowania jest odchylenie standardowe wysokości H_n uzyskanej w procesie próbkowania:

$$d_r = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (H_n - H_{sr})^2},$$

gdzie:

N – liczba próbek w strefie;

H_n – wysokość terenu uzyskana przy n -tym pomiarze.

I tak za teren średnio pofałdowany przyjmuje się teren, dla którego:
 $41.8 \text{ m} < d_r < 111 \text{ m}$.

Gdy brak danych o pofałdowaniu terenu to przyjmuje się że spodziewana wysokość przeszkody wynosi: $H_{p \max} = 3d_r$.

Do analizy przyjęto: $H_{p \text{ sr}} = 100 \text{ m}$; $H_{p \max} = 300 \text{ m}$.

2. $H_0 = 100 \text{ m}$ – wysokość bezwzględna przyjęta jako wysokość lotu fazy I.
3. Obroty $\bar{n}$ zespołu napędowego pozostają niezmiennie w całym zakresie lotu.
4. Moment bezwładności J_y w trakcie lotu pozostaje niezmienny.
5. Zmiana masy wynika ze średniego zużycia paliwa $m = m - Q_p t$.
6. Lot odbywa się w atmosferze niezaburzonej.
7. Samolot wchodzi do strefy wykonywania zadania lotem ustalonym prostoliniowym.
8. Dopuszczalne przeciążenia pionowe $n_z \in (0 \div 3.5)$ zgodnie z normą MIL-F-8785B.

3. Rozwiązanie problemu

Analizę oparto na rozwiązaniach układu uproszczonych nieliniowych równań izolowanego ruchu samolotu w płaszczyźnie pionowej zapisanych w układzie

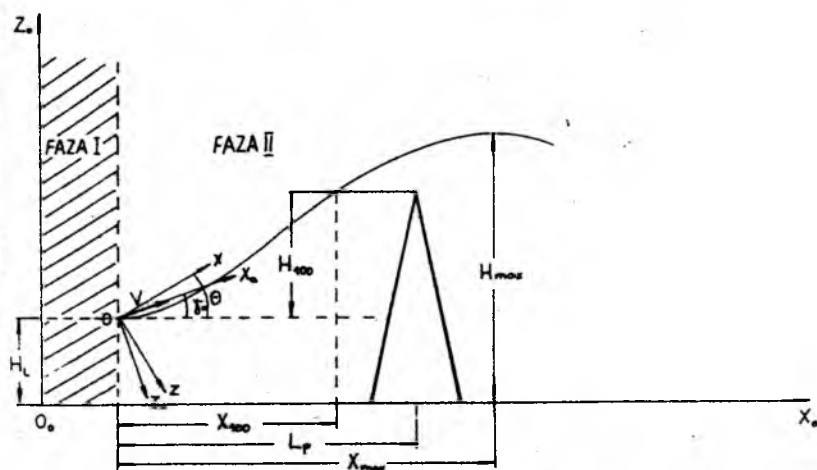
przepływu i w układzie ziemskim o początku w punkcie rozpoczęcia wykonywania manewru:

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV_s}{dt} &= \sum P_x, \\
 m V_s \frac{d\gamma_a}{dt} &= \sum P_z, \\
 J_y \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \sum M_y, \\
 \frac{dH}{dt} &= V_s \sin \gamma_a, \\
 \frac{dx_0}{dt} &= V_s \cos \gamma_a.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Jako dane do obliczeń wykorzystano charakterystyki aerodynamiczne samolotu I-22MS uzyskane z badań tunelowych modelu i aproksymowane wielomianami aproksymującymi n -tego stopnia o postaci:

$$y = \sum_{n=0}^N a_n X^n.$$

Zagadnienie podzielono na dwie fazy. Pierwsza faza to prostoliniowy lot ustalony do strefy wykonywania manewru, a druga – krzywoliniowy lot w płaszczyźnie pionowej wymuszony stałym wychyleniem steru wysokości δ_h .



Rys. 1. Przyjęte w rozwiązaniu fazy lotu

3.1. Faza I

Wykorzystując warunki:

$$\begin{aligned}\sum P_x &= 0, \\ \sum P_z &= 0, \\ \sum M_y &= 0,\end{aligned}\quad (3.2)$$

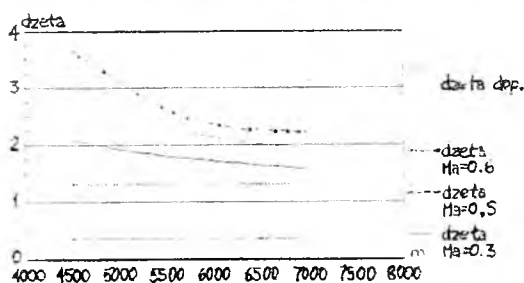
można fazę tę nazwać fazą przygotowania samolotu do wykonywania manewru. Podczas jej trwania zostają ustalone wielkości parametrów będących niezmiennymi w fazie drugiej – czyli tzw warunki początkowe. Należą do nich obroty zespołu napędowego $\dot{n}$ oraz kąt zaklinowania statecznika poziomego φ_h zapewniający spełnienie warunku $\sum M_y = 0$. Wyznaczono także przedziały zmian kąta natarcia α_0 w funkcji masy i prędkości samolotu. Analiza przeprowadzonych obliczeń ograniczyła zakres prędkości lotu na danej wysokości ze względu na ciąg rozporządzalny P_r zespołu napędowego do $V_s \in 0.3 \div 0.6 > \text{Ma}$.

Zlinearyzowana i uproszczona postać dwóch ostatnich równań układu (3.2):

$$\begin{aligned}(-s + n_{2\alpha})\Delta\alpha + (s + n_{2\theta})\Delta\theta &= n_{2\delta h}\Delta\delta_h, \\ (n_{3\alpha}s + n_{3\dot{\alpha}})\Delta\alpha + (s^2 + n_{3q}s)\Delta\theta &= n_{3\delta h}\Delta\delta_h,\end{aligned}\quad (3.3)$$

określa transmitancję samolotu w ruchu krótkookresowym o ogólnej postaci:

$$W(s)_{\alpha/\delta h} = \frac{k\omega_a^2}{s^2 + 2\zeta\omega_a s + \omega_a^2}.$$



Rys. 2. Wykres bezwymiarowego współczynnika tłumienia ruchu krótkookresowego

Rozwiązanie układu równań (3.3) dla przyjętych wariantów masowych i prędkości określiło przedział zmian bezwymiarowego współczynnika tłumienia ζ w ruchu krótkookresowym.

Wg MIL-F-8785B powinien on zawierać się w przedziale $< 0.35 \div 1.3 >$. Jak widać na rys.2 samolot I-22MS "bez automatyki" ze względu na ζ nie spełnia warunków w/w normy. Jest samolotem "przetłumionym".

Element ten należy uwzględnić przy projektowaniu systemu automatycznego sterowania (SAS).

3.2. Faza II

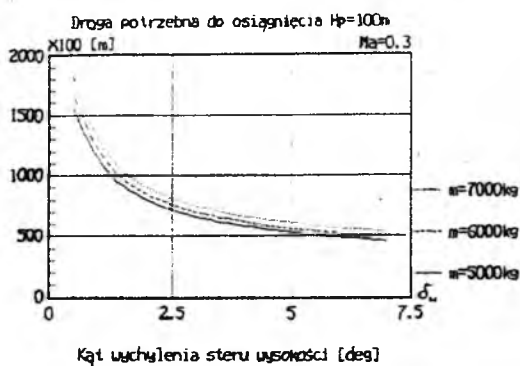
Ruch samolotu w fazie II opisany jest układem równań (3.1). Sygnałem sterującym jest stałe wychylenie steru wysokości $\delta_h \in < -0.5 \div -7 >^\circ$ mające na celu wymuszenie ruchu w płaszczyźnie pionowej. Układ równań (3.1) rozwiązywany jest metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Wyniki obliczeń wykorzystano do wyznaczenia (dla założonej masy i prędkości):

- X_{0100} - drogi, na której samolot osiąga wysokość $H_p = H_{100} = 100$ m (rys.3);
- X_{0300} - drogi, na której samolot osiąga wysokość $H_p = 300$ m (rys.4);
- H_{max} - maksymalnej wysokości jaką jest on zdolny osiągnąć przy stałym δ_h (rys.5);
- X_{0max} - drogi, na której osiąga H_{max} (rys.6);
- n_z - przeciążeń jakim podlega pilot w trakcie wykonywania manewru (rys.7);
- θ - kąt pochylenia samolotu w momencie osiągnięcia H_{max} (rys.8).

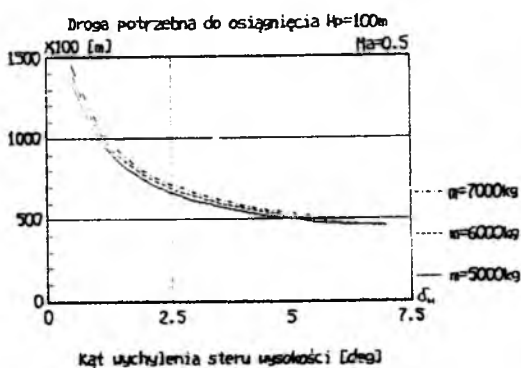
Jak wynika z rys.5 dla znaczącej części zakresu sterowań maksymalna wysokość jaką może osiągnąć badany samolot jest określona wysokością, na której następuje przepadanie ($\alpha > \alpha_{kr}$) lub kąt pochylenia toru lotu γ_a przekroczy wartość 90° . Wraz ze wzrostem prędkości zakres ten rozszerza się. Z tego też względu należy przyjąć za rzeczywistą H_{max} wysokość mniejszą od wyliczonej H_{max} . Dla prędkości lotu z liczbami Macha równymi 0.5 i 0.6 H_{max} wielokrotnie przekracza założoną maksymalną wysokość spodziewanej przeszkody. Minimalna wartość H_{max} dla tych prędkości wynosi 1900 m. Z tego też względu zakresy te są poza zainteresowaniem. W przypadku gdy $V_s = 0.3$ Ma maksymalna wartość H_{max} dla masy $m = 7000$ kg wynosi 600 m. Dla parametrów tych samolot nie osiąga H_{pmax} gdy $|\delta_h| \leq 0.5^\circ$ oraz $|\delta_h| \geq 6.5^\circ$.

Rys.6 ilustruje w jakiej odległości od przeszkody o wysokości H_{max} powinien rozpocząć się manewr omijania ze stałą wartością kąta wychylenia steru wysokości δ_h . Dla średnich wartości masy i prędkości lotu (6000 kg; 0.5 Ma) w badanym zakresie $\delta_h \in < -0.5 \div -6 >^\circ$ droga ta zawiera się w przedziale $X_{0max} \in < 12000 \div 1600 >$ m. Ominięcie przeszkody o wysokości $H_{pmax} = 300$ m wymaga drogi

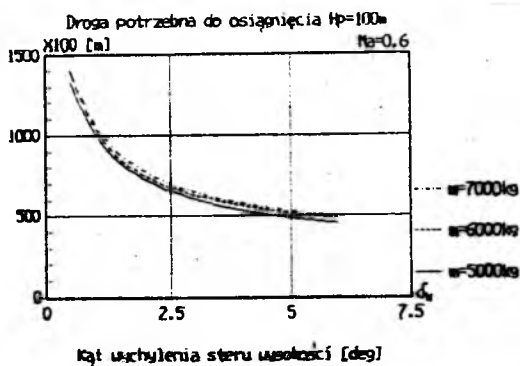
(a)



(b)

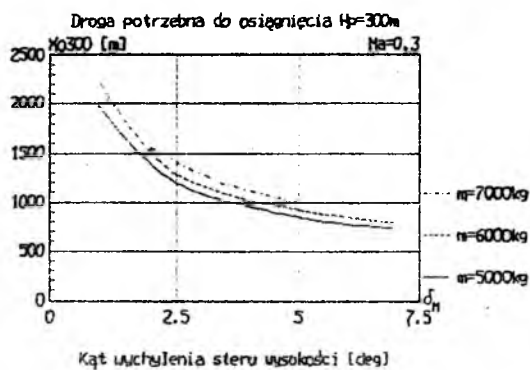


(c)

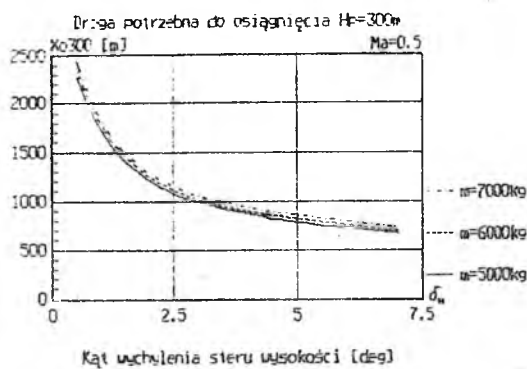


Rys. 3.

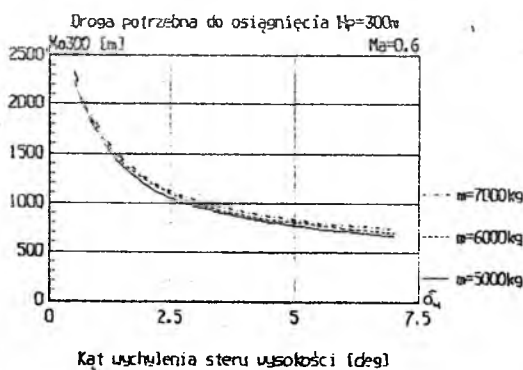
(a)



(b)

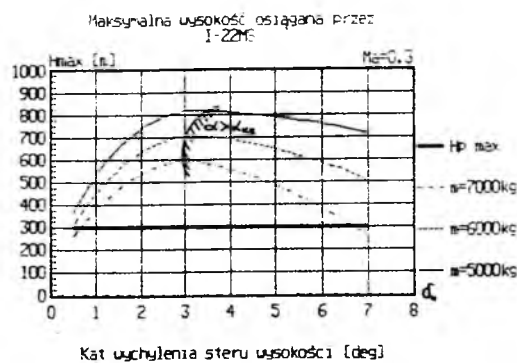


(c)

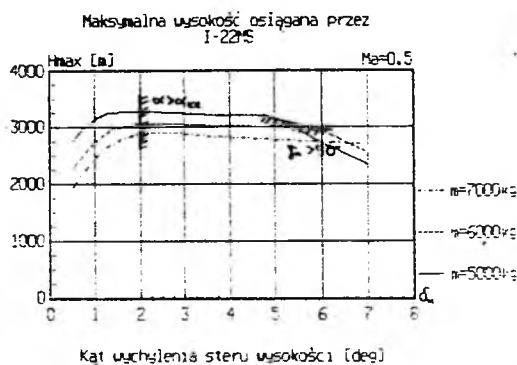


Rys. 4.

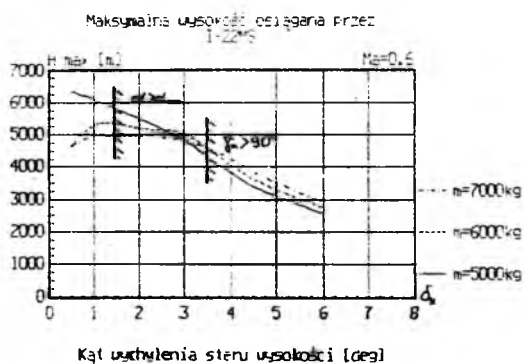
(a)



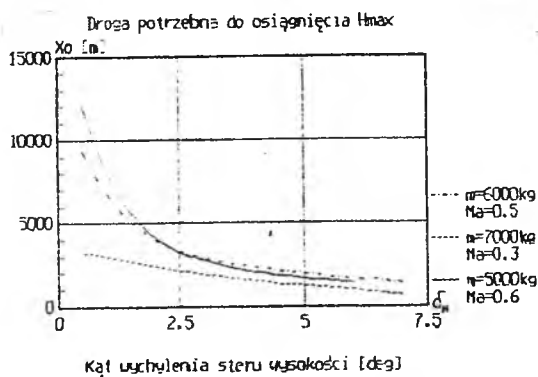
(b)



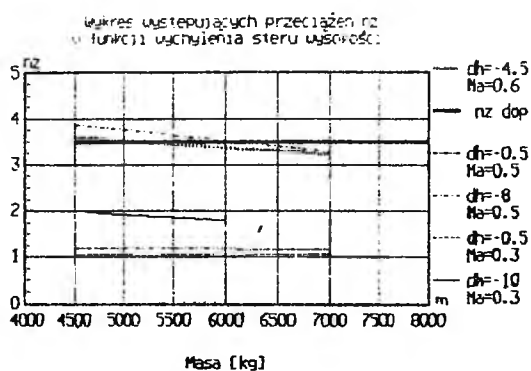
(c)



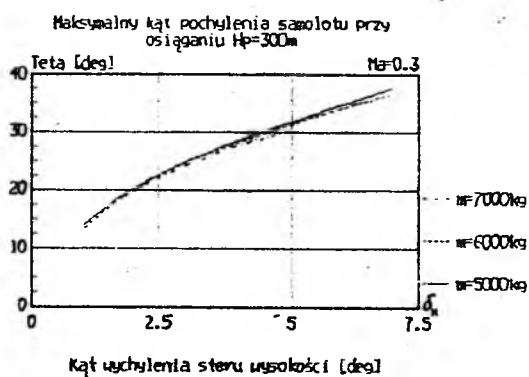
Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.

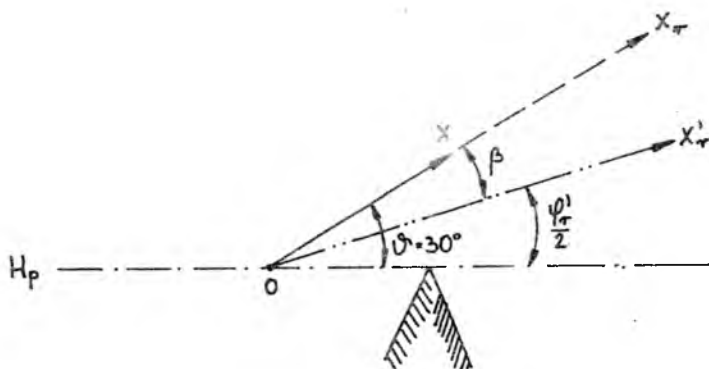


Rys. 8.

dłuższej niż $X_{0300} \in < 700 \div 2500 > \text{ m}$ co przedstawia rys.4. Z analizy wynika, że minimalny zasięg stacji radiolokacyjnej powinien być większy od maksymalnej wartości X_{0max} . Obniżenie wysokości przeszkody do $H_{p\delta r} = 100 \text{ m}$ skraca ten zasięg do przedziału $< 500 \div 1800 > \text{ m}$ (rys.3).

Rys.7 przedstawia występujące przeciążenia n_z . Parametr ten ogranicza wychylenie steru wysokości dla badanego zakresu zmian masy i prędkości lotu do wartości $\delta_h \in < -0.5 \div -4.5 >$, dla którego $n_z < 3.5$.

Osobnym zagadnieniem jest wartość kąta rozwarcia wiązki radiolokatora φ_r . Wiąże się to z odpowiedzią na pytanie: jak długo przeszkoda powinna być "widziana" przez radiolokator? Wydaje się, że ze względów bezpieczeństwa i komfortu psychicznego pilota przeszkoda powinna być śledzona do momentu gdy $H_l \geq H_p + h_z$ (h_z - założona wysokość bezpieczna). We współcześnie stosowanych stacjach radiolokacyjnych do pomiaru odległości $\varphi_r = 30^\circ$ przy czym oś wiązki nie pokrywa się z osią podłużną samolotu OX . Wartość φ_r jest ściśle związana z wielkością kąta pochylenia samolotu w końcowej fazie osiągania zadanej wysokości.



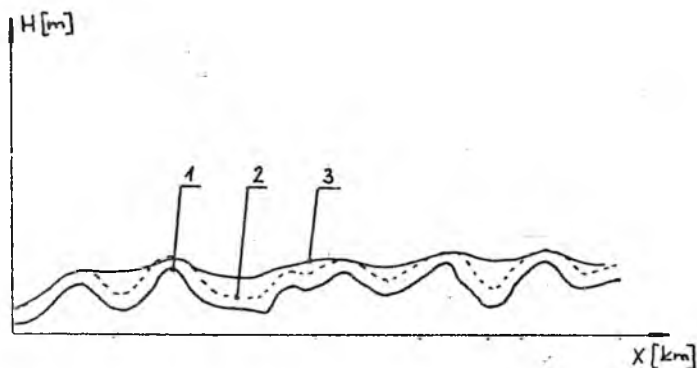
Rys. 9.

Dla badanego zakresu sterowań $\vartheta \cong 30^\circ$. W locie rzeczywistym przy optymalnym sterowaniu w/w wartość nie będzie osiągnięta, jednakże w analizie ruchu należy przyjąć ją jako maksymalną możliwą do uzyskania. Fakt ten sprawia, że przy osi radiolokatora X_r pokrywającej się z osią samolotu połowa kąta rozwarcia wiązki powinna wynosić $\varphi_r/2 = 30^\circ$. Gdyby oś X_r odchylić o kąt β wtedy $\varphi'_r/2 = \vartheta - \beta$. W badaniach próbnym systemów automatycznego sterowania lotami na małych wysokościach prowadzonych w USA kąt φ_r wynosił 90° .

4. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych obliczeń wykazały, że w badanym zakresie mas przydatność samolotu I-22MS do lotów na małych wysokościach z omijaniem przeszkód w płaszczyźnie pionowej podlega następującym ograniczeniom:

- prędkość lotu przy $\bar{n} < 1$ w zakresie $<0.3 \div 0.6> \text{Ma}$;
- wychylenie steru wysokości $\delta_h = <-0.5 \div -4.5>^\circ$;
- maksymalna dopuszczalna wysokość przeszkody $H_{p \max} \cong 500 \text{ m}$;
- zasięg stacji radiolokacyjnej do pomiaru odległości nie mniejszy niż 2500 m;
- kąt rozwarcia wiązki radiolokatora $\varphi_r \geq 60^\circ$ dla przypadku kiedy oś wiązki stacji radiolokacyjnej pokrywa się z osią podłużną samolotu;
- samolot jest "przetłumiony" i należy spodziewać się gładkiego toru lotu.

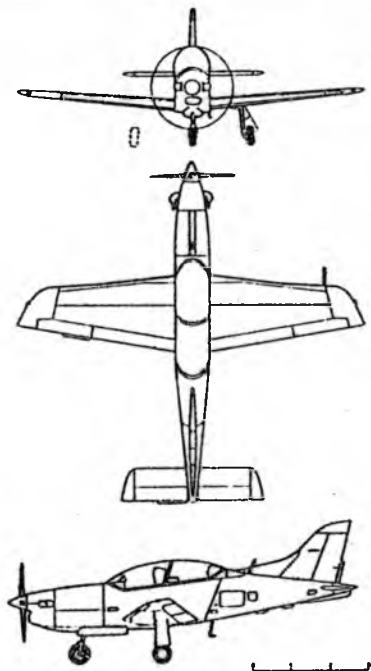


Rys. 10. 1 – rzeźba terenu; 2 – trajektoria samolotu manewrowego; 3 – spodziewany tor lotu samolotu I-22 MS

Powyższe wyniki mogą posłużyć do formułowania założeń wstępnych przy projektowaniu SAS do lotów na małych wysokościach z omijaniem przeszkód.



THE PZL-130 ORLIK TRAINING AIRCRAFT



Technical data

Seating tandem

Length

9.0m

Span

8.0 m

Wing area

13.0 m²

Internal fuel

560 l

Performances

Engine rating

950 HP

750 HP

Maximum level speed

560 km/h

500 km/h

Stalling speed

112 km/h

112 km/h

Initial climb

20.6 m/s

13.3 m/s

Ceiling

10000m

10000 m

Take-off run

172 m

220 m

Landing run

184 m

184 m

Range (without stores)

930 km

1000 km

Masses:

Empty with M.601T

1600 kg

Empty with PT6A 62

1450 kg

Maximum take-off

2700 kg

Maximum underwing stores

800 kg



Producent:
PAŃSTWOWE ZAKŁADY LOTNICZE "WARSZAWA AL"
Rakowicka 110/114
Phone 022/480111
Fax 022/482701, Tel. 817735



Exporteur:
PTZEL
Przedsiębiorstwo Handlu Zagranicznego
Spółka z o.o.
Alajk Stanten Zjednoczonych 81
01 028 Warszawa 50
Telefon: (0 22) 10 80 01
Teleks: 81 4951, 81 2815
Telex: (0 22) 13 23 58

**SYMULACJA NUMERYCZNA LOTU SAMOLOTU
PASAŻERSKIEGO W OPARCIU O ZAPIS PARAMETRÓW DLA
SAMOLOTU IL-62M¹**

MIZANUR RAHMAN

JERZY MARYNIAK

Instytut Lotnictwa, Warszawa

W pracy przedstawiono symulację numeryczną, rzeczywistego, sterowanego lotu samolotu pasażerskiego, korzystając z niektórych parametrów lotu zapisanych przez pokładowy rejestrator lotu. W tym celu, zbudowano model matematyczny sterowanego samolotu na bazie odpowiedniego modelu fizycznego. Przedstawiono również zastosowanie przyjętej metody przy wyznaczaniu własności dynamicznych i tworzeniu trajektorii lotu samolotu. Można dodać, że metoda ta, również pozwala na sprawdzenie wiarygodności zarejestrowanych parametrów przez pokładowy rejestrator.

1. Wstęp

Dokładne wyznaczenie własności dynamicznych samolotu, na podstawie zapisu pokładowego rejestratora, jest ważnym problemem spotykanym przez zespół zajmujący się obiektywną kontrolą lotu. Zadaniem zespołu jest bieżąca i obiektywna kontrola nad prawidłowym działaniem samego samolotu oraz personelu latającego. Jest to bardzo ważne dla bezpieczeństwa lotu oraz kosztów eksploatacyjnych. Natomiast w warunkach eksploatacyjnych, spotykany problem polega na niepełnej lub błędnej rejestracji parametrów. W dodatku, bezpośrednie pomiary niektórych dynamicznych zmiennych, mogą być niepraktyczne lub niewiarygodne do wykonania.

W pracy tej zbudowano zjednoczony model numeryczny klasycznego samolotu pozwalający na wyznaczanie parametrów związanych z ruchem samolotu wykorzystując kilka parametrów rejestrowanych przez rejestrator lotu. Stosowanie takiej praktyki jest możliwe dzięki temu, że siły i momenty działające na samolot, a których rezultatem jest ruch samolotu po trajektorii, są związane z dobrze znanymi nam równaniami ruchu z dynamiki obiektów ruchomych (DOR) [2,4,6,9].

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Rejestracja lotu

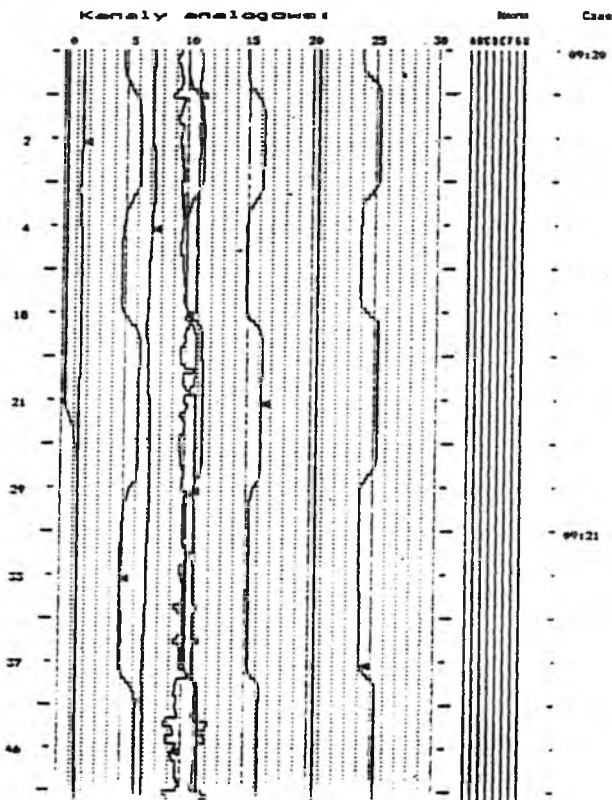
Data: 27.05.96
 Lot: 0003
 Samolot: SP-LBE

Kanały analogowe:

2 - Wysokość barometryczna	.. zero 0. Działka	500.00
4 - Prędkość przysiadania	.. zero 0. Działka	30.00
10 - Kat wychylenia (gruby) lotki	.. zero 11. Działka	0.00
21 - Obroty - silnik I	.. zero 10. Działka	10.00
29 - Obroty - silnik II	.. zero 5. Działka	10.00
35 - Obroty - silnik III	.. zero 0. Działka	10.00
37 - Obroty silnika IV	.. zero 19. Działka	10.00
46 - Kat wychylenia lewej lotki	.. zero 10. Działka	4.00
47 - Kat wychylenia steru kierunku	.. zero 20. Działka	2.00
50 - Położenie lewej klapy	.. zero 0. Działka	10.00

Kanały binarne:

(A) 0-1 - Włączenie SBU kanału nachylenia
 (B) 0-2 - Włączenie SBU kanału przechylenia
 (C) 0-3 - Ustawienie 700 mmHg ułamek silnika
 (D) 0-4 - Sygnał SBO (niebezpieczna prędkość zejścia do ziemi)
 (E) 0-6 - Wypuszczenie osłony - blokowanie sterów na ziemi
 (F) 0-8 - Przebieg nad powierzchnią
 (G) 50-5 - Odejście od ścieżki schodzenia (wielkość łagodności)
 (H) 50-6 - Odejście od kursu (wielkość łagodności)



Rys. 1. Postać wydruku zarejestrowanych parametrów po deszyfracji

Obliczenia przeprowadzono na przykładzie samolotu IL-62M, w którym numerycznie wyznaczono parametry stanu, inne parametry związane z ruchem samolotu oraz trajektorię lotu w oparciu o zapis pokładowego rejestratora MSRP-64. Rejestracja za pomocą tego rejestratora (wykonana z częstością 2 lub 8 Hz) zawiera między innymi: przeciążenia n_x, n_y, n_z , kąty Eulera Θ, Φ, Ψ , wysokość barometryczną H_p , prędkość przyrządową V_p , wielkości sterowania $\delta_H, \delta_V, \delta_L, \alpha_{ZH}$, obroty poszczególnych silników (n_1, n_2, n_3, n_4 w procentach), temperaturę otoczenia t_{ot} itd [8].

Wydruk wartości tych parametrów po deszyfracji otrzymuje się w postaci tabeli lub wykresów (rys.1).

2. Ogólne matematyczne modelowanie samolotu sterowanego

W celu przeprowadzenia symulacji numerycznej lotu samolotu zbudowano model matematyczny, na podstawie modelu fizycznego, uwzględniając czynniki mające jakiś wpływ w badanym systemie, tzn. sterowany ruch samolotu w atmosferze rzeczywistej.

Samolot (rys.2) jest traktowany jako sterowany, nieodkształcalny układ mechaniczny o sześciu stopniach swobody $x_1, y_1, z_1, \Theta, \Phi, \Psi$. Sterowanie odbywa się w czterech kanałach: pochylenie Θ – przez wychylenie steru wysokości δ_H , przechylenie Φ – przez wychylenie lotek δ_L , odchylenie Ψ – przez wychylenie steru kierunku δ_V oraz prędkości V_0 – przez zmianę ciągu silnika T położeniem dźwigni sterowania silnikiem δ_T .

Dynamiczne równania ruchu samolotu opisano w quasi-współrzędnych układu własnego samolotu $Oxyz$, stosując równania Boltzmanna-Hamela dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych [5,9].

Związki kinematyczne między układem związanym z ziemią $0_1x_1y_1z_1$ oraz układem związanym z samolotem $Oxyz$ [9]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}] = f(U, V, W, P, Q, R, \Phi, \Theta, \Psi). \quad (2.1)$$

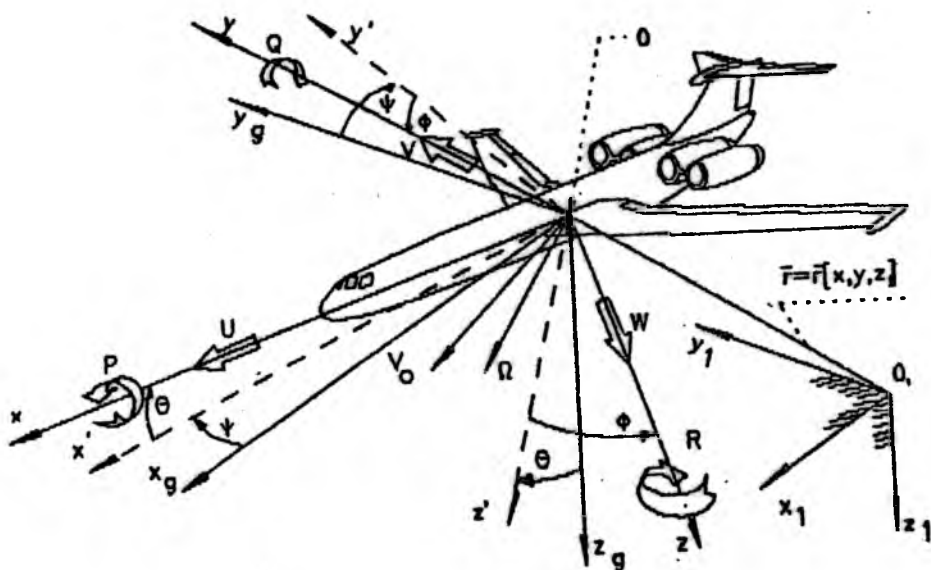
Dla samolotu IL-62M, przyjęto:

$$\begin{aligned} S_y &= S_z = 0, \\ I_{xy} &= I_{yz} = 0, \\ y_c &= z_c = y_a = z_a = 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\mathbf{r}_c = [x_c, y_c, z_c], \quad \mathbf{r}_a = [x_a, y_a, z_a],$$

określają odpowiednio środek masy oraz środek aerodynamicznego samolotu.



Rys. 2. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne katowe, prędkości liniowe i prędkości katowe

Po odpowiednim przekształceniu ostatecznie przyjęto do obliczenia następujące równania ruchu:

$$\dot{U} = k_8 [X - mQW + mRV + S_x(Q^2 + R^2)], \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = k_8 [Y - mRU + mPW - k_1 S_x (N + k_2 PQ + k_7 I_{xz} (L + k_3 QR + \\ + I_{xz} PQ) - I_{xz} RQ - k_8 S_x (Y - mRU + mPW - S_x QP) + \\ + S_x (WP - RU)) S_x QP], \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{W} = k_8 [Z - mPV + mQU + k_5 S_x (M + k_6 RP + I_{xz} (R^2 - P^2) + k_4 k_8 (Z - \\ - mPV + mQU - S_x PR) + S_x (WP - UQ)) - S_x PR], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{P} = k_7 [L + k_3 QR + k_1 I_{xz} (N + k_2 PQ + k_7 I_{xz} (L + k_3 QR + I_{xz} PQ) - \\ - I_{xz} QR - k_8 S_x (Y - mRU + mPW - S_x QP) + S_x (WP - RU)) + \\ + I_{xz} PQ], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\dot{Q} = k_5 [M + k_6 RP + I_{xz} (R^2 - P^2) + k_4 k_8 (Z - mPV + mQU - S_x PR) +$$

$$+ S_x(WP - UQ)] , \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{R} = & k_1 [N + k_2 PQ + k_7 I_{xz}(L + k_3 QR + I_{xz} PQ) - I_{xz} RQ - k_8 S_x(Y - \\ & - mRU + mPW - S_x QP) + S_x(WP - RU)] , \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{I_x - I_{xz}^2/I_x - S_x^2/m} , & k_2 &= I_x - I_y , & k_3 &= I_y - I_z , \\ k_4 &= S_x + M_W , & k_5 &= \frac{1}{I_y - S_x(S_x + M_W)/m} , \\ k_6 &= I_z - I_x , & k_7 &= \frac{1}{I_x} , & k_8 &= \frac{1}{m} . \end{aligned}$$

Siły i momenty działające na samolot podane są następująco:

$$\begin{aligned} X = & -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 (C_{xa} \cos \beta \cos \alpha + C_{ya} \sin \beta \cos \alpha - C_{za} \sin \alpha) + X_Q Q - \\ & - mg \sin \theta + \sum_{i=1}^4 T_{Hi} \cos \Phi_{TY} + X_{\alpha_{ZH}} \alpha_{ZH} + X_{\delta_H} \delta_H + \\ & + X_{\delta_V} \delta_V + X_{\delta_L} \delta_L , \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} Y = & \frac{1}{2}\rho S V_0^2 (-C_{xa} \sin \beta + C_{ya} \cos \beta) + Y_P P + Y_R R + mg \cos \theta \sin \Phi + \\ & + Y_{\delta_V} \delta_V , \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} Z = & -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 (C_{xa} \cos \beta \sin \alpha + C_{ya} \sin \beta \sin \alpha + C_{za} \cos \alpha) + \\ & + Z_Q Q + mg \cos \theta \cos \Phi - \sum_{i=1}^4 T_{Hi} \sin \Phi_{TY} + \\ & + Z_{\alpha_{ZH}} \alpha_{ZH} + Z_{\delta_H} \delta_H , \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}\rho S V_0^2 [-C(C_{la} \cos \beta \cos \alpha + C_{ma} \sin \beta \cos \alpha - C_{na} \sin \alpha)] + \\ & + L_P P + L_R R - \sum_{i=1}^4 T_{Hi} y_{Ti} \sin \Phi_{TY} + \sum_{i=1}^4 I_{Ti} \omega_{Ti} Q \sin \Phi_{TY} + \\ & + L_{\delta_V} \delta_V + L_{\delta_L} \delta_L , \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{2}\rho S V_0^2 [x_a (C_{xa} \cos \beta \sin \alpha + C_{ya} \sin \beta \sin \alpha + C_{za} \cos \alpha) + \\ & + C(-C_{la} \sin \beta + C_{ma} \cos \beta)] + M_Q Q - mg x_c \cos \theta \cos \Phi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^4 T_{Hi} (x_{Ti} \sin \Phi_{TY} + z_{Ti} \cos \Phi_{TY}) - \sum_{i=1}^4 I_{Ti} \omega_{Ti} (R \cos \Phi_{TY} + \\
& + P \sin \Phi_{TY}) + M_{\alpha_{ZH}} \alpha_{ZH} + M_{\delta_H} \delta_H,
\end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{2} \rho S V_0^2 \left[x_a (-C_{za} \sin \beta + C_{ya} \cos \beta) - C (C_{la} \cos \beta \sin \alpha + \right. \\
& + C_{na} \cos \alpha + C_{ma} \sin \beta \sin \alpha) \left. \right] + N_P P + N_R R + \\
& + mg x_c \cos \Theta \sin \Phi - \sum_{i=1}^4 T_{Hi} y_{Ti} \cos \Phi_{TY} + \\
& + \sum_{i=1}^4 I_{Ti} \omega_{Ti} Q \cos \Phi_{TY} + N_{\delta_V} \delta_V + N_{\delta_L} \delta_L.
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Wysokość lotu:

$$H = -z_1. \quad (2.14)$$

Gęstość powietrza dla $H \leq 11000$ m wynosi:

$$\rho_H = \rho_0 \left(1 + \frac{z_1}{44300} \right)^{4.256}. \quad (2.15)$$

Liczba Macha:

$$\text{Ma} = \frac{V_0}{20.055 \sqrt{t_{ot}}}. \quad (2.16)$$

Ciąg silnika:

$$T_{Hi} = T_{H=0}(n_{Ti}) \left(\frac{\rho_H}{\rho_0} \right)^{0.7} (1 - 0.42 \text{Ma} + 0.001 \text{Ma}^2). \quad (2.17)$$

Prędkość kątowna obrotów zespołu turbo-sprężarki:

$$\omega_{Ti} = \frac{2\pi}{60} n_{Ti}. \quad (2.18)$$

3. Realizacja symulacji numerycznej lotu

Równania ruchu samolotu sterowanego $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, t)$ wyprowadzone z modelu matematycznego rozwiązano numerycznie za pomocą procedury Runge-Kutty-Verner'a V-tego i VI-tego rzędu dla podanych warunków początkowych $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ dla $t = t_0$ [1].

Wartości początkowe dla wektora stanu dla tak postawionego zadania wyznaczono na podstawie niektórych parametrów zarejestrowanych przez pokładowy rejestrator po uprzednim uwzględnieniu wszystkich błędów metodycznych, ze względu na zmiany warunków atmosferycznych przyjętych przy skalowaniu przyrządów rejestrujących lub ze względu na położenie nadajników [8,9].

Dla przykładu wartości początkowe, składowych prędkości liniowych wyznaczono na podstawie zarejestrowanej prędkości przyrządowej V_p .

Rzeczywista prędkość samolotu względem wiatru w układzie samolotowym $Oxyz$ wynosi V_0 :

$$V_0 = V_p \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_H}} - \Delta V_{kt} \pm \Delta V_a, \quad (3.1)$$

gdzie:

ΔV_{kt} - poprawka na ściśliwość powietrza,

ΔV_a - poprawka na błędy aerodynamiczne,

$$U = V_0 \cos \alpha \cos \beta, \quad V = V_0 \sin \beta, \quad (3.2)$$

$$W = V_0 \sin \alpha \cos \beta.$$

Kąt natarcia α oraz kąt ślizgu β wyznaczono na podstawie zarejestrowanych współczynników obciążeń n_x^r i n_y^r . W tym celu, trzeba najpierw przeliczyć te wartości dla początku układu $Oxyz$, w którym wprowadzono równania ruchu, a położenia nadajnika przeciążeń w tym układzie określa wektor położenia:

$$\begin{aligned} r_d &= [x_d, y_d, z_d], \\ n_{y0} &= n_y^r - \frac{1}{g} (RU - PW + \dot{R}x_d - \dot{P}z_d), \\ n_{x0} &= n_x^r - \frac{1}{g} (PV - QU + \dot{P}y_d - \dot{Q}x_d). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Przy odpowiednich założeniach i przekształceniach otrzymano [9]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{n_{x0} - n_{x \text{ równ } (\alpha=0)}}{n_{x \text{ równ } (\alpha)}}, \\ \beta &= \frac{n_{y0}}{n_{y \text{ równ } (\beta)}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} n_{x \text{ równ } (\alpha)} &= \frac{1}{mg} \left[-\frac{T}{57.3} - Z_\alpha + \frac{(\delta C_{ma}/\delta \alpha)}{(\delta C_{ma}/\delta \delta_H)} Z_{\delta_H} \right], \\ n_{x \text{ równ } (\alpha=0)} &= \frac{1}{mg} \left[-Z_{\alpha=0} + \frac{C_{ma0}}{(\delta C_{ma}/\delta \delta_H)} Z_{\delta_H} \right], \\ n_{y \text{ równ } (\beta)} &= \frac{1}{mg} \left[\frac{T}{57.3} + Y_\beta - \frac{(\delta C_{na}/\delta \beta)}{(\delta C_{na}/\delta \delta_V)} Y_{\delta_V} \right]. \end{aligned}$$

Początkową rzeczywistą wysokość lotu H_r obliczono na podstawie zarejestrowanej wysokości barometrycznej H_p , po uwzględnieniu wszystkich błędów [9] np:

$$H_r = H_p + (\pm \Delta H_t) + (\pm \Delta H_{bar}) + (\pm \Delta H_a), \quad (3.5)$$

gdzie ΔH_t , ΔH_{bar} i ΔH_a określają odpowiednio poprawkę na zmiany temperatury, zmiany ciśnienia atmosferycznego oraz poprawkę na błędy aerodynamiczne.

Masę oraz położenie środka masy dla początkowej chwili obliczenia wyznaczono w/g następujących wzorów:

$$m = m_0 - m_{sp}, \quad (3.6)$$

$$x_c = -0.249 - 5.216 \cdot 10^{-6} m_{sp}, \quad (3.7)$$

gdzie:

m_0 – całkowita masa samolotu przy starcie,

$m_{sp} = \sum_{i=1}^4 \dot{m}_i t_i$ – ubytek paliwa w kg spalony przez 4 silniki.

W celu przeprowadzenia symulacji sterowanego lotu należało interpolować wartości tych parametrów, z których skorzystano w sposób ciągły na podstawie dyskretnych rejestracji z odpowiednią częstością. Są to głównie parametry sterowania δ_H , δ_L , δ_V , położenia kłapy δ_{KL} , położenia statecznika poziomego α_{zH} , liczba obrotów poszczególnych silników n_1, n_2, n_3, n_4 oraz temperatura otoczenia t_{ot} .

Schemat blokowy sterowanego lotu samolotu przyjęty do symulacji numerycznej przedstawiono na rys.3¹.

Wyniki takiej symulacji rutynowego lotu samolotu IL-62M, przedstawiono na wykresach 4 ÷ 8. Równania ruchu były całkowane dla 100 s lotu przy zmniejszeniu wysokości przed lądowaniem. Na rys.4 przedstawiono trajektorię wybranego fragmentu lotu, natomiast na rysunkach 5 ÷ 8 pokazano kolejno przechylenie Φ , kurs Ψ , pochylenie Θ oraz przeciążenie pionowe n_z jako funkcji czasu.

Dodatkowo dla porównania na ostatnie cztery wykresy nałożono zarejestrowane wartości tych parametrów przez rejestrator pokładowy.

4. Wnioski

W tej pracy przedstawiono symulację numeryczną sterowanego lotu samolotu w oparciu o zapis niektórych parametrów przez pokładowy rejestrator. Metoda ta, może służyć do sprawdzenia stopnia doskonałości modelu matematycznego, prawidłowości działania układu sterowania lub pilota. Również może służyć do wykrycia niesprawności działania nadajnika lub układu rejestrującego. W warunkach

¹rysunki zamieszczono na końcu pracy

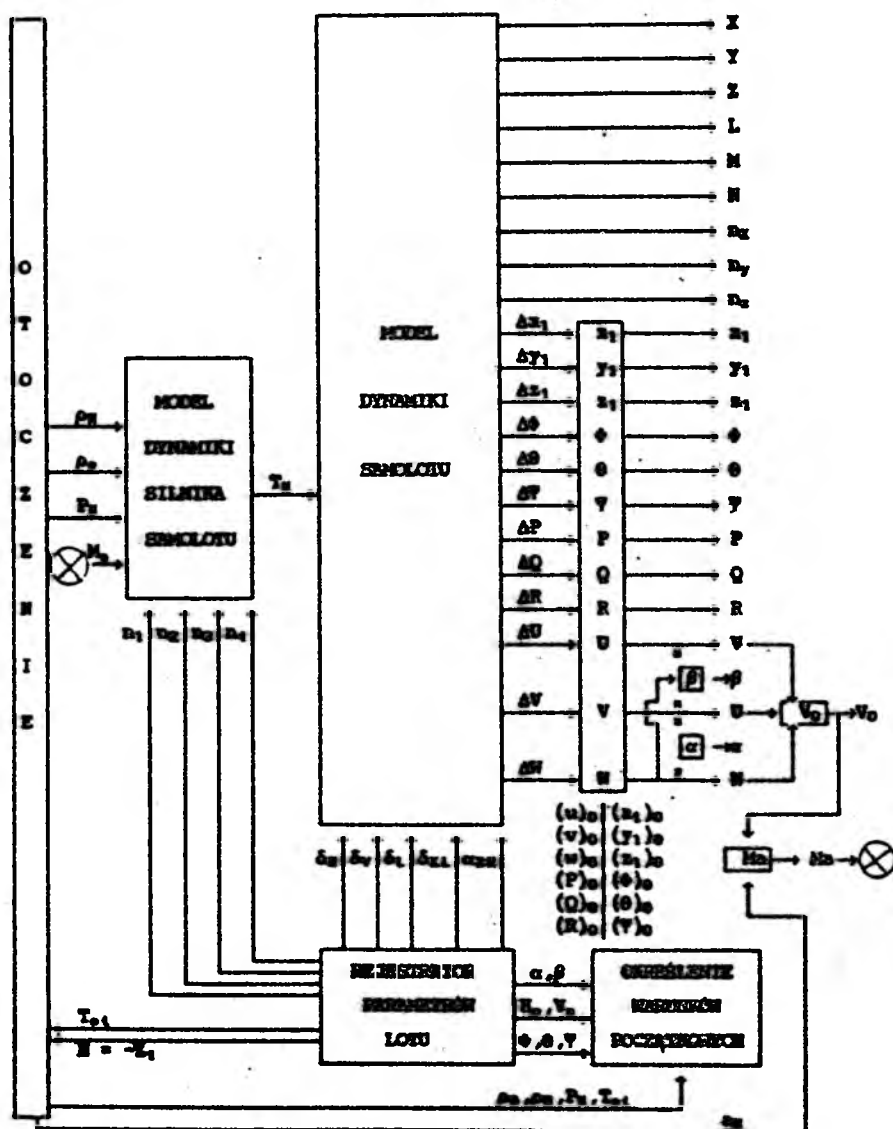
eksploatacyjnych może służyć do szkolenia pilotów, a w razie wypadku może pomóc odtwarzać pełny obraz przebiegu lotu i ewentualne znalezienie przyczyn wypadku [3]. Pozwala również na badania innych zjawisk uwzględniając istotę tego zjawiska.

Ogólny charakter symulacji jest zgodny z rzeczywistością, natomiast niezgodność wartości parametrów (występują w niedużym stopniu) spowodowana jest różnymi czynnikami takimi jak: niedoskonałość samego modelu matematycznego samolotu, niedokładność, czułość i nieciągłość (dyskretny charakter) rejestracji oraz warunki rejestracji jak na ruchomym samolocie.

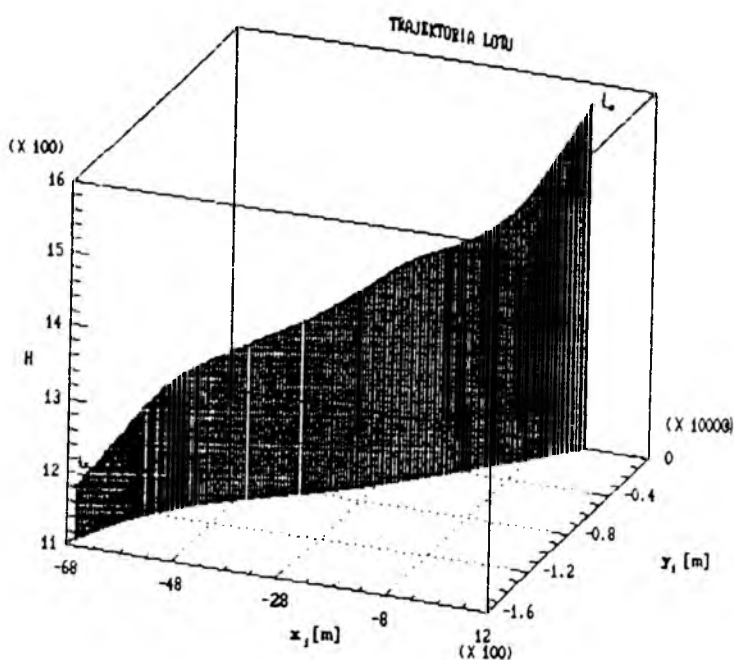
Problem ten wymaga dokładniejszych analiz w przyszłości.

Literatura

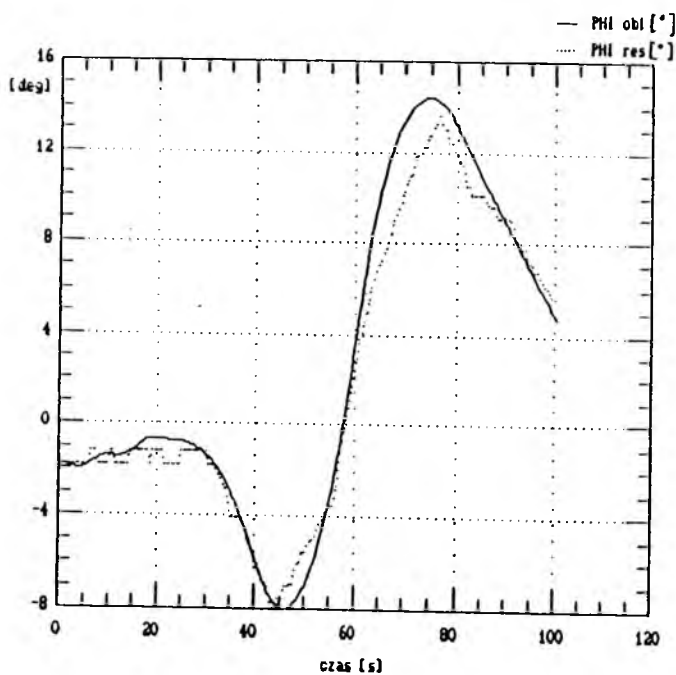
1. ATKINSON L.V., HARLEY P.J., HUDSON T.D., 1989, *Numerical methods with FORTRAN-77*, Addison-Wesley Publishing Company
2. BROCKHAUS R., 1987, *A mathematical multi-point model for aircraft motion in moving air*, Z.Flugwiss weltraumforsch 11
3. DIETENBERGER M.A., HAINES P.A., LURES T.K., 1985, *Reconstruction of PANA-M New Orleans accident*, Journal of Aircraft
4. ETKIN B., *Dynamics of atmospheric flight*, John Wiley New York.
5. GUTOWSKI R., 1981, *Podstawy mechaniki analitycznej*, Wydawnictwa PW, Warszawa
6. MARYNIAK J., DŻYGADŁO Z., 1988, *Numerical modelling of flight dynamics and flight data identification of a jet trainer airplane*, 19 th Annual Symposium Proceedings, Arlington
7. MARYNIAK J., 1987, *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, Symposium Modelowanie w Mechanice PTMTiS, Beskid Śląski
8. 1981, PLL-LOT - *Instrukcja sprawdzania i skalowania nadajników układów MSRP-12-96 i MSRP-64*, Wyd.II
9. RAHMAN M., 1991, *Wyznaczanie własności dynamicznych samolotu pasażerskiego na drodze symulacji numerycznej z zapisu parametrów lotu w warunkach eksploatacyjnych*, Praca doktorska, PW, Warszawa

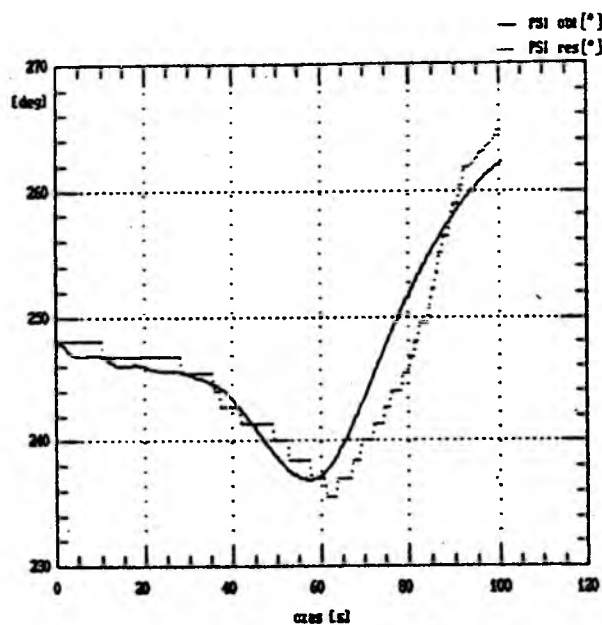
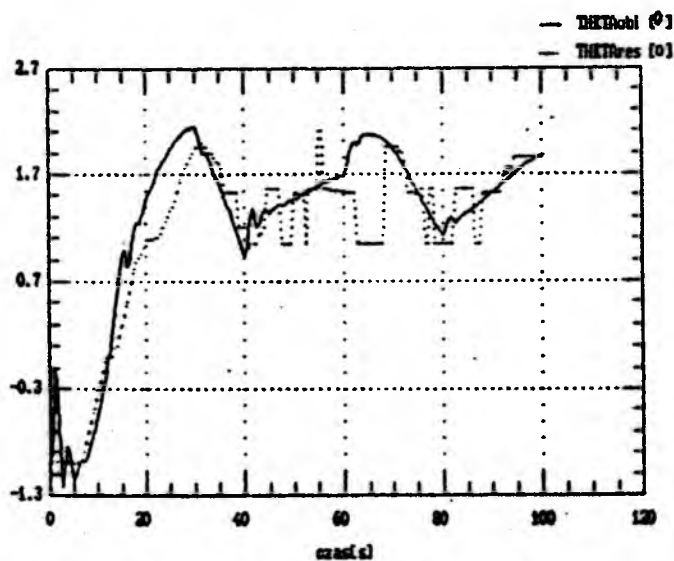


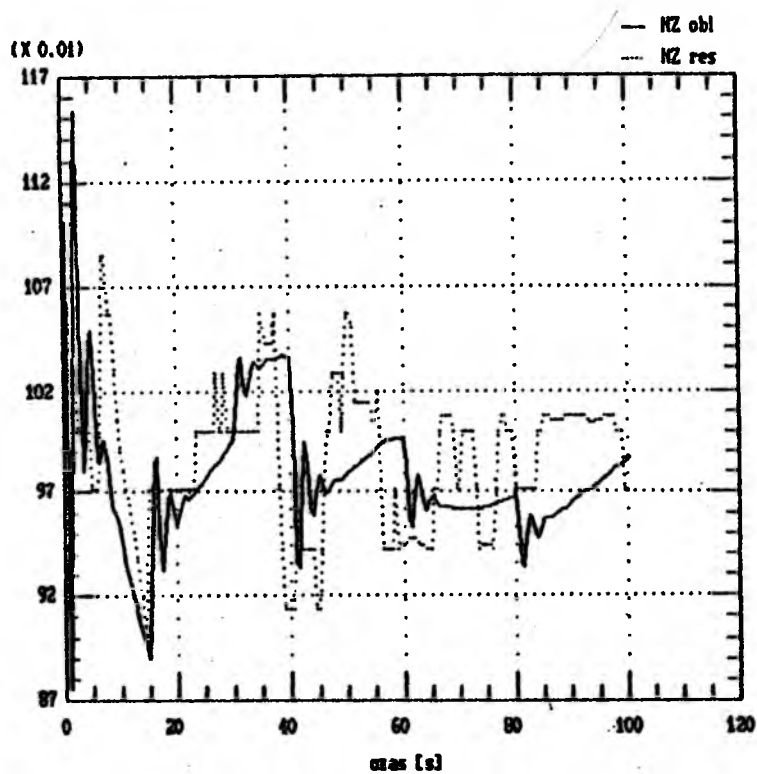
Rys. 3. Schemat blokowy symulacji numerycznej sterowanego lotu samolotu przyjęty do obliczenia



Rys. 4. Trajektoria lotu dla obliczanego fragmentu lotu

Rys. 5. Przebieg przechylenia Φ samolotu dla obliczanego fragmentu lotu w funkcji

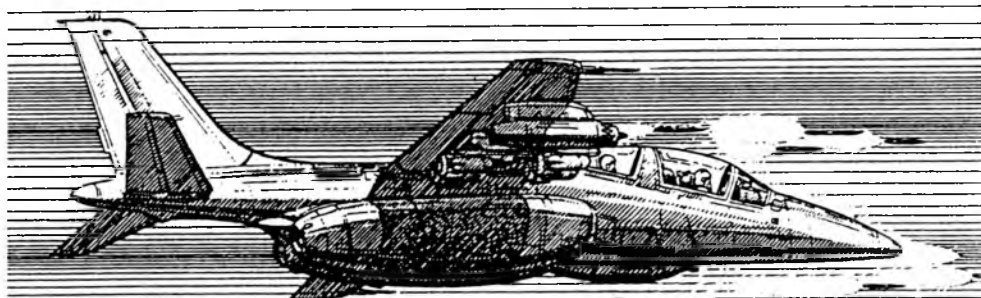
Rys. 6. Przebieg kursu ψ samolotu w funkcji czasuRys. 7. Przebieg pochylenia θ samolotu w funkcji czasu



Rys. 8. Przebieg przeciążenia pionowego n_z samolotu w funkcji czasu

PZL I-22 "IRYDA"

ODRZUTOWY SAMOLOT
SZKOLNO-TRENINGOWY



 INSTITUTE OF AVIATION

WPLYW AWARII SILNIKÓW W DOWOLNEJ KONFIGURACJI NA LOT SAMOŁOTU PASAŻERSKIEGO "KLASY" IL-62M¹

REALY FLOUTI

JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

W pracy rozpatrywano dynamikę lotu wielosilnikowego samolotu w stanach awarii silników, na przykładzie samolotu pasażerskiego "klasy" IL-62M. Przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń symulacji numerycznej, pokazujące wpływ różnej konfiguracji i liczby uszkodzonych silników na charakter i wielkość zmian parametrów ruchu przestrzennego samolotu.

Wykaz oznaczeń

c_a	- średnia cięciwa aerodynamiczna płata,
C_{la}, C_{ma}, C_{na}	- bezwymiarowe współczynniki momentów aerodynamicznych,
C_{xa}, C_{ya}, C_{za}	- bezwymiarowe współczynniki sił aerodynamicznych,
g, h	- przyspieszenie ziemskie i wysokość lotu,
J_x, J_y, J_z	- momenty bezwładności samolotu względem osi układu odniesienia $Oxyz$,
J_{xz}	- moment dewiacyjny samolotu względem osi x - z układu odniesienia $Oxyz$,
L_P, L_R, M_Q, N_P, N_R	- pochodne aerodynamicznych momentów względem składowych prędkości kątowej samolotu,
$L_{\delta l}, L_{\delta v}, M_{\alpha \delta h}, M_{\delta h}, N_{\delta v}$	- pochodne aerodynamicznych momentów względem wychyleń powierzchni sterowych,
m	- masa samolotu,

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

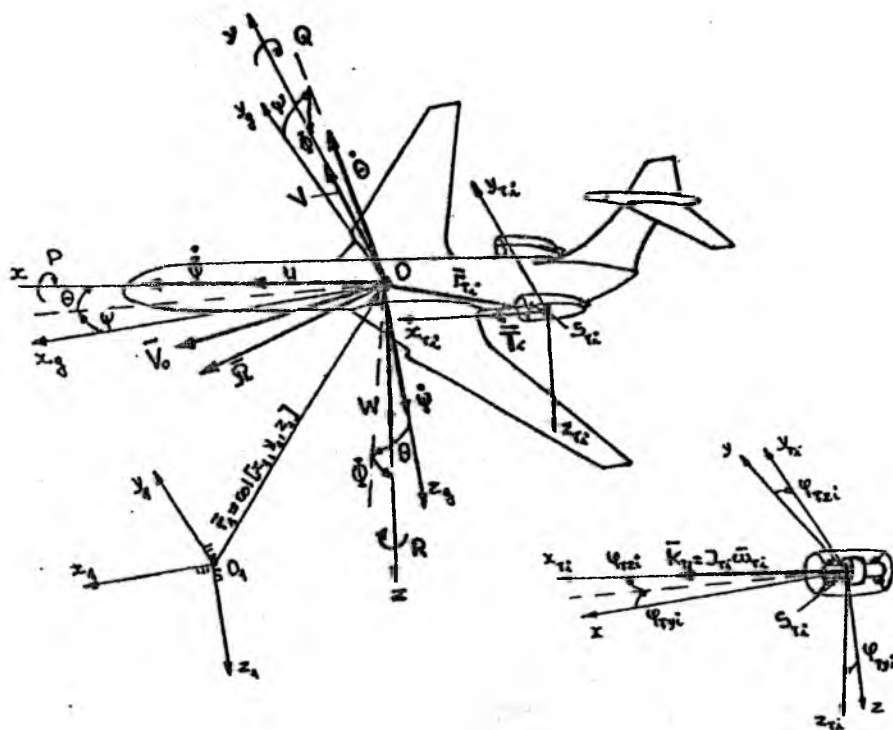
M_ψ	- pochodna aerodynamiczna momentu pochylającego względem zmian prędkości wznoszenia,
S	- powierzchnia odniesienia płata,
S_x	- moment statyczny samolotu względem osi Ox układu odniesienia $Oxyz$,
t	- czas,
V_0	- prędkość lotu samolotu,
x_A, x_C	- współrzędne środka aerodynamicznego samolotu i jego środka masy w układzie osi $Oxyz$;
X_Q, Y_P, Y_R, Z_Q	- pochodne sił aerodynamicznych względem składowych prędkości kątowej samolotu,
$X_{\alpha zh}, X_{\delta h}, Y_{\delta v}, Z_{\alpha zh}, Z_{\delta h}$	- pochodne sił aerodynamicznych względem wychyleń powierzchni sterowych,
α, β	- kąty natarcia i ślizgu,
α_{zh}	- kąt zaklinowania usterzenia poziomego względem średniej cięciwy aerodynamicznej płata,
$\delta_h, \delta_l, \delta_v$	- kąty wychylenia steru wysokości, lotek i steru kierunku,
ρ_0, ρ	- gęstości powietrza na poziomie morza i na danej wysokości lotu,
Ω	- wektor kątowej prędkości samolotu $\Omega = \text{col}[P, Q, R]$.

1. Wstęp

Rozpatrywanie wpływu awarii silników w dowolnej konfiguracji na lot wielosilnikowego samolotu pozwala w ogólnej mierze na uzyskiwanie informacji co do własności lotnych samolotu i możliwości sterowania nim w takich właśnie stanach awaryjnych.

Do realizacji wyznacznego celu pracy, przy opisie dynamiki lotu samolotu wprowadzono podstawowe układy odniesienia [1,4,5], pokazane na rys.1, gdzie:

- $O_1x_1y_1z_1$ - inercjalny układ odniesienia związany z ziemią,
- $O_0x_0y_0z_0$ - grawitacyjny układ odniesienia, równoległy do układu $O_1x_1y_1z_1$, znajdujący się w ustalonym ruchu postępowym,
- $Oxyz$ - układ odniesienia sztywno związany z samolotem.



Rys. 1. Podstawowe układy odniesienia

Położenie układu $0x_1y_1z_1$ określone jest (rys.1):

- wektorem $r_1 = \text{col}[x_1, y_1, z_1]$ wyznaczającym położenie jego początku O względem układu $0_1x_1y_1z_1$,
- kątami samolotowymi (ϕ, θ, ψ) względem układu $0x_gy_gz_g$, gdzie: ϕ - kąt przechylenia, θ - kąt pochylenia, ψ - kąt odchylenia.

Samolot rozpatrywany jako ciało sztywne ma sześć stopni swobody, które wyrażono poprzez:

- trzy quasi-prędkości liniowe (rys.1):
 - U - prędkość podłużną,
 - V - prędkość boczną,
 - W - prędkość wznoszenia,
- trzy quasi-prędkości kątowe (rys.1):
 - P - kątowa prędkość przechylenia,
 - Q - kątowa prędkość pochylenia,

R – kątowa prędkość odchylenia.

Przyjęto także, że samolot ma płaszczyznę symetrii masowej, geometrycznej i aerodynamicznej, którą jest płaszczyzna xz układu $Oxyz$, oraz że współrzędne środka masy samolotu i jego środka aerodynamicznego wzdłuż osi Oz są równe zeru ($z_C = z_A = 0$).

Jako zespół napędowy samolot ma cztery turbinowe silniki odrzutowe zabudowane w ogonie. Awarię krytycznego silnika rozważano jako samoczynne jego zatrzymanie się, co opisano w postaci natychmiastowego spadku jego ciągu do zera [1,2].

W pracy nie uwzględniono zmian oporu aerodynamicznego płatowca z wyłączeniem silnika, natomiast charakterystyki aerodynamiczne samolotu w konfiguracji gładkiej uwzględniają zabudowane gondole silnikowe.

Siły zewnętrzne działające na samolot w czasie lotu to siła ciężkości, siły pochodzące od zespołu napędowego i siły aerodynamiczne. Te ostatnie i ich momenty wyznaczono przy zastosowaniu aerodynamiki quasi-stacjonarnej według metody podanej w [5]. Dla rozpatrywanego zakresu poddźwiękowej prędkości samolotu nie uwzględniono wpływu ściśliwości powietrza na wartości tych sił i ich momentów dla liczby Macha: $Ma < Ma_{kr}$ (Ma_{kr} – krytyczna liczba Macha).

Do opisu sił i momentów od każdego silnika, w tym również i momentów girkopowych od jego mas wirujących, wprowadzono układ silnikowy $ST_i x_{Ti} y_{Ti} z_{Ti}$ o początku w jego środku masy (rys.1). Początek ten, przyjęty jako punkt przyłożenia wektora T_i silnika, określony jest względem układu $Oxyz$ wektorem $r_{Ti} = \text{col}[x_{Ti}, y_{Ti}, z_{Ti}]$, zaś kąty zaklinowania silnika w pionie φ_{Tyi} i w poziomie φ_{Tzi} określają z kolei położenie względne obu układów $Oxyz$ i $ST_i x_{Ti} y_{Ti} z_{Ti}$ (rys.1). Kręt zespołu "sprężarka + wał + turbina" i -tego silnika opisano jako (rys.1) [1,5]:

$$K_{Ti} = J_{Ti} \omega_{Ti}, \quad (1.1)$$

gdzie:

J_{Ti} – moment bezwładności,

ω_{Ti} – wektor kątowej prędkości i -tego silnika.

2. Równania ruchu samolotu

Różniczkowe równania ruchu samolotu w układzie odniesienia $Oxyz$ (rys.1) uzyskano po wyprowadzeniu wyrażenia na energię kinetyczną samolotu, a następnie zastosowaniu równań Boltzmanna-Hamela dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych [3,4]. Równania te przedstawiają się następująco:

$$\frac{dU}{dt} = RV - QW + \frac{S_x}{m} (Q^2 + R^2) + \frac{1}{m} X, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & PW - RU - \frac{1}{mJ_x J_z - mJ_{xz}^2 - J_x S_x^2} \left[S_x J_x (J_x + J_z - J_y) PQ + \right. \\ & \left. + S_x J_{xz} (J_y - J_z) RQ - (J_x J_z - J_{xz}^2) Y + S_x J_{xz} L + S_x J_{xz} N \right], \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & QU - PV + \frac{1}{mJ_y - S_x^2} \left[S_x J_y \frac{J_z - J_x}{J_y} PR + \right. \\ & \left. + S_x J_{xz} (R^2 - P^2) + J_y Z + S_x M \right], \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \frac{1}{mJ_x J_z - mJ_{xz}^2 - J_x S_x^2} \left[mJ_{xz} (J_x + J_z - J_y) PQ + \right. \\ & \left. + m(J_y J_z - J_z^2 - J_x^2) QR - S_x J_{xz} Y + (mJ_z - S_x^2) L + mJ_{xz} N \right], \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = & \frac{1}{mJ_y - S_x^2} \left\{ \left[m(J_z - J_x) - S_x^2 \right] PR + mJ_{xz} (R^2 - P^2) + \right. \\ & \left. + S_x Z + mM \right\}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = & \frac{1}{mJ_x J_z - mJ_{xz}^2 - J_x S_x^2} \left\{ \left[m(J_x^2 - J_x J_y + J_{xz}^2) + J_x S_x^2 \right] PQ + \right. \\ & \left. + mJ_{xz} (J_y - J_z - J_x) QR - S_x J_x Y + mJ_{xz} L + mJ_x N \right\}, \quad (2.6) \end{aligned}$$

gdzie składowe w układzie $Oxyz$ sił zewnętrznych (X, Y, Z) i momentów tych sił (L, M, N) działających na samolot w czasie lotu mają następującą postać:

$$\begin{aligned} X = & -mg \sin \Theta + \sum_{i=1}^n T_i \cos \varphi_{Tyi} \cos \varphi_{Tzi} - \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left(C_{xa} \cos \alpha \cos \beta + \right. \\ & \left. + C_{ya} \cos \alpha \cos \beta - C_{za} \sin \alpha \right) + X_Q Q + X_{\alpha zh} \alpha_{zh} + X_{\delta h} \delta_h, \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = & mg \cos \Theta \sin \Phi + \sum_{i=1}^n T_i \sin \varphi_{Tzi} + \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left(-C_{xa} \sin \beta + \right. \\ & \left. + C_{ya} \cos \beta \right) + Y_P P + Y_R R + Y_{\delta v} \delta_v, \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z = & m \cos \Theta \cos \Phi - \sum_{i=1}^n T_i \sin \varphi_{Tyi} \cos \varphi_{Tzi} - \\ & - \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left(C_{xa} \sin \alpha \cos \beta + C_{ya} \sin \alpha \sin \beta + C_{za} \cos \alpha \right) + \\ & + Z_Q Q + Z_{\alpha zh} \alpha_{zh} + Z_{\delta h} \delta_h, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$L = - \sum_{i=1}^n T_i \left(y_{Ti} \sin \varphi_{Tyi} \cos \varphi_{Tzi} + z_{Ti} \sin \varphi_{Tzi} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n J_{T_i} \omega_{T_i} \left(R \sin \varphi_{T_{zi}} + Q \sin \varphi_{T_{yi}} \cos \varphi_{T_{zi}} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left[-c_a \left(C_{l_a} \cos \alpha \cos \beta + C_{m_a} \cos \alpha \sin \beta - C_{n_a} \sin \alpha \right) \right] + \\
& + L_P P + L_R R + L_{\delta v} \delta_v + L_{\delta l} \delta_l,
\end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
M = & -mgx_c \cos \Theta \cos \Phi + \sum_{i=1}^n T_i \left(z_{T_i} \cos \varphi_{T_{yi}} \cos \varphi_{T_{zi}} + \right. \\
& + \left. x_{T_i} \sin \varphi_{T_{yi}} \cos \varphi_{T_{zi}} \right) - \sum_{i=1}^n J_{T_i} \omega_{T_i} \left(R \cos \varphi_{T_{yi}} \cos \varphi_{T_{zi}} + \right. \\
& + \left. P \sin \varphi_{T_{yi}} \cos \varphi_{T_{zi}} \right) + \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left[x_a \left(C_{x_a} \sin \alpha \cos \beta + \right. \right. \\
& + \left. C_{y_a} \sin \alpha \sin \beta + C_{z_a} \cos \alpha \right) + c_a \left(-C_{l_a} \sin \beta + C_{m_a} \cos \beta \right) \Big] + \\
& + M_Q Q + M_{\alpha z h} \alpha_{zh} + M_{\delta h} \delta_h + M_{\dot{W}} \dot{W},
\end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
N = & mgx_c \cos \Theta \sin \Phi + \sum_{i=1}^n T_i \left(x_{T_i} \sin \varphi_{T_{zi}} - y_{T_i} \cos \varphi_{T_{yi}} \cos \varphi_{T_{zi}} \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n J_{T_i} \omega_{T_i} \left(Q \cos \varphi_{T_{yi}} \cos \varphi_{T_{zi}} - P \sin \varphi_{T_{zi}} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left[x_a \left(-C_{x_a} \sin \beta + C_{y_a} \cos \beta \right) + \right. \\
& - \left. c_a \left(C_{l_a} \sin \alpha \cos \beta + C_{m_a} \sin \alpha \sin \beta + C_{n_a} \cos \alpha \right) \right] + \\
& + N_P P + N_R R + N_{\delta v} \delta_v,
\end{aligned} \quad (2.12)$$

przy czym: n – liczba silników.

Pełne równania ruchu samolotu uzyskano uzupełniając równania (2.1) ÷ (2.6) o związki kinematyczne, które przedstawiają się następująco [1,4,5]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \Theta, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (2.14)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \frac{1}{\cos \Theta}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} = & U \cos \Theta \cos \Psi + V (\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\
& + W (\sin \Phi \sin \Psi + \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi),
\end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} = & U \cos \Theta \sin \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\ & + W(\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -U \sin \Theta + V \sin \Phi \cos \Theta + W \cos \Phi \cos \Theta. \quad (2.18)$$

Dodatkowo, w zależności od warunków atmosferycznych zachodzą następujące związki:

- dla pogody bezwietrznej

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{W}{U}, \quad (2.19)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{V}{V_0}, \quad (2.20)$$

$$V_0^2 = U^2 + V^2 + W^2, \quad (2.21)$$

- dla wysokości lotu h od 0 do 11000 [m]

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{44300}\right)^{4.256}, \quad (2.22)$$

gdzie:

$$h = -z_1. \quad (2.23)$$

Numeryczną symulację wpływu awarii silników na lot samolotu zrealizowano poprzez numeryczne całkowanie pełnych równań ruchu samolotu, uzupełnionych o zależności (2.19) ÷ (2.23), uwzględniając przyjęty model awarii silników dla rozpatrywanej konfiguracji i liczby uszkodzonych silników. Numerycznego całkowania dokonano w oparciu o metodę Rungego-Kutty-Vernera V-ego i VI-ego rzędu.

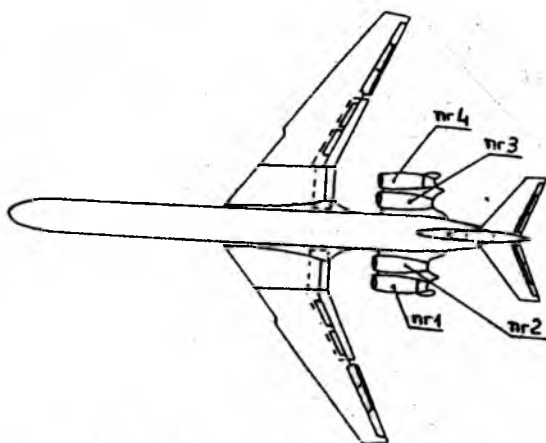
3. Wyniki obliczeń symulacji numerycznej

Symulację wpływu awarii silników na lot samolotu przeprowadzono w czasie lotu prostoliniowego na stałej wysokości i ze stałą prędkością dla następujących parametrów:

- prędkość lotu $V_0 = 235$ [m/s],
- wysokość lotu $h = 8000$ [m],
- kąt natarcia $\alpha = 4^\circ$.

Przyjęto, że awaria silników dla rozpatrywanej konfiguracji i liczby uszkodzonych silników nastąpiła w jednym momencie.

W pracy, wpływ awarii silników na lot samolotu rozpatrywano bez reakcji na system sterowania samolotem.



Rys. 2. Przyjęta numeracja silników

Sylwetkę samolotu "klasy" IL-62M z przyjętą numeracją silników pokazano na rys.2. Dane masowe, geometryczne i aerodynamiczne samolotu wzięto z [1,2].

Wyniki przykładowych obliczeń dla wybranych parametrów ruchu samolotu przedstawiono w postaci wykresów (rys.3 ÷ 7)¹, gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

- 1 - awaria lewego zewnętrznego silnika nr 1,
- 2 - awaria lewego wewnętrznego silnika nr 2,
- 3 - awaria obu lewych silników nr 1 i nr 2,
- 4 - awaria obu wewnętrznych (zewnętrznych) silników nr 2 i nr 3 (nr 1 i nr 4),
- 5 - awaria dwóch silników (lewego zewnętrznego nr 1 i prawego wewnętrznego nr 3),
- 6 - awaria trzech silników sąsiadujących ze sobą nr 1, nr 2, nr 3,
- 7 - awaria trzech silników (obu lewych nr 1 i nr 2 i prawego zewnętrznego nr 4).

Ograniczenie przeprowadzonych obliczeń tylko do wymienionych wyżej przypadków wynika z symetrycznego rozmieszczenia silników na kadłubie samolotu.

Z wyników obliczeń wynika, że stan przejściowy ruchu samolotu po utracie ciągu od zespołu napędowego charakteryzuje się ślizgiem w stronę silników wytwarzających znaczniejszy ciąg (rys.3), przechyleniem i odchyleniem w stronę przeciwną do tych silników (rys.4 i 5). Z kolei następują spadek prędkości lotu (rys.6) i pochylenie samolotu (rys.7), co oznacza zakłócenie także ruchów syme-

¹Rysunki zamieszczono na końcu artykułu

trycznych samolotu.

Z wyników symulacji wpływu awarii silników na lot samolotu dla różnej konfiguracji i liczby uszkodzonych silników (rys.3 ÷ 7), odnotowano, że: ~

- awaria dwóch silników z jednej strony płaszczyzny symetrii samolotu (nr 1, nr 2) spowodowała największe zaburzenie ruchów bocznych samolotu ze względu na dużą wartość powstałego momentu odchylenia od asymetrycznego działania ciągu zespołu napędowego,
- awaria dwóch wewnętrznych (zewnątrznych) silników nr 2 i nr 3 (nr 1 i nr 4) nie naruszyła w najmniejszym stopniu równowagi bocznej samolotu (nie ma zakłócającego momentu odchylenia),
- awaria trzech silników (przypadek największej utraty ciągu od zespołu napędowego) spowodowała zakłócenie ruchów symetrycznych samolotu w największym stopniu, szczególnie dla przypadku awarii trzech sąsiadujących ze sobą silników (nr 1, nr 2 i nr 3), gdyż powstały dodatkowo zakłócający moment odchylenia jest w tym przypadku większy niż przy awarii trzech silników (nr 1, nr 2 i nr 4).

4. Uwagi i wnioski

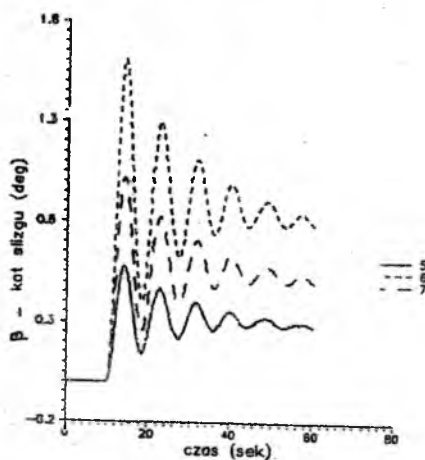
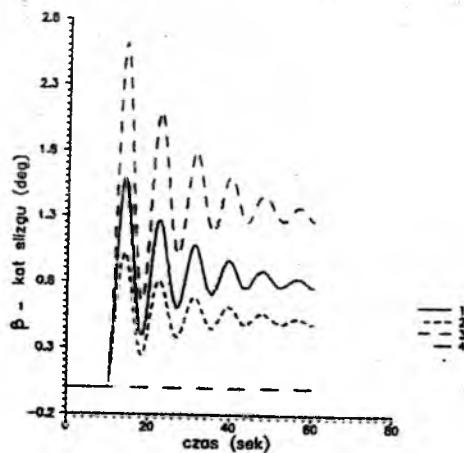
Rozpatrywanie awarii silników w czasie lotu prostoliniowego samolotu na stałej wysokości i ze stałą prędkością pozwoliło na jednoznaczne określenie wpływu tego zjawiska na lot samolotu. Uzyskane wyniki obliczeń mogą stanowić jakościowe informacje o przebiegu lotu samolotu po awarii silników w dowolnej konfiguracji.

Opracowane metody badań, w tym programy obliczeń, są uniwersalne i mogą służyć do numerycznej symulacji awarii dla dowolnego samolotu jedno i wielosilnikowego z turbinowymi silnikami odrzutowymi bez względu na miejsce zamontowania silników na samolocie, po uprzedniej identyfikacji parametrycznej.

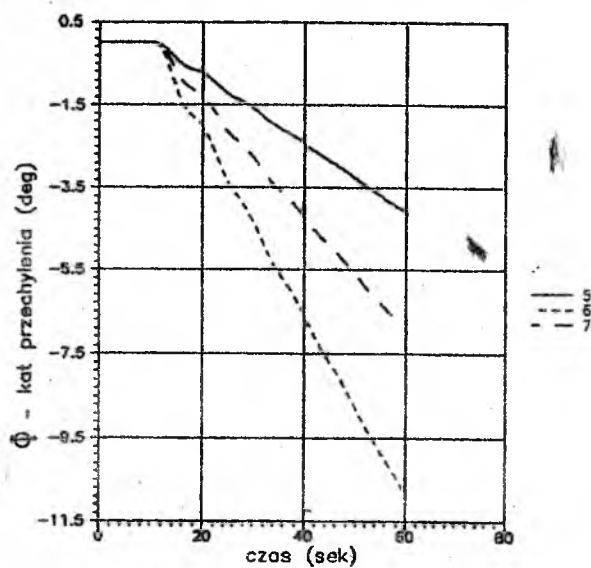
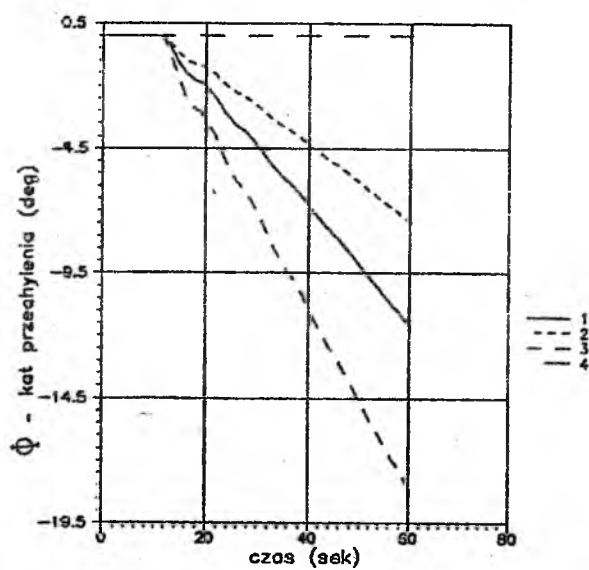
Literatura

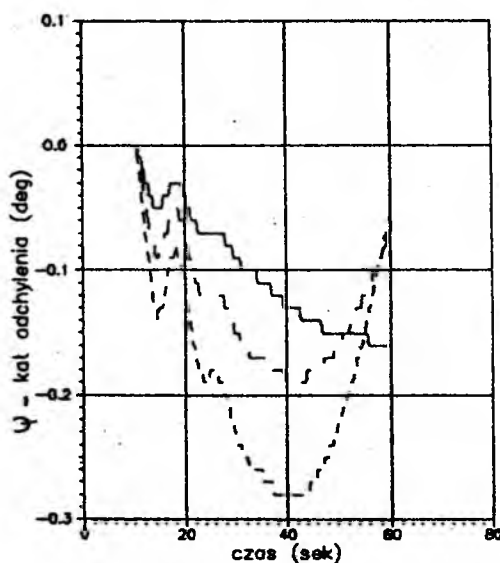
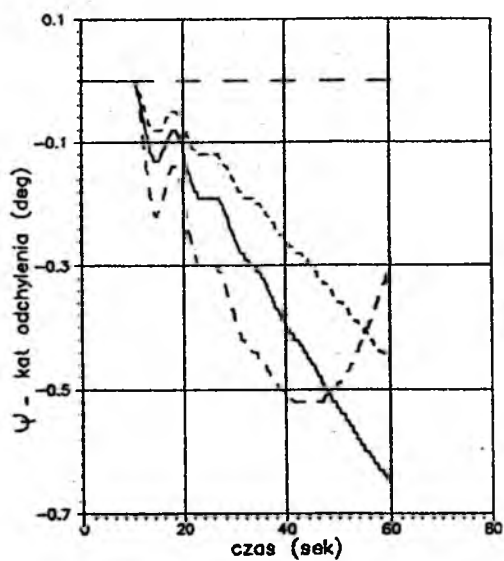
1. FLOUTI R., 1991, *Wpływ awarii silników i odkształceń kadłuba na dynamikę lotu samolotu pasażerskiego*, Rozprawa doktorska, PW, Warszawa
2. FLOUTI R., MARYNIAK J., 1992, *Modelowanie matematyczne lotu samolotu pasażerskiego w stanach awarii silników*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 1154, Mechanika z.107, Gliwice
3. GUTOWSKI R., 1971, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa

4. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe, Mechanika nr 32, WPW, Warszawa
5. MARYNIAK J., *Ogólny model symulacji samolotu*, Sprawozdanie nr 140/85, Zespół N-B DOR ITLiMS, PW

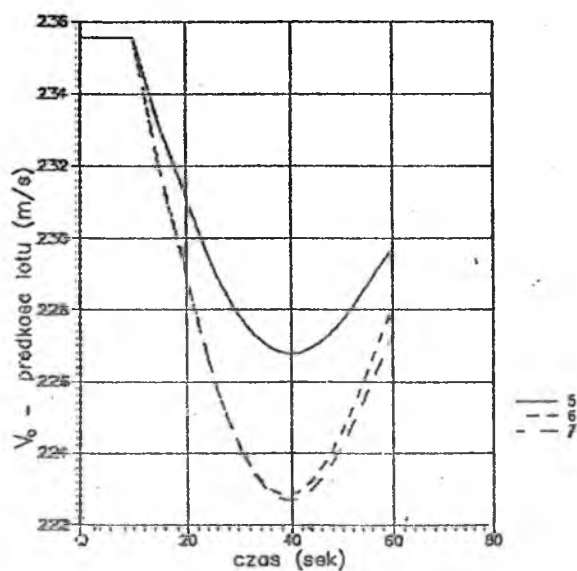
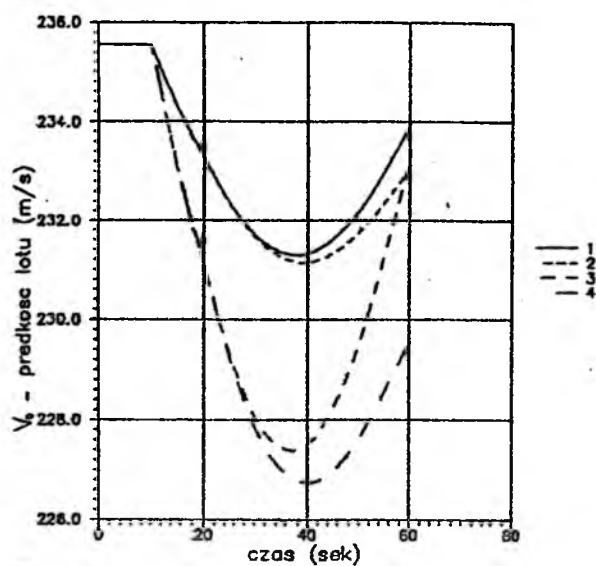


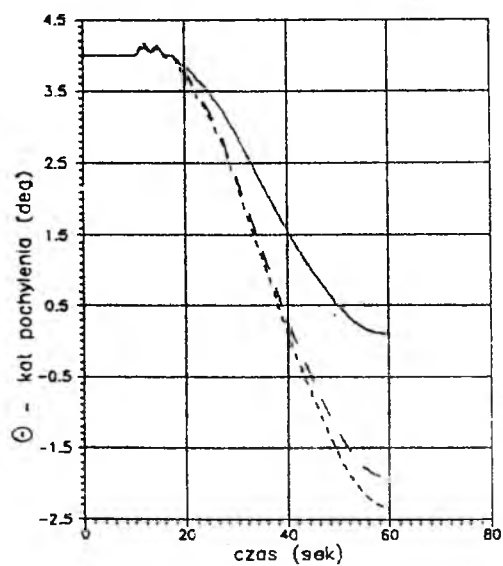
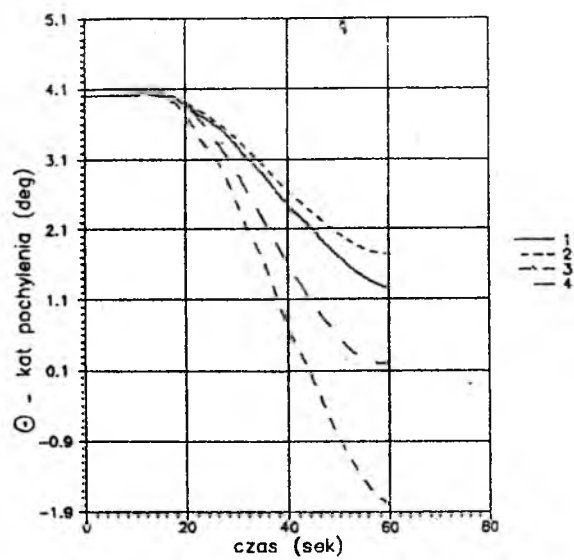
Rys. 3. Zmiana kąta szlazu β po awarii silników

Rys. 4. Zmiana kąta przechylenia Φ po awarii silników



Rys. 5. Zmiana kąta odchylenia ψ po awarii silników

Rys. 6. Zmiana prędkości lotu V_0 po awarii silników

Rys. 7. Zmiana kąta pochylenia θ po awarii silników

BADANIE DRGAŃ SKRĘTNYCH LOTNICZEGO SILNIKA TŁOKOWEGO ZE ŚMIGŁEM¹

MARIAN JEŻ

ANDRZEJ ŚWIDER

Instytut Lotnictwa, Warszawa

1. Wstęp

W niniejszej pracy porównano dwa algorytmy obliczeń własnych drgań skrętnych:

1. macierzowy - dotyczący dyskretnego modelu jednogałęziowego,
2. oparty na analizie podatności dynamicznej modelu z uwzględnieniem doświadczalnie wyznaczonych częstości własnych łopat.

Obliczeniowo zamodelowany układ korbowy silnika w klasycznym ujęciu macierzowym "przedłuża" się o tarczę śmigła pomijając sztywności jego łopat. Podejście podatnościowe natomiast umożliwia uwzględnienie częstości własnych zginania łopat, łatwych do określenia metodą przemiatania częstości wzbudzenia na stanowisku badawczym.

Drgania skrętne wałów korbowych, w odróżnieniu od jego drgań poprzecznych i podłużnych - ograniczonych łożyskami, stanowią istotne niebezpieczeństwo dla szybkobieżnych silników wielocylindrowych. Ponieważ działają poliharmoniczne wymuszenia składowymi stycznymi sił masowych i gazowych jest nieodzowne co najmniej sprawdzenie braku rezonansów w zakresie obrotów roboczych. W tym celu wyznacza się częstości i postacie drgań własnych, a następnie obroty rezonansowe poszczególnych postaci drgań z głównymi harmonikami wymuszenia.

2. Model układu napędowego ze sztywnymi łopatom śmigła

Opracowano model fizyczny odpowiedni dla większości tłokowo-śmigłowych zespołów napędowych. Opisujący go algorytm matematyczny zbudowano klasyczną

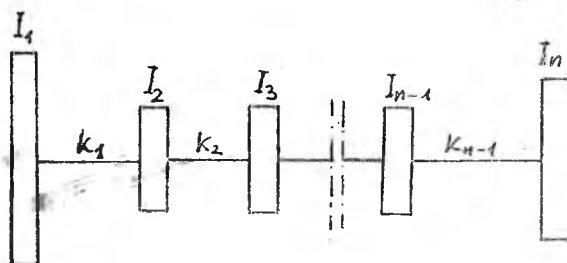
¹ Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

metodą Lagrange'a II rodzaju. Identyfikację parametryczną i obliczenia tego modelu przeprowadzono na przykładzie 6-cylindrowego boksera typu ZST-350 ze śmigłem trójkątowym typu US-142F.

2.1. Założenia i model fizyczny

Aby rzeczywisty wirnik zespołu napędowego złożonego z silnika tłokowego i śmigła zredukować do jednogłęziowego modelu dyskretnego przyjmujemy poniższe założenia.

- Odkształcenia skrotne wału (z założenia małe) odbywają się w zakresie sprężystym.
- Zależność odkształceń od obciążeń jest liniowa – superpozycja skutków działania różnych harmonik jest więc uzasadniona.
- Zastępcze (modelowe) bezwładności układu, tj. tarcze o równoważnych osiowych masowych momentach bezwładności poszczególnych odcinków wału umiejscawia się w przekrojach zawierających środki mas tych odcinków.
- Zastępcze (modelowe) podatności (długości zredukowane wału o stałej średnicy) dotyczą odcinków wału między tymi przekrojami.
- Pomija się tłumienie wirnika, zarówno wewnętrzne (w materiale i w połączeniach), jak i zewnętrzne (w łożyskach, tulejach cylindrowych, ośrodku otaczającym etc.).



Rys. 1. Model fizyczny jednogłęziowego układu skrętnego

Powyższe założenia sprowadzają wirnik zespołu napędowego do układu n sztywnych tarcz o osiowych masowych momentach bezwładności: $I_1, I_2, \dots, I_n$ połączonych przy pomocy $n - 1$ nieważkich wałków o sztywnościach skrętnych (odwrotności podatności skrętnych) odpowiednio: $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ – rys.1.

Taki wyidealizowany układ jest zbudowany z pojęć fizycznych i dlatego nazywa się modelem fizycznym. Aby umożliwić analityczne lub numeryczne badanie tego modelu stosuje się wobec niego odpowiednie metody fizyki otrzymując układ opisujących go równań tj. model matematyczny.

2.2. Model matematyczny

Stosując do sformułowanego powyżej modelu fizycznego klasyczną metodę Lagrange'a II rodzaju otrzymuje się następujący układ równań ruchu [1]:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + k_3(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ \dots & \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} - k_{n-2}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + k_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0, \\ I_n \ddot{\varphi}_n - k_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ to chwilowe kąty obrotu (wychylenie z położenia równowagi poszczególnych tarcz).

Aby rozwiązać równania ruchu (2.1) zakładamy, że przemieszczenia skrętne tarcz są harmoniczne:

$$\varphi_1 = a_1 \cos \omega t, \quad (2.2)$$

gdzie:

- a_1 - amplituda przemieszczenia i -tej tarczy,
- ω - prędkość kątowna przemieszczenia skrętnego.

Podstawiając (2.2) do (2.1) otrzymuje się jednorodny układ równań algebraicznych względem amplitud $a_1, a_2, \dots, a_n$. Zgodnie z teorią takich równań warunkiem jego rozwiązalności jest zerowanie się następującego wyznacznika:

$$\det(\mathbf{I}^{-1} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{I}) = 0, \quad (2.3)$$

gdzie:

$\mathbf{I}$ - diagonalna macierz bezwładności:

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & I_n \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

K – trójdzielna macierz sztywności:

$$K = \begin{vmatrix} k_1 & k_1 & \vdots & 0 & 0 \\ k_1 & k_1 + k_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & k_{n-2} + k_{n-1} & k_{n-1} \\ 0 & 0 & \vdots & k_{n-1} & k_{n-1} \end{vmatrix}, \quad (2.5)$$

I – macierz jednostkowa:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

podstawiając (2.4), (2.5) i (2.6) do (2.3) otrzymuje się równanie dwukwadratowe względem częstości. Jego pierwiastki: ω_w ($w = 1, 2, \dots, n$) to częstości własne.

Dla każdej spośród $i = 1, \dots, n$ częstości własnych charakterystyczna jest "postać" drgań własnych tj. zestaw względnych amplitud drgań poszczególnych tarcz bezwładnych.

Przyjmuje się w tym modelu, że amplituda wybranej tarczy (zwykle oznaczonej na schemacie modelu fizycznego numerem 1-szym) jest:

$$a_1 = 1. \quad (2.7)$$

Amplitudy względne każdej z następnych, i -tej tarczy, oblicza się wg następującego wzoru:

$$a_i = a_{i-1} - \Delta a_{i-1}, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$\Delta a_{i-1} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} I_j a_j \omega_w^2}{k_{i-1}}. \quad (2.9)$$

Obliczone uprzednio częstości własne ω_w ($w = 1, 2, \dots, n$) wykorzystuje się również do wyznaczenia obrotów rezonansowych.

Wymuszenia skrętne charakteryzują się z reguły częstością rosnącą wraz z prędkością obrotową wału. Ich składowe harmoniczne (harmoniki) mają częstość równą wielokrotności częstości kołowej wału i są oznaczone rzędem harmoniki.

Obroty rezonansowe to prędkości obrotowe wału przy których występuje zgodność częstości kolejnych postaci drgań własnych z częstością jakiegokolwiek harmoniki wymuszenia:

$$n_{\text{rez}} = \frac{60f_w}{h_k}, \quad (2.10)$$

gdzie:

f_w ($w = 1, 2, \dots, n$) – częstość własna [Hz]:

$$f_w = \frac{\omega_w}{2}, \quad (2.11)$$

h_k ($k = 1, 2, \dots, m$) – rząd harmoniki wymuszenia.

Wzory (2.1) ÷ (2.11) stanowią model matematyczny własnych drgań skrętnych układu jednogłęziowego.

2.3. Identyfikacja parametryczna modelu

Określony w poprzednim podrozdziale model matematyczny jest ważny dla dowolnego jednogłęziowego układu drgającego skrętnie. W celu wykorzystania go do analizy drgań szczególnego układu, w danym przypadku wirnika zespołu napędowego zawierającego silnik typu "bokser" ZST-350 wraz ze śmigłem US-142F należy przeprowadzić jego identyfikację [6]. Polega ona na "uzgodnieniu" modelu matematycznego z obiektem fizycznym i dokonuje się zwykle na drodze pomiarowo-doświadczalnej. W ogólnym przypadku zawiera ona 2 etapy:

- identyfikacja strukturalna – dobór lub upewnienie się co do adekwatności formy opisu matematycznego,
- identyfikacja parametryczna – wyznaczenie liczbowych wartości paramentów.

W danym przypadku uznajemy założoną strukturę modelu matematycznego za zweryfikowaną doświadczeniem i dokonujemy obliczeń parametrów (bezwładności i podatności) poszczególnych fragmentów układu drgającego skrętnie.

2.3.1. Bezwładności elementów modelu

Obliczenia bezwładności opierają się na znajomości geometrii układu (rozkład mas, przełożenia oraz masy właściwe poszczególnych elementów ρ [kg/m³]). Miarą bezwładności elementów dla analizy skrętnej układu są masowe momenty bezwładności.

Główną bezwładnością skrętną identyfikowanego układu napędowego jest śmigło – pełni ono zresztą dodatkową funkcję koła zamachowego dla napędzającego silnika tłokowego. Do współpracy z projektowanym silnikiem typu "bokser" ZST-350

przewiduje się śmigło trójlopatkowe typu US-142F (pracujące obecnie na samolocie PZL M-26 "Iskierka").

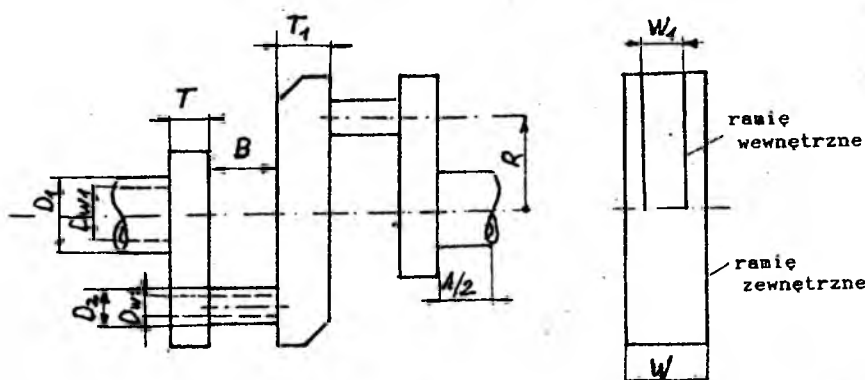
Jego moment bezwładności jest znany i wynosi $I_{sm} = 2.2 \text{ [kg m}^2\text{]}$.

W modelu fizycznym, wraz ze śmigłem jest skojarzona bezwładnościowo napędowa końcówka wału korbowego. Jej moment bezwładności wynosi:

$$(2.12) I_n = \rho \frac{\pi}{32} (D_{nl}^4 - D_{nwl}^4) l_n = 2.03 \cdot 10^{-3} \text{ [kg m}^2\text{]}. \quad (2.12)$$

Całkowity moment pierwszej tarczy modelu wynosi:

$$I_l = I_{sm} + I_n = 2.202 \text{ [kg m}^2\text{]}. \quad (2.13)$$



Rys. 2. Schemat podwójnego wykorbienia

Dalszymi, umownymi tarczami (rys.1) skrotnego układu danego wirnika są podwójne wykorbienia (rys.2). Moment bezwładności każdego z nich składa się z momentu bezwładności I_k dwóch korbowodów i tłoków kompletnych oraz z momentu bezwładności samego wykorbienia jako odcinka wału korbowego. Ten pierwszy składnik wyraża się wzorem:

$$I_k = 2R^2 (M_s + 0.5M_p) + 2R_{pc}^2 M_{pc} = 19.7 \cdot 10^{-3} \text{ [kg m}^2\text{]}, \quad (2.14)$$

gdzie:

- R - promień wykorbienia,
- M_s - masa stopy korbowodu,
- M_p - masa elementów poruszających się w cylindrze ruchem posuwisto-zwrotnym (tłok kompletny i głowa korbowodu),
- R_{pc} - ramię środka masy przeciwwagi,
- M_{pc} - masa przeciwwagi.

Powyższy wzór ma charakter uproszczony, gdyż pomija nieznaczny liczbowo moment własny stopy korbowodu oraz wpływ ruchomych przeciwcieżarów dynamicznie tłumiących drgania skrętne.

Moment bezwładności samego wyrobienia składa się z momentów ramion I_r oraz czopów I_c .

Łączny moment bezwładności ramion można w przybliżeniu ująć wzorem:

$$I_r = 2\rho k_1 h b^3 [g] = 7.41 \cdot 10^{-3} [kg m^2], \quad (2.15)$$

gdzie:

- k_1 - współczynnik przekroju prostokątnego o stosunku boków $h/b = 2$,
- h - długość wykorbienia środkowego,
- b - szerokość wykorbienia,
- g - grubość wykorbienia.

Łączny moment bezwładności obu czopów korbowych (wydrażonych) i jednego czopa głównego wynosi:

$$I_c = \rho \left\{ \frac{\pi}{32} [2(D_c^4 - D_{cw}^4)L_c + D_{cg}^4 L_{cg}] + 2\frac{\pi}{4}(D_c^2 - D_{cw}^2)L_c R \right\} = 4.68 \cdot 10^{-3} [kg m^2], \quad (2.16)$$

gdzie:

- D_c - zewnętrzna średnica czopa korbowego,
- D_{cw} - wewnętrzna średnica czopa korbowego,
- L_c - długość czopa korbowego,
- D_{cg} - średnica czopa głównego,
- L_{cg} - długość czopa głównego.

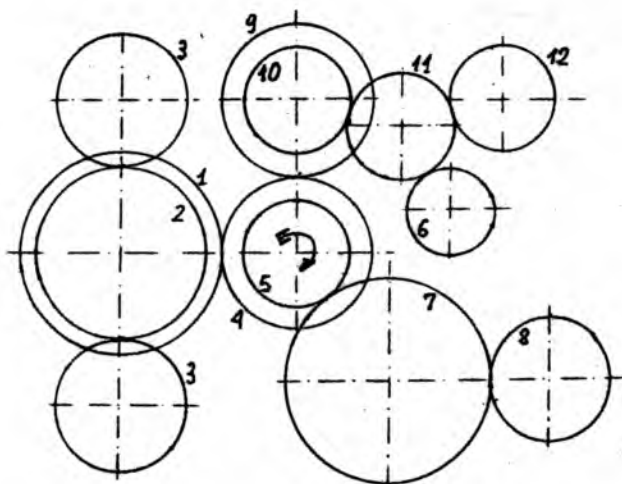
Ostatecznie, łączny moment bezwładności wykorbienia podwójnego wynosi:

$$I_2 = I_3 = I_4 = I_w = I_k + I_r + I_c = 32 \cdot 10^{-3} [kg m^2]. \quad (2.17)$$

Na tzw. swobodnym końcu wału korbowego znajduje się skrzynka napędów zawierająca 6 następujących głównych składowych bezwładności:

- a) wałek krzywkowy,
- b) koła zębate 1 i 2,
- c) koła zębate 4 i 5,
- d) koła zębate 6 i pompa olejowa,
- e) iskrownik,
- f) alternator.

Uwzględniając przełożenia poszczególnych napędów względem prędkości obrotowej wału korbowego (rys.3) sumaryczna, zredukowana bezwładność elementów



Rys. 3. Konfiguracja napędów pomocniczych; 1-2 - wałek rozrzędu (1350 [obr/min]), 3 - iskrownik (2025 [obr/min]), 4-5 - wał korbowy (2700 [obr/min]), 6 - pompa oleju (3050 [obr/min]), 7 - koło pośrednie (1350 [obr/min]), 8 - pompa paliwa (1800 [obr/min]), 9-10 - alternator (2700 [obr/min]), 11 - koło pośrednie (2700 [obr/min]), 12 - pompa hydrauliczna (2700 [obr/min])

skrzynki napędów wynosi:

$$I_s = (I_a + I_b) \left(\frac{1350}{2700} \right)^2 + I_c + I_d \left(\frac{3050}{2700} \right)^2 + I_e \left(\frac{2025}{2700} \right)^2 + I_f \left(\frac{4520}{2700} \right)^2 = 0.013 [\text{kg m}^2]. \quad (2.18)$$

Zestawienie parametru bezwładności dla tarcz modelu zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Bezwładności i sztywności dyskretnego skrzętnego modelu wirnika zespołu napędowego ZST-350 i US-142F

	Jednostka miary	1	2	3	4	5
I	kg m ²	2.202	0.032	0.032	0.032	0.013
k	kNm/rad	395	430	430	862	-

2.3.2. Podatności elementów modelu

Miarą podatności poszczególnych elementów modelu, tj. odcinków wału między tarczami - bezwładnościami zastępczymi, są ich długości zastępcze.

Długość zastępcza pewnego odcinka pędni to taka długość prostego, cylindrycznego i pełnego wału zastępczego (modelowego) o przyjętej średnicy zewnętrznej równej (zwykle) średnicy czopów głównych, że ich podatności skrętne są identyczne.

Przyjmując, że obydwa wały: rzeczywisty i modelowy są wykonane z tego samego materiału, tzn. że ich moduły sprężystości postaciowej są identyczne:

$$G_z = G, \quad (2.19)$$

przyrównanie podatności skrętnych wałów w przypadku gdy ich geometria różni się tylko średnicą prowadzi do wzoru:

$$L_z = \left(\frac{D_z}{D}\right)^4 L, \quad (2.20)$$

gdzie:

D_z, D - średnica wałów odpowiednio: zastępczego i modelowanego,

L_z, L - długości wałów odpowiednio: zastępczego i modelowanego.

Sztywność skrętną zastępczego odcinka wału oblicza się wg znanego wzoru:

$$k = \frac{G_z I_z}{L_z}, \quad (2.21)$$

gdzie:

$C_z = 8.5 \cdot 10^4$ MPa - moduł sprężystości postaciowej dla stali 40HN-MAZ,

$I_z = \frac{\pi}{32} D_z^4$ - osiowy moment bezwładności przekroju wałka zastępczego; dla przyjętej średnicy zastępczej $D_z = 67$ mm wynosi on $1.978 \cdot 10^6$ mm⁴.

Wszelako dla złożonych geometrycznie wałów rzeczywistych (np. wykorbionych) wzór (2.21) jest znacznie bardziej skomplikowany, a dodatkowo nieprecyzyjny. I tak dla wykorbienia podwójnego podobnego do tego, które występuje w silniku "bokser typu ZST-350 Ker Wilson [2] podaje następujący wzór wyprowadzony przez Cartera (rys.2):

$$I_{zw} = D_z^4 \left[\frac{A + 0.4D_1}{D_1^4 - D_{w1}^4} + \frac{2(B + 0.4D_2)}{D_2^4 - D_{w2}^4} + \frac{R - 0.2(D_1 + D_2)}{TW^3} + \frac{R - 0.2D_2}{T_1 - W_1^3} \right]. \quad (2.22)$$

Dla danych geometrycznych wykorbienia podwójnego silnika ZST-350 mamy:

$$L_{zw} = 390 \text{ mm}.$$

Napędowa końcówka wału korbowego, na której mocuje się piastę śmigła, to wał wydrążony.

Długość zastępcza końcówki wału korbowego, na której mocuje się śmigła wynosi:

$$L_{zn} = \frac{I_{zn}}{I_n} L_n = \frac{D_z^4}{D_n^4 - D_{nw}^4} = 230 \text{ mm} . \quad (2.23)$$

Obliczamy teraz długości zastępcze poszczególnych odcinków modelu fizycznego. Pierwszy odcinek – między śmigłem a płaszczyzną środkową pierwszej pary mechanizmów korbowych – będzie miał długość zastępczą równą sumie długości zastępczej końcówki napędowej oraz połowy długości zastępczej podwójnego wykorbenia tj:

$$L_{z1} = L_{zn} + \frac{1}{2} L_{zw} = 425 \text{ mm} . \quad (2.24)$$

Długości zastępcze dwóch następnych odcinków wału są jednakowe i równe dwóm połówkom długości zastępczej wykorbenia:

$$L_{z2} = L_{z3} = L_{zw} = 390 \text{ mm} . \quad (2.25)$$

Natomiast ostatni odcinek modelu – między 3-cim wykorbeniem podwójnym a skrzynką napędów pomocniczych ma długość zastępczą równą połowie poprzedniego:

$$L_{z4} = \frac{1}{2} L_{zw} = 195 \text{ mm} . \quad (2.26)$$

Sztywności skrętne poszczególnych odcinków wału modelowego obliczymy ze wzoru (2.21).

Zestawienie wyników identyfikacji parametrycznej badanego układu drgań skrętnych zawiera tabela 1.

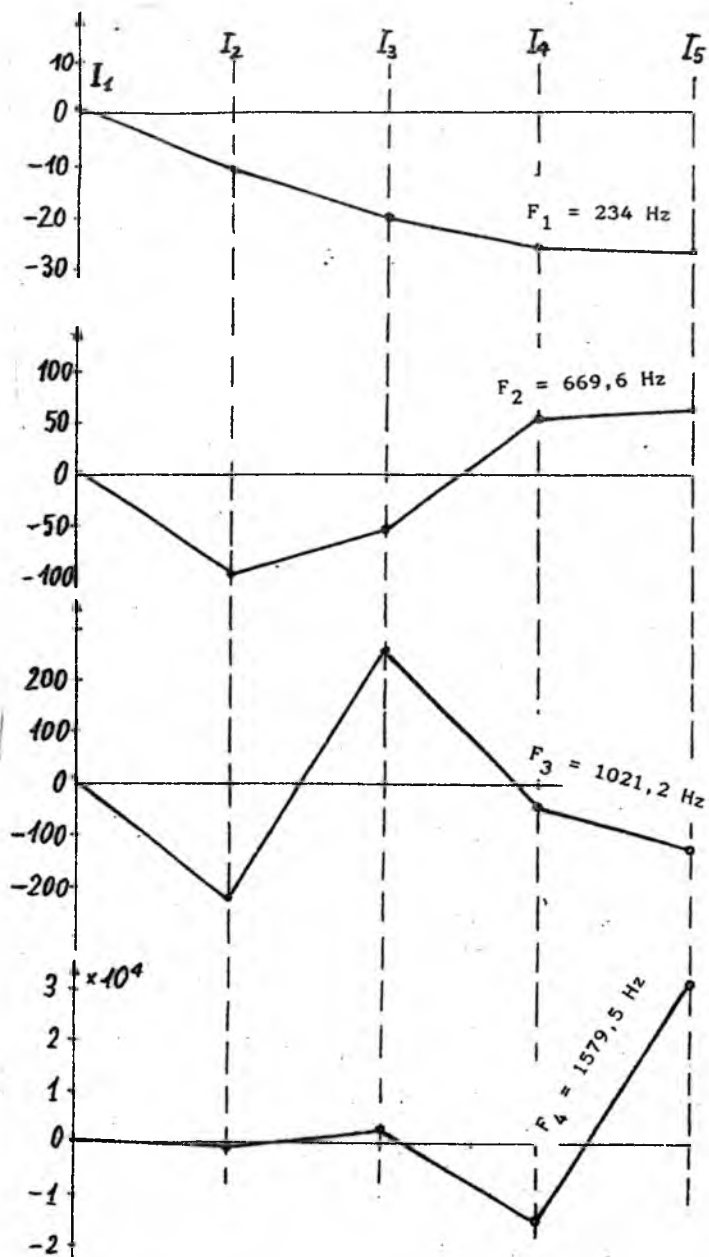
2.4. Obliczenia numeryczne modelu

Dla zbudowanego modelu matematycznego opracowano program obliczeniowy oparty na metodzie wyznaczania wartości własnych macierzy stanu. Program ten dostosowany jest do obliczeń za pomocą mikrokomputera PC w systemie IBM.

Program główny pt. "Obliczenia drgań skrętnych układu jednogłęziowego" (w wersji źródłowej SKRET1.FOR) zbudowany jest z czterech modułów opatrzonych kolejno tytułami:

1. Dane
2. Częstości drgań własnych
3. Postacie drgań własnych
4. Obroty rezonansowe.

W celu ułatwienia wprowadzania danych tworzy się ich zbiór DANKRET przy pomocy specjalnego podprogramu konwersacyjnego. Pytania podprogramu



Rys. 4. Postacie własnych drgań skrętnych modelu

zawierają każdorazowo nazwę danej, jej symbol przyjęty w modelu matematycznym oraz jednostkę miary (zgodną z normą SI). Wszelkie zmiany danych wejściowych do obliczeń drgań skrętnych mogą być dokonywane w samym zbiorze DANKRET przy pomocy jednego z programów edycyjnych.

Wartości własne (częstości) modelu dyskretnego drgań skrętnych obliczono przy pomocy diagonalizacji równania charakterystycznego (2.3) metodą Jacobiego – przedstawia je tabela 2. Zawiera ona także amplitudy względne poszczególnych postaci drgań przy założeniu, że amplituda przemieszczenia skrętnego pierwszej tarczy modelu jest jednością – rys.4.

Tabela 2. Częstości własne oraz odpowiadające im postacie drgań własnych

$F(I)$ [Hz]	$\alpha(I)$				
669.6	1.000	-97.590	-59.599	56.903	77.626
1021.2	1.000	-228.281	260.450	-48.719	-128.491
234.0	1.000	-11.037	-20.320	-26.334	-27.221
1579.5	1.000	-547.549	2961.779	-15237.089	31394.730

Tabela 3. Obroty rezonansowe n_{rez}

F [Hz]	$H(I)$ [obr/min]	$n_{rez}(I)$
$F(1) = 669.6$	3	13392.3
	6	6696.1
	9	4464.1
$F(3) = 1021.2$	3	20423.1
	6	10211.5
	9	6807.7
$F(4) = 234.0$	3	4679.6
	6	2339.8
	9	1559.9
$F(5) = 1579.5$	3	31589.7
	6	15794.8
	9	10529.9

Obliczenia drgań własnych układów drgających pozwalają wnioskować o preferowanych częstościach drgań. Są one niebezpieczne jeśli spotykają się choćby ze słabymi wymuszeniami. Podczas pracy silnika wielocylindrowego siły i momenty okresowe generowane w różnych cylindrach równoważą się wzajemnie, z wyjątkiem jednakże tzw. harmonik głównych. Są to te składowe harmoniczne, których rząd dla silników czterosuwowych jest wielokrotnością połowy liczby cylindrów. Częstości wymuszeń, na ogół związanych z prędkością obrotową, rosną wraz z nią – w ten sposób różne harmoniki wymuszeń zrównują się ze stałymi częstościami własnymi przy określonych obrotach wału zwanych rezonansowymi. Wyznaczenie tych obrotów, zgodnie ze wzorami (2.10) i (2.11) było przedmiotem

ostatniego modułu programu. Wydruk wyników zawiera tabela 3, a graficzną metodę przybliżonego wyznaczania obrotów rezonansowych przedstawia tzw. diagram Campbella na rys.5.

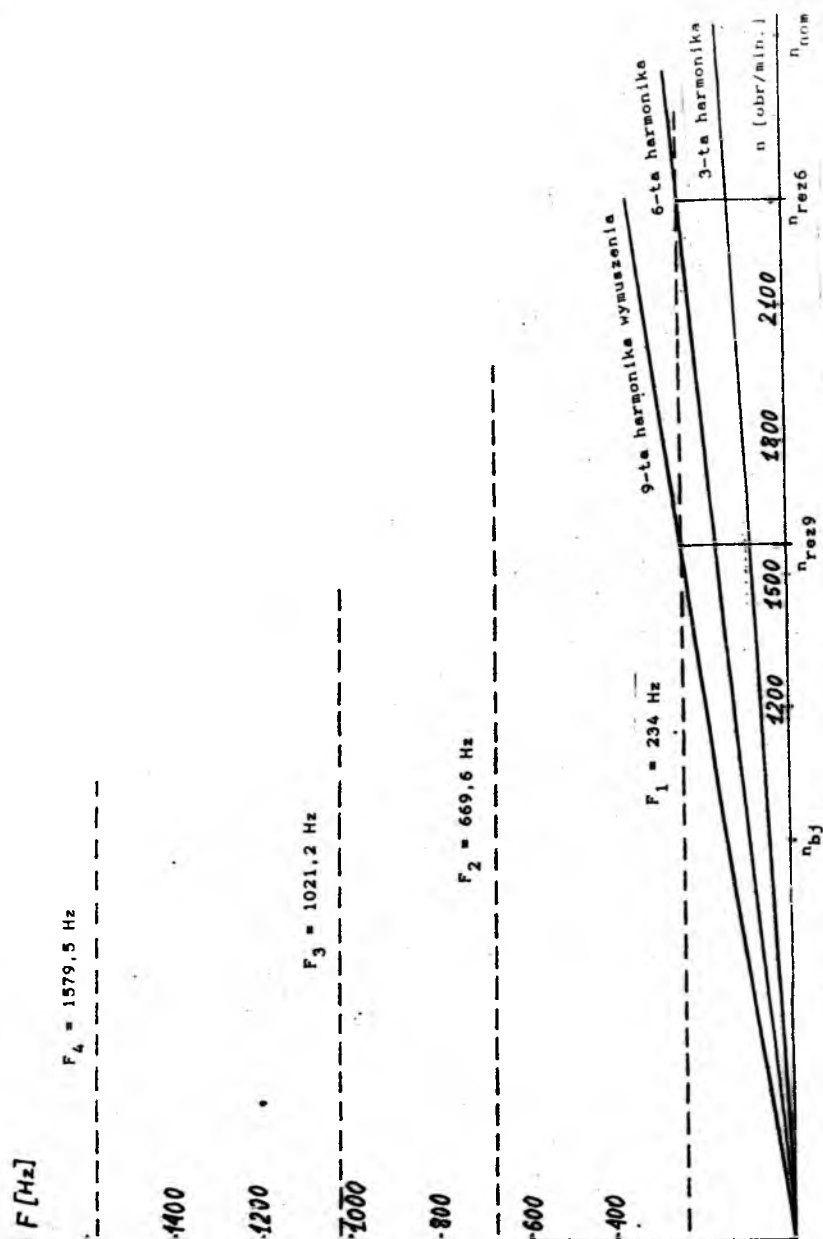
Znaczenie praktyczne mają te rezonansowe prędkości obrotowe, które mieszczą się w zakresie roboczym tj. między biegiem jałowym - $n_{bj} = 900$ obr/min a reżymem nominalnym - $n_{nom} = 2700$ obr/min. Dla zbadanego modelu istnieją dwa takie rezonanse: z 9-tą harmoniką momentu napędowego przy $n_{rez9} = 1560$ obr/min i z 6-tą harmoniką przy $n_{rez6} = 2340$ obr/min. Stanowią one poważne zagrożenie wytrzymałości zmęczeniowej wału korbowego bo wg poprzednich obliczeń [7] amplitudy tych głównych harmonik wynoszą odpowiednio: $L_9 = 95.6$ Nm, $L_6 = 374.8$ Nm przy reżymie nominalnym.

3. Model układu napędowego z uwzględnieniem podatności łopat śmigła

W większości przypadków, w układach napędowych występują elementy o masach i sztywnościach rozłożonych w sposób ciągły (wały) oraz elementy o masach skupionych (tarcze). Budując model fizyczny, na ogół układ przedstawia się w postaci szeregu mas skupionych o zredukowanych momentach bezwładności połączonych ze sobą nieważkimi elementami o zredukowanych sztywnościach. Tak właśnie postąpiono w rozdziale 1 niniejszej pracy, godząc się na znaczne uproszczenie modelu. Chcąc rzeczywisty układ napędowy zastąpić modelem dokładniejszym, uwzględniającym podatność łopat śmigła, posłużymy się metodą sztywności dynamicznych. Metoda ta pozwala na szybkie analizowanie wpływu poszczególnych elementów układu na częstości drgań własnych, a co za tym idzie szybkie i łatwe uwzględnienie zmian konstrukcyjnych. Ponadto jest niezastąpiona w przypadku, gdy sztywność dynamiczna jednej z gałęzi układu jest określona w sposób doświadczalny a pozostałych wyznaczona na drodze obliczeniowej. Taki właśnie przypadek zachodzi jeśli w układzie napędowym silnika lotniczego uwzględniamy podatność łopat śmigła. W takim przypadku model fizyczny omówiony w rozdziale 1 rozdzielimy na model śmigła i model układu korbowego silnika wraz z należącymi doń zespołami. Do obu tych części zastosujemy podaną w [8] i [9] metodę sztywności dynamicznych.

3.1. Model układu korbowego

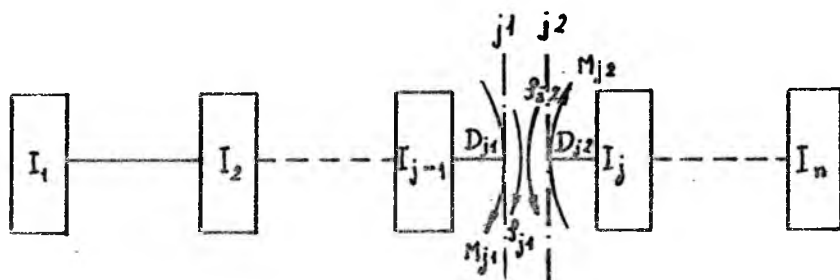
Model fizyczny układu korbowego zgodnie z rys.1 (po oddzieleniu śmigła) stanowi gałąź złożoną z mas skupionych połączonych ze sobą nieważkimi elementami



Rys. 5. Diagram Campbella dla modelu ZST-350 + US142F

sprężystymi. W takim przypadku metoda sztywności dynamicznej sprowadza się do następującego postępowania:

- przecinamy myślowo (ogólnie w dowolnym miejscu) element sprężysty łączący sąsiadujące ze sobą masy rozpatrywanej gałęzi modelu (rys.6);



Rys. 6. Model układu korbowego dla metody sztywności dynamicznej

- w miejscu przecięcia wprowadzamy moment przekrojowy M i przemieszczenie kątowe φ , oddzielnie dla lewej i prawej części gałęzi;
- stosunek M/φ tych wielkości (zmiennych sinusoidalnie w czasie) definiujemy jako sztywność dynamiczną D ;
- z warunku ciągłości przemieszczeń kątowych w rozpatrywanym przekroju otrzymujemy warunek jaki musi spełnić równanie sztywności dynamicznych będących funkcjami parametrów układu i częstości wymuszającej p :

$$D_j = D_{j1} + D_{j2} = 0. \quad (3.1)$$

Wartości częstości p spełniające równanie (3.1) są poszukiwanymi częstościami własnymi układu.

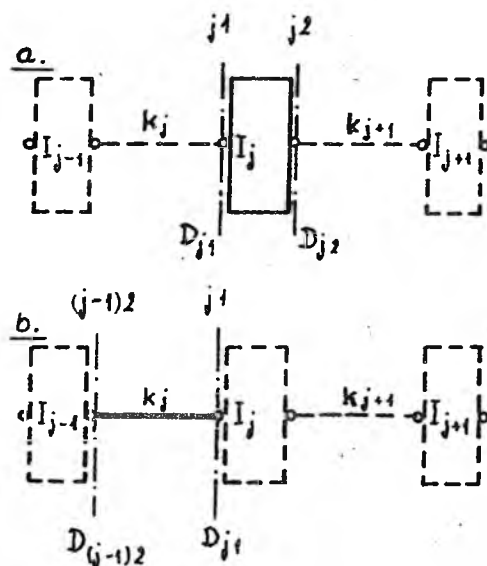
Wykonując wiele przekrojów wg podanej wyżej zasady, możemy rozbić układ na szereg najprostszych elementów (mas o momentach I_j oraz bezmasowych odcinków wału o sztywnościach k_j).

Przy przechodzeniu z jednego przekroju położonego przed masą skupioną do drugiego położonego bezpośrednio za masą (rys.7a) zgodnie z omawianą metodą obowiązuje wzór:

$$D_{j2} = D_{j1} - I_j p^2, \quad (3.2)$$

gdzie:

- D_{j1} - sztywność przed masą skupioną,
- D_{j2} - sztywność za masą skupioną.



Rys. 7. Modele: a – elementu masowego, b – elementu sprężystego

Przy przejściu od przekroju 1 do przekroju 2 oddzielonych od siebie odcinkiem wału o sztywności skrętnej k_j (rys.7b) obowiązuje wzór:

$$D_{j1} = \frac{D_{(j-1)2} k_j}{D_{(j-1)2} + k_j} \quad (3.3)$$

Wzory (3.2) i (3.3) wynikają z warunku równowagi dynamicznej rozpatrywanego elementu modelu i definicji sztywności dynamicznej.

Sztywności dynamiczne D_{j1} i D_{j2} w rozpatrywanym przekroju j (rys.6) dla lewej i prawej części gałęzi obliczamy stosując rekurencyjne wzory (3.2) i (3.3) do kolejnych elementów modelu rozpoczynając od ich skrajnych mas. Funkcja sztywności dynamicznej podana wzorem (3.1) będąca sumą wymienionych wyżej składowych posiada miejsca zerowe i asymptoty pionowe. Miejsca zerowe odpowiadają częstościom rezonansowym a w interpretacji fizycznej oznaczają nieograniczony wzrost amplitud drgań. Asymptoty pionowe odpowiadają częstościom antyrezonansowym co w interpretacji fizycznej oznacza zerowanie się amplitud drgań.

Omówioną metodę można zastosować bezpośrednio do modelu pokazanego na rys.1, w którym śmigło jest potraktowane jako masa skupiona lub też do części tego modelu po odłączeniu śmigła. Chcąc rozpatrzeć cały model ze śmigłem podatnym, należy podać zasady budowy modelu śmigła przy wykorzystaniu metody sztywności dynamicznych.

3.2. Model śmigła

Śmigło (przy założonej obecnie dokładności modelu) zostanie potraktowane jako zespół złożony z elastycznych łopatek połączonych ze sztywną piastą o zredukowanym momencie bezwładności I_p . Sztywność dynamiczną tego zespołu, zgodnie z rozważaniami podanymi w [8] i [9] wyrazimy wzorem:

$$D_s = nD_z + D_p, \quad (3.4)$$

gdzie:

n – ilość łopatek śmigła,

D_p – sztywność dynamiczna piasty,

D_z – sztywność dynamiczna jednej łopaty zredukowana do osi piasty.

Sztywności cząstkowe występujące we wzorze (3.4) wyrazimy zależnościami:

$$D_z = D_1 \sin^2 \beta + D_2 \cos^2 \beta, \quad (3.5)$$

$$D_p = -I_p p^2,$$

gdzie: β – kąt nastawienia łopaty.

Sztywności dynamiczne D_1 i D_2 odpowiadające płaszczyźnie mniejszej i większej sztywności łopaty, wyznaczmy ze wzorów Biota w postaci:

$$D_1 = -I_z p^2 \frac{\prod_{i=1}^{n1} \left[1 - \left(\frac{p}{\omega_{1i}} \right)^2 \right]}{\prod_{i=1}^{m1} \left[1 - \left(\frac{p}{\omega_{1i}} \right)^2 \right]}, \quad (3.6)$$

$$D_2 = -I_z p^2 \frac{\prod_{i=1}^{n2} \left[1 - \left(\frac{p}{\omega_{2i}} \right)^2 \right]}{\prod_{i=1}^{m2} \left[1 - \left(\frac{p}{\omega_{2i}} \right)^2 \right]},$$

gdzie:

I_z – moment bezwładności łopaty względem osi z ,

ω_{1i} – częstość rezonansowa łopaty w płaszczyźnie mniejszej sztywności,

ω_{1i} – częstość antyrezonansowa łopaty w płaszczyźnie mniejszej sztywności,

ω_{2i} – częstość rezonansowa łopaty w płaszczyźnie większej sztywności,

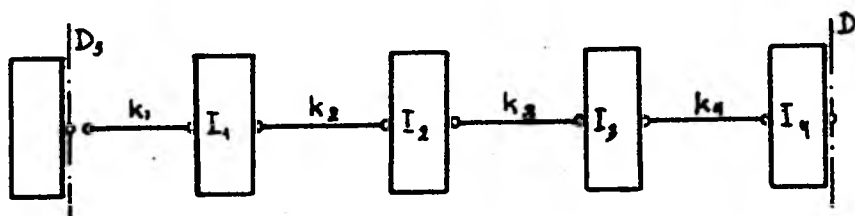
ω_{2i} – częstość antyrezonansowa w płaszczyźnie większej sztywności,

$n1, n2$ – ilość częstości rezonansowych,

$m1, m2$ – ilość częstości antyrezonansowych.

Przytoczone wyżej wzory pozwalają wyliczyć sztywność dynamiczną śmigła jeśli znane są częstości rezonansowe i antyrezonansowe drgań łopaty względem jej osi głównych (w płaszczyźnie mniejszej i większej sztywności). Częstości te dla konkretnego istniejącego śmigła mogą być zbadane na drodze doświadczalnej.

3.3. Model zespołu śmigła – układ korbowy



Rys. 8. Model układu korbowego wraz ze śmigłem

Znając sztywność dynamiczną śmigła podaną wzorem (3.4) oraz zasady tworzenia modelu układu korbowego, możemy zbudować model całego zespołu w postaci jak na rys.8.

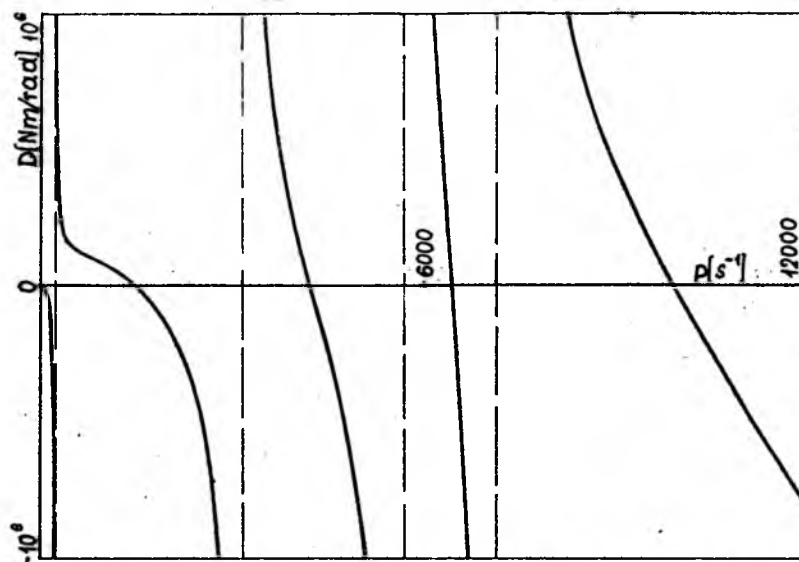
Sztywność dynamiczna śmigła będzie w tym modelu sztywnością początkową dla pierwszego elementu sprężystego o sztywności k_1 – zgodnie ze wzorem (3.3). Przekrój myślowy, w którym obliczymy globalną sztywność modelu D , przyjmiemy na końcu gałęzi. Jej wartość znajdziemy stosując rekurencyjne wzory (3.2) i (3.3) kolejno dla następujących po sobie elementów modelu aż do osiągnięcia końcowego przekroju.

3.4. Obliczenie częstości drgań własnych

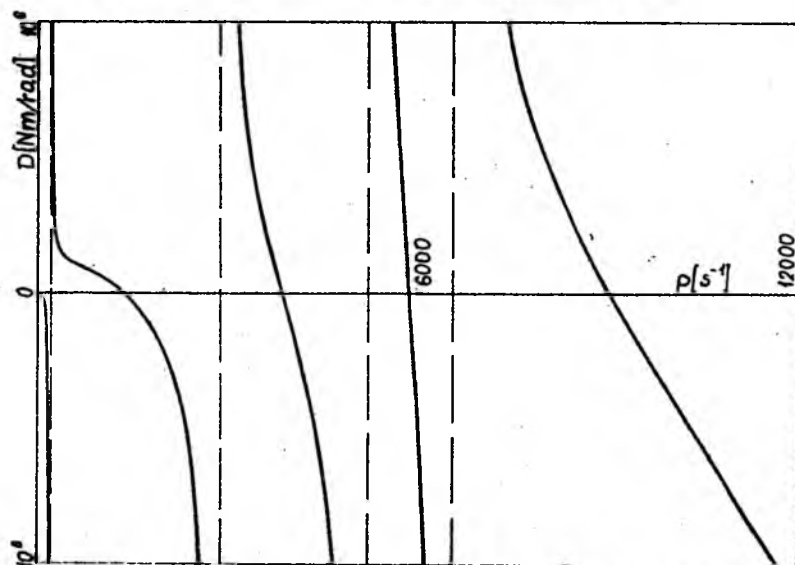
Obliczeń sztywności dynamicznych i częstości drgań własnych dla omawianego modelu, dokonano przy pomocy uniwersalnego programu (który może być zastosowany do bardziej złożonych układów mechanicznych) podanego w [10], opracowanego na PC w systemie IBM.

Dla celów porównawczych w pierwszej kolejności wykonano obliczenia dla modelu ze śmigłem modelowanym masą skupioną. Wykres sztywności dynamicznych w funkcji częstości wymuszającej, wraz z wyliczonymi częstościami rezonansowymi i antyrezonansowymi, pokazano na rys.9.

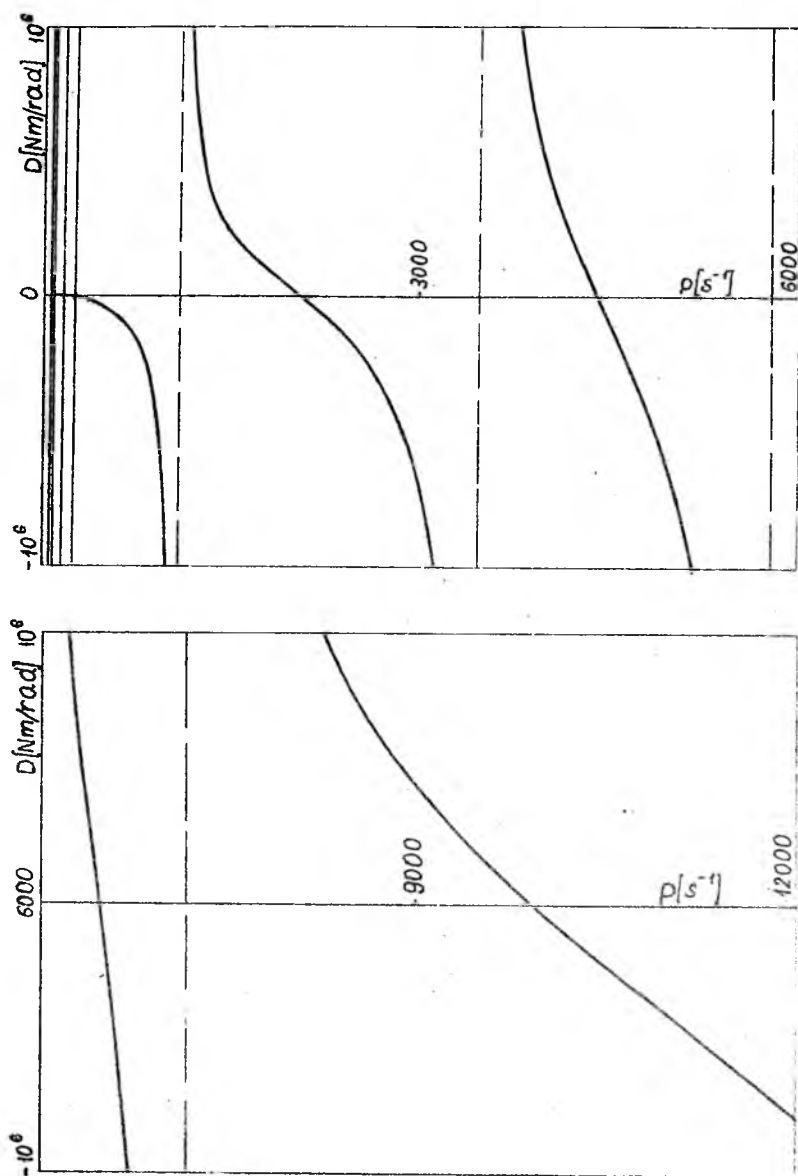
Otrzymane wyniki dotyczące częstości drgań własnych pokrywają się z częstościami obliczonymi w rozdziale 1. Dla tego samego modelu wykonano obli-



Rys. 9. Funkcja sztywności dynamicznej dla modelu układu korbowego ze śmigłem zastąpionym masą skupioną; częstotliwości rezonansowe - 0, 1470, 4207, 6416, 9924 [s^{-1}], częstotliwości antyrezonansowe - 232, 3133, 5685, 7142 [s^{-1}]



Rys. 10. Funkcja sztywności dynamicznej dla modelu jak na rys.9 lecz z momentami bezwładności zwiększonymi o 10 % i sztywnościami zmniejszonymi o 10 %; częstotliwości rezonansowe - 0, 1330, 3806, 5804, 8978 [s^{-1}], częstotliwości antyrezonansowe - 210, 2834, 5143, 6461 [s^{-1}]



Rys. 11. Funkcja sztywności dynamicznej dla modelu układu korbowego ze śmigłem podatnym; częstotliwości rezonansowe – 0, 67, 143, 159, 245, 2062, 4421, 6466, 9924 $[\text{s}^{-1}]$, częstotliwości antyrezonansowe – 57, 69, 157, 244, 1069, 3481, 5779, 7151 $[\text{s}^{-1}]$

czenia zwiększające o 10% momenty bezwładności wszystkich mas skupionych i zmniejszając o 10% sztywności wszystkich elementów sprężystych. Miało to na celu sprawdzenie wpływu parametrów modelu na wyniki obliczeń. Wykres sztywności dynamicznych wraz z wartościami częstości rezonansowych pokazano na rys.10.

Analizując otrzymane wyniki możemy stwierdzić, że wszystkie częstości drgań własnych uległy zmniejszeniu o 9.55%. Obliczenia modelu ze śmigłem traktowanym jako element podatny, z konieczności przeprowadzono w sposób uproszczony. Wobec braku danych doświadczalnych dotyczących częstości rezonansowych i antyrezonansowych łopaty śmigła, zdecydowano się na wykorzystanie danych dotyczących całego śmigła. Wymagało to pewnego zmodyfikowania wprowadzania danych do programu obliczeniowego. Wadą takiego podejścia jest brak możliwości zbadania wpływu kąta ustawienia łopat β na częstości rezonansowe modelu. Dane dotyczące parametrów dynamicznych badanego modelu podano w tabelach 4 i 5.

Tabela 4

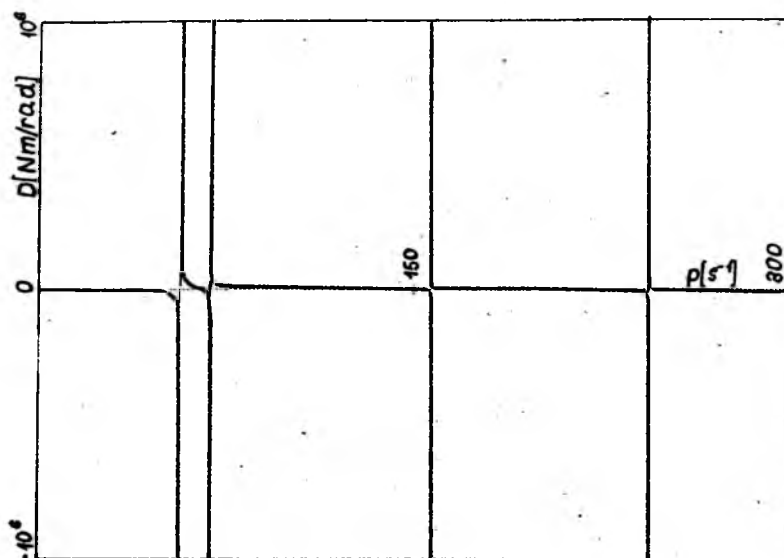
Wielkość	Jednostka	Masy modelu układu korbowego			
		1	2	3	4
I	kg m^2	0.032	0.032	0.032	0.013
k	kNm/rad	395000	430000	430000	862000

Tabela 5

Wielkość	Kolejne częstości śmigła podatnego [s^{-1}]			
	1	2	3	4
Częstości rezonansowe ω_i	67	156	205	251
Częstości antyrezonansowe w_i	58	70	157	244

Wykres sztywności dynamicznej w funkcji częstości rezonansowej wraz z obliczonymi częstościami rezonansowymi i antyrezonansowymi pokazano na rys.11 a jego fragment pochodzący od sztywności śmigła na rys.12.

Porównując wykresy z rys.9 i 11 możemy stwierdzić, że uwzględnienie podatności łopat śmigła spowodowało istotne zmiany w widmie częstości własnych zespołu śmigło – układ korbowy. W jego widmie pojawiły się pierwsze cztery najniższe częstości pochodzące od podatności łopat. Następna w kolejności (piąta) częstość, odpowiadająca pierwszej częstości modelu ze śmigłem sztywnym jest od niej znacznie wyższa. Pozostałe częstości w obu modelach wraz ze wzrastającą kolejnością różnią się od siebie coraz mniej.



Rys. 12. Funkcja sztywności dynamicznej pochodzącej od podatnego śmigła (fragment rys.11); częstotliwości rezonansowe - 0, 67, 143, 159, 245 [s^{-1}], częstotliwości antyrezonansowe - 57, 69, 157, 244 [s^{-1}]

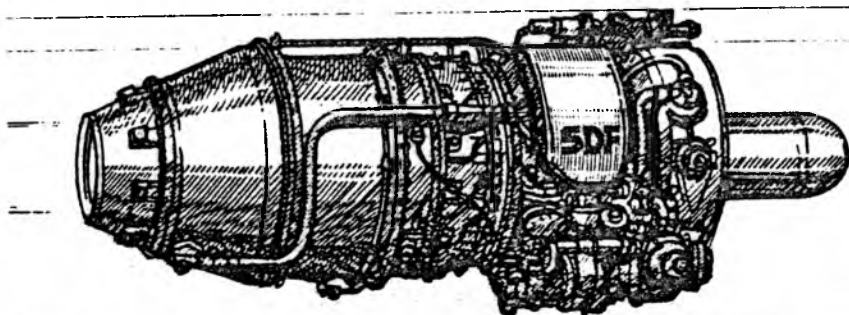
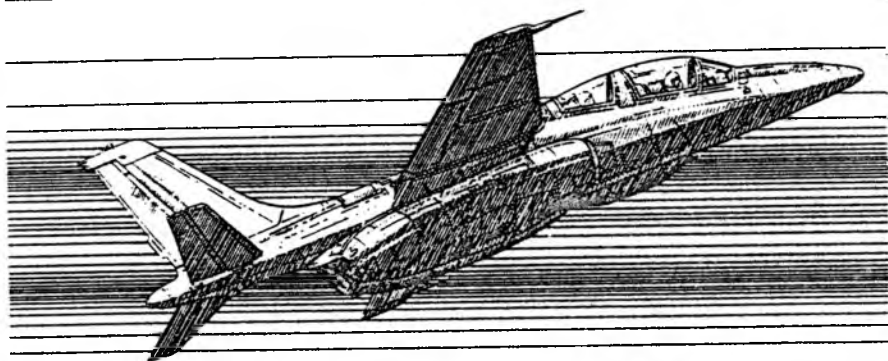
Literatura

1. JEŻ M., 1988, *Obliczenia sił i momentów dynamicznych generowanych wskutek pracy sześciocyłindrowego bokseta typu ZST-950*, Sprawozdanie Inst.Lotn. nr 3.41.1.95, Warszawa
2. JEŻ M., 1974, *Metoda doboru wiskotycznych tłumików drgań skrętnych*, Silniki Spalinowe, 4
3. JEŻ M., DZIAWGO M., 1979, *Badania dynamiczne stanowiska hamowni silników tłokowych*, Prace Instytutu Lotnictwa, 79, Warszawa
4. JĘDRZEJEWSKI J., 1979, *Mechanika układów korbowych silników samochodowych*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa
5. KER WILSON W., 1967, *Practical Solution of Torsional Vibration Problems*, London, Chapman and Hall
6. LALLEMENT G., 1976, *Identyfikacja liniowych układów mechanicznych*, Konferencja "Współczesne zagadnienia dynamiki maszyn", Wrocław
7. NESTORIDES E.J., 1958, *A Handbook on Torsional Vibration*, Cambridge University Press
8. STANKIEWICZ E., *Obliczenia obrotów krytycznych pędni śmigła ogonowego śmigłowca Mi-2*, Instytut Lotnictwa, sprawozdanie nr 45/D/TK.
9. ŚWIDER A., 1986 *Modele fizyczne i matematyczne drgań rezonansowych śmigłowcowych układów napędowych*, Instytut Lotnictwa, sprawozdanie nr PD10.03.86.

10. ŚWIDER A., 1989, *Opracowanie uniwersalnej metody obliczania drgań rezonansowych śmigłowcowych układów napędowych. IV - Weryfikacja doświadczalna modeli fizycznych i matematycznych w oparciu o badania modelowe*, Instytut Lotnictwa, sprawozdanie PD10.04.89.
11. ZIEMBA S., 1959, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa

K-15

NOWY POLSKI SILNIK
JEDNOPRZEPŁYWOWY



 INSTITUTE OF AVIATION

METODY SYMULACYJNE BADANIA STATECZNOŚCI AEROELASTYCZNEJ¹

FRANCISZEK A. DUL

Politechnika Warszawska

W artykule przedstawiono intensywnie rozwijany ostatnio kierunek badań stateczności aeroelastycznej, polegający na analizie *a posteriori* numerycznych rozwiązań nieliniowych, sprzężonych równań ruchu konstrukcji i przepływu. Podejście takie, w przeciwieństwie do klasycznego, opartego na badaniu stateczności harmonicznego ruchu układu zlinearyzowanego, pozwala na analizę zjawisk, w których nieliniowości (zwłaszcza aerodynamiczne) mają decydujące znaczenie, (np. flutter oderwania, buffeting, flutter transoniczny) i nie mogą być prawidłowo opisane modelem zlinearyzowanym.

W pracy przedstawiono ogólny algorytm badania stateczności metodą symulacyjną oraz zasygnalizowano najważniejsze problemy związane z prezentowanym podejściem, takie jak: identyfikacja warunków krytycznych, wpływ metod obliczeniowych na wyniki analizy aeroelastycznej, wymagana moc komputerów, opis geometrii obiektu i pola przepływu, modelowanie turbulencji, kryteria oceny stateczności ruchu, trudności związane z całkowaniem równań modelu danych w postaci niestandardowej (równania całkowo-różniczkowe, różniczkowo-algebraiczne, nierozwikływalne analitycznie względem najwyższych pochodnych). Przedstawiono również wyniki badań prowadzonych na świecie.

1. Wstęp

Klasyczna analiza aeroelastyczna polega na badaniu stateczności harmonicznego ruchu obiektu opisanego modelem liniowym [1]. Podejście takie nie pozwala jednakże analizować silnie nieliniowych zjawisk aeroelastycznych, takich jak np. flutter oderwania, buzz czy buffeting. Pojawienie się komputerów o dużej mocy obliczeniowej umożliwia badanie stateczności aeroelastycznej również tych zjawisk za pomocą tzw. podejścia symulacyjnego (ang. time-marching methods), polegającego na analizie numerycznych rozwiązań równań ruchu. Ideę wyjaśnimy na przykładzie wyznaczania prędkości krytycznej flutteru. Dla założonej prędkości lotu V_∞ i warunków początkowych q_0 całkuje się równania ruchu konstrukcji i przepływu a następnie bada się przebieg rozwiązania w czasie. Jeżeli ruch jest tłumiony, to prędkość V_∞ jest mniejsza od krytycznej, w przeciwnym razie jest

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

od niej większa. Kilkukrotne powtórzenie obliczeń pozwala wyznaczyć przedział zawierający V_{kr} .

Opisany sposób postępowania cechuje się ogólnością, gdyż typ równań modelu nie ma w zasadzie znaczenia, wymaga się jedynie numerycznej całkowalności równań ruchu. Ogólność metody jest okupiona wysokim kosztem obliczeniowym oraz pewnymi trudnościami teoretycznymi i numerycznymi. Pokażemy jednak, że podejście symulacyjne jest bardzo atrakcyjne, gdyż pozwala badać zjawiska, które nie mogą być analizowane metodami klasycznymi.

2. Modele zjawisk aeroelastycznych

Ogólny model ciągły zjawisk aeroelastycznych ma postać

- równania Naviera dla konstrukcji (we współrzędnych Lagrange'a):

$$\rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \text{Div}(\mathbf{S}) = \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

- równanie brzegu obiektu:

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

- warunki brzegowe:

$$\mathbf{S}|_F = \mathbf{T}|_F.$$

- warunki początkowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, 0) &= \mathbf{u}_0(x, y, z), \\ \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, z, 0)}{\partial t} &= \mathbf{w}_0(x, y, z), \end{aligned}$$

- równania Naviera-Stokesa dla przepływu (we współrzędnych Eulera):

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= 0, \\ \frac{D(\rho \mathbf{v})}{Dt} + \text{Div}(\mathbf{T}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{D(\rho e)}{Dt} + \text{div}(\mathbf{Q}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

- warunki brzegowe:

$$\mathbf{v}|_F = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_F,$$

- warunki początkowe:

$$\rho(x, y, z, 0) = \rho_0(x, y, z),$$

$$\mathbf{v}(x, y, z, 0) = \mathbf{v}_0(x, y, z),$$

$$e(x, y, z, 0) = e_0(x, y, z),$$

gdzie:

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ - przemieszczenia punktów obiektu,
 - $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ - prędkość płynu,
 - ρ_c, ρ - gęstości obiektu i płynu,
 - e - gęstość energii wewnętrznej płynu,
 - $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \partial \mathbf{u} / \partial t), \mathbf{T}(\mathbf{v})$ - tensory naprężeń w obiekcie i w płynie,
 - $Q(\rho, e, \mathbf{v})$ - strumień energii w płynie,
 - $\mathbf{f}$ - siły masowe działające na obiekt,
 - $D(\cdot) / Dt$ - pochodna substancjalna
- $$D(\cdot) / Dt = \partial(\cdot) / \partial t + \mathbf{v} \nabla(\cdot).$$

Model (2.1)÷(2.2) musi być uzupełniony odpowiednią liczbą związków konstytutywnych definiujących zależności $\mathbf{S}, \mathbf{T}, Q$, od zmiennych stanu $\mathbf{u}, \rho, \mathbf{v}, e$ [1]. Sprężenie obiektu i przepływu zachodzi poprzez położenie i prędkość brzegu konstrukcji $F(x, y, z, t)$ oraz rozkład naprężeń płynu $\mathbf{T}(x, y, z, t)$ na obiekcie.

Chociaż nie rozstrzygnięto zasadniczych problemów natury teoretycznej (istnienie i jednoznaczność rozwiązań, etc.) to uważa się, że model (2.1)÷(2.2) jest w stanie opisać złożone zjawiska aeroelastyczne, włącznie z tymi w których istotną rolę odgrywa turbulencja [2].

Rozwiązanie równań (2.1)÷(2.2) nie jest w ogólnym przypadku możliwe na drodze analitycznej. Rozwiązania przybliżone wyznacza się za pomocą metod numerycznych. Dyskretyzacja równań różniczkowych cząstkowych, zwykle za pomocą Metody Elementów Skończonych (2.1) lub Metody Różnic Skończonych (2.2), prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}^N + \mathbf{C}(\mathbf{q}^N) = \mathbf{g}, \quad \mathbf{q}^N(0) = \mathbf{q}_0^N, \quad (2.3)$$

gdzie:

- $\mathbf{q}^N$ - zdyskretyzowany wektor zmiennych zależnych,
 $\mathbf{q}^N = [\mathbf{u}^N, d\mathbf{u}^N/dt, \rho^N, \mathbf{v}^N, e^N]^T$,
- $\mathbf{B}$ - operator macierzowy $N \times N$,
- $\mathbf{C}$ - nieliniowy operator wektorowy $N \times 1$,
- $\mathbf{g}$ - wektor wyrazów wolnych $N \times 1$,
- N - wymiar zadania zdyskretyzowanego.

Równania (2.3) można scałkować numerycznie, o ile wymiar układu N nie jest zbyt wielki. W zagadnieniach lotniczych liczbę równań szacuje się na $10^7 \div 10^8$, co wynika z konieczności odwzorowania kształtu obiektu, jak i poprawnego opisu turbulentnego pola przepływu. Moc obliczeniowa istniejących komputerów nie jest wystarczająca do rozwiązania tak wielkich układów [2], dlatego dąży się do maksymalnego uproszczenia zarówno modelu konstrukcji, jak i aerodynamiki (rys.1).

Najczęściej używanym modelem konstrukcji jest opis modalny, w którym przemieszczenia $\mathbf{u}^N$ dane są związkiem:

$$\mathbf{u}^N = \Phi \mathbf{d}, \quad (2.4)$$

gdzie $d_i(t)$ – współrzędna modalna, Φ – macierz postaci własnych. Postacie Φ mogą być obliczone (np. MES-em) lub pochodzić z badań rezonansowych. W rezultacie model konstrukcji przyjmuje postać:

$$m_i \ddot{d}_i + c_i \dot{d}_i + k_i d_i = f_i, \quad i = 1, \dots, N_m, \quad (2.5)$$

gdzie N_m – liczba użytych postaci własnych, zwykle niewielka, $N_m = 3 \div 10$, m_i , c_i , k_i – odpowiednio: masy tłumienia i sztywności modalne, f_i – siła uogólniona. Widoczne jest, że zastosowanie modalnego opisu ruchu skrzydła prowadzi do istotnego obniżenia wymiaru zadania.

Uproszczenia modelu Naviera–Stokesa prowadzą zwykle do modelu Eulera oraz modeli potencjalnych.

Model Eulera ma postać (2.2) z tym, że tensor naprężeń $\mathbf{T}$ nie zawiera wyrazów opisujących lepkość płynu. Model Eulera opisuje fale uderzeniowe oraz niestacjonarne, wirowe pola przepływu, np. opływy z oderwaniami.

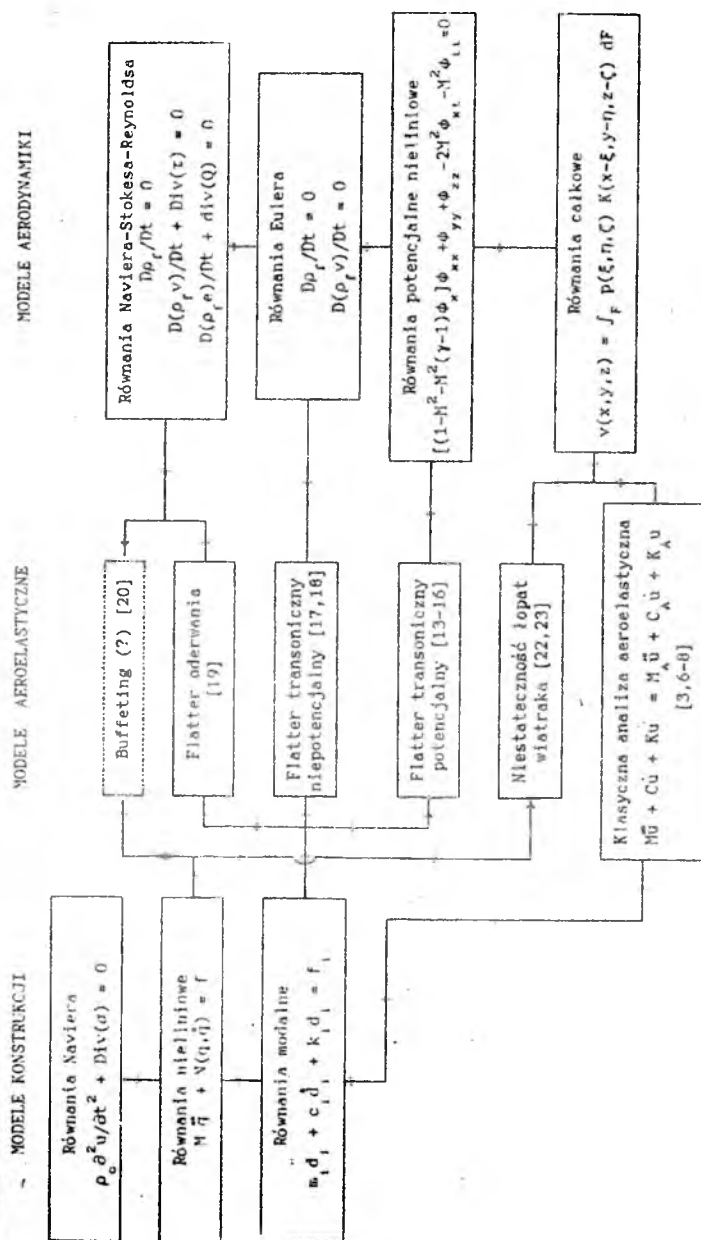
Zasadnicze uproszczenie modelu przepływu osiąga się wprowadzając założenie bezwirowości przepływu $\text{rot}(\mathbf{v}) = 0$, skąd wynika istnienie potencjału prędkości ϕ : $\mathbf{v} = \text{grad}(\phi)$. Dodatkowe założenie małych zaburzeń przepływu jednorodnego $\mathbf{v} = V_\infty + \text{grad}(\phi)$, $|\text{grad}(\phi)| \ll V_\infty$, pozwala opisać przepływ za pomocą równania całkowego, w którym wielkością niewiadomą jest ciśnienie p na powierzchni F obiektu:

$$v(x, y, z) = \int_F p(\xi, \eta, \zeta) K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) dF, \quad (2.6)$$

przy czym K jest tzw. jądrem równania, zależnym od rodzaju przepływu [3]. Model potencjalny nie opisuje jednak silnie zaburzonych pól przepływu oraz fal uderzeniowych w transonicznym zakresie prędkości lotu ($Ma \sim 1$).

Równanie całkowe (2.6) pozwala wyeliminować zmienne stanu opisujące ruch płynu, co prowadzi do liniowego modelu aeroelastycznego postaci:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^N + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^N + \mathbf{K} \mathbf{u}^N = \mathbf{M}_A \ddot{\mathbf{u}}^N + \mathbf{C}_A \dot{\mathbf{u}}^N + \mathbf{K}_A \mathbf{u}^N, \quad (2.7)$$



Rys. 1. Modele zjawisk aeroelastycznych

gdzie: $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{C}_A$, $\mathbf{K}_A$ – konstrukcyjne i aerodynamiczne macierze bezwładności, tłumienia i sztywności, lub modelu nieliniowego:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^N + \mathbf{N}(\mathbf{u}^N, \dot{\mathbf{u}}^N) = \mathbf{A}(\mathbf{u}^N, \dot{\mathbf{u}}^N, \ddot{\mathbf{u}}^N), \quad (2.8)$$

gdzie $\mathbf{N}$ i $\mathbf{A}$ są nieliniowymi operatorami wektorowymi.

Najbardziej złożone modele liniowe uwzględniają skomplikowane kształty opływających obiektów zarówno w modelu konstrukcji (za pomocą metody elementów skończonych) jak i w modelu aerodynamiki (metody elementów brzegowych, zwane też panelowymi, takie jak vortex lattice, doublet lattice) [4,5]. Jednakże zabiegi takie nie mogą usunąć podstawowego ograniczenia modelu aerodynamiki, którym jest założenie dotyczące małych zaburzeń oraz nielepkości przepływu.

Okazuje się, że poprawny opis wielu zjawisk aeroelastycznych można uzyskać za pomocą opisanych wyżej modeli uproszczonych. Rozwiązanie równań tych modeli leży już w zakresie możliwości obliczeniowych superkomputerów a nawet mikrokomputerów.

Modele opisane w niniejszym paragrafie przedstawione są na rys.1.

3. Metody klasyczne badania stateczności aeroelastycznej

Klasyczna analiza aeroelastyczna polega na badaniu stateczności ruchu harmonicznego konstrukcji:

$$\mathbf{u}(t, x, y, z) = \bar{\mathbf{u}}(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

gdzie: $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z)$ – amplituda ruchu, ω – częstość zespolona.

Podstawienie zależności (3.1) do równania (2.7) prowadzi do zespolonego zagadnienia własnego:

$$[\mathbf{A}(V_\infty) + i\omega\mathbf{B}(V_\infty) - \omega^2\mathbf{C}(V_\infty)]\bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.2)$$

w którym macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ są zależne od parametru – prędkości lotu V_∞ . Badanie stateczności ruchu polega na wyznaczeniu częstości zespolonych $\omega(V_\infty)$ w funkcji parametru V_∞ . Ujemna część urojona $\text{Im}(\omega(V_\infty)) < 0$ wskazuje na niestateczność ruchu. Wyznaczenie prędkości krytycznej V_{kr} dokonuje się zwykle za pomocą metody V-g, która pozwala na wyznaczanie prędkości krytycznej flatteru samolotów latających z prędkościami zarówno pod- jak i naddźwiękowymi [3,6÷8].

Jeżeli zamiast modelu (2.7) przyjmie się model nieliniowy (2.8) to po podstawieniu (3.1) otrzyma się nieliniowe zagadnienie własne, które można rozwiązać iteracyjnie:

$$[\mathbf{A}(\mathbf{u}^j; V_\infty) - (\omega^{j+1})^2\mathbf{C}(\mathbf{u}^j; V_\infty)]\bar{\mathbf{u}}^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Sposób taki został z powodzeniem zastosowany np. do badania flatteru panelowego [9,10]. Nie wydaje się jednak, aby takie podejście umożliwiało rozwiązanie bardziej złożonych zadań, zwłaszcza tych w których występują nieustalone pola przepływu.

Podstawowym ograniczeniem podejścia klasycznego jest założenie harmoniczności ruchu (3.1). W wielu przypadkach jest ono uzasadnione, jednakże niektóre zjawiska mają przebieg zdecydowanie nieharmoniczny, nie mogą one być zatem analizowane za pomocą podejścia klasycznego. Przykładem jest buffeting, w którym istotna jest turbulencja.

Następne ograniczenie analizy klasycznej wynika z faktu, że modele (2.7) i (2.8) zakładają jednoznaczność zależności pomiędzy ruchem obiektu a przepływem, co odzwierciedlone jest w postaci operatorów aerodynamicznych. Założenie takie jest dość skuteczne, gdyż wszystkie liniowe zjawiska aerodynamiczne mogą być opisane w ten sposób (por. [3] – operatory aerodynamiczne dla różnych rodzajów przepływu i zakresów prędkości lotu), można również uwzględnić historię ruchu (oddziaływanie śladu wirowego), można w końcu w ten sposób opisać niektóre nieliniowości aerodynamiczne, czego przykładem jest nieliniowy model potencjalny flatteru transonicznego. Trudno jest jednak opisać w ten sposób silne nieliniowości, na przykład histerezę aerodynamiczną we flatterze oderwania. Model liniowy nie jest w stanie opisać tego zjawiska nawet jakościowo. W tej sytuacji należy użyć modeli nieliniowych, na przykład Eulera lub Naviera–Stokesa, jednak wówczas nie można zastosować założenia (3.1), gdyż ruch na ogół nie jest harmoniczny.

4. Metody symulacyjne badania stateczności aeroelastycznej

Ograniczenia podejścia klasycznego nie występują w podejściu symulacyjnym. W związku z tym może ono służyć do analizy nieliniowych zjawisk aeroelastycznych.

Ogólny algorytm podejścia symulacyjnego jest następujący. Załóżmy, że należy wyznaczyć stateczność ruchu obiektu opisanego równaniem nieliniowym (2.3), względem pewnego parametru, np. prędkości lotu V_∞ . Algorytm wyznaczania krytycznej wartości parametru V_{kr} metodą symulacyjną ma postać:

1. założyć $V^0 \approx 0$,
2. scałkować równania modelu (2.3) w dostatecznie długim przedziale czasu ΔT ,
3. jeżeli miara zbieżności rozwiązania $\|q(t)\|$ maleje z czasem, to $V^{i+1} = V^i + \Delta V$ i ponów obliczenia – przejdź do kroku 2;
w przeciwnym razie $V_{kr} \in \langle V^{i-1}, V^i \rangle$ – przejdź do kroku 4;

4. zawęzić przedział zawierający V_{kr} , np. za pomocą metody bisekcji.

Realizacja powyższego algorytmu wymaga sprecyzowania takich pojęć, jak: "dostatecznie długi przedział czasu ΔT ", "miara zbieżności rozwiązania $q(t)$ ". Zasady ogólne są następujące:

- przyjmuje się tak duże ΔT , aby można było stwierdzić bez wątpliwości, czy rozwiązanie narasta czy też maleje;
- w charakterze miary zbieżności rozwiązania można przyjąć odpowiednią normę wektorową, np. energetyczną. Ważne jest to, aby wybór tej normy nie miał wpływu na wyniki analizy.

Opisany sposób postępowania cechuje się wymaganą ogólnością, gdyż model aeroelastyczny może być nieliniowy – dotyczy to zarówno aerodynamiki jak i konstrukcji. Podstawowym warunkiem stosowania opisanej metody jest możliwość scałkowania równań ruchu. Jak wiadomo, metody całkowania numerycznego są obecnie dobrze rozwinięte; dotyczy to nawet bardzo złożonych układów równań o wielkich wymiarach [2,11,12]. Ograniczenia wiążą się głównie z mocą obliczeniową komputerów, a ta zwiększa się systematycznie. Można więc mieć nadzieję, że w niedalekiej przyszłości rozwiązywanie układu o wymiarze 10^7 będzie na tyle efektywne, że umożliwi to analizę aeroelastyczną złożonych zjawisk i obiektów latających.

5. Przykłady zastosowań podejścia symulacyjnego

W celu ilustracji podejścia symulacyjnego przytoczymy kilka przykładów, pochodzących z literatury, jak również rozwiązywanych przez autora niniejszego artykułu. Rys.1 (kolumna środkowa) ilustruje związki tych modeli z modelami opisanymi w paragrafie 2.

5.1. Flutter transoniczny

W cyklu prac [13÷16] przedstawiono analizę aeroelastyczną skrzydła skośnego w transonicznym zakresie prędkości. Liniowy model skrzydła zapisany jest w postaci modalnej (2.4)÷(2.5). Zastosowanie modalnego opisu ruchu skrzydła pozwala stwierdzić, które postacie są niestateczne, co może mieć znaczenie na etapie projektowania. Model aerodynamiki jest nieliniowym potencjalnym modelem małych zaburzeń, dla którego istnieje efektywna procedura numeryczna – CAP-TSD. Badano stateczność ruchu pierwszych pięciu postaci drgań skrzydła. W rezultacie otrzymano przebieg prędkości krytycznej V_{kr} w zależności od liczby Macha z

charakterystycznym "dolkiem" ("transonic dip") w pobliżu $Ma = 1$, co oznacza, że w zakresie transonicznym prędkości krytyczne flatteru są niższe niż w zakresach pod- i naddźwiękowym. Stwierdzono, że model liniowy może być stosowany tylko do $Ma = 0.96$, podczas gdy model nieliniowy pozwala na analizę w całym zakresie transonicznym. Porównanie rezultatów numerycznych z wynikami badań tunelowych pokazuje, że użycie modelu potencjalnego prowadzi do znacznych błędów w pobliżu $Ma = 1$.

Chociaż sposób wyznaczania prędkości krytycznej w cytowanych pracach jest oparty na podejściu symulacyjnym, to modele skrzydła i przepływu są tylko nieznacznie ogólniejsze w stosunku do klasycznych, a założenia potencjalności przepływu i małych zaburzeń zostały utrzymane.

W pracach [17÷18], w których również analizowano stateczność aeroelastyczną skrzydła, model aerodynamiki jest znacznie bardziej zaawansowany. Autor wykorzystał model Eulera z ruchomą siatką różnicową, której kształt jest zdefiniowany przez ruch skrzydła. Przyjęto liniowy, modalny opis dynamiki skrzydła. Uzyskano znaczną, bo 15% poprawę dokładności oszacowania prędkości krytycznej flatteru. Stwierdzono również, że warunki początkowe nie wpływają na wyniki analizy aeroelastycznej. Prace [17÷18] stanowią więc istotne rozwinięcie prac [13÷16].

5.2. Flatter oderwania w turbinach

W pracy [19] analizowano flatter oderwania w turbinach. Założono małe drgania skrętne łopatek i w konsekwencji liniowy model z jednym stopniem swobody dla każdej łopatki, natomiast dla przepływu przyjęto nieustalony, nieściśliwy, lepki model Naviera-Stokesa zapisany w formie "funkcja prądu – wirowość". Założenie małych drgań łopatek pozwoliło przyjąć stały obszar przepływu. Warunki brzegowe dla wirowości związane z prędkością kątową drgań skrętnych łopatek. Rozwiązanie równań dla wirowości przeprowadzono metodą wirów dyskretnych, co umożliwiło wyznaczenie silnie niestacjonarnego pola przepływu, charakterystycznego dla flatteru oderwania.

Zastosowanie podejścia symulacyjnego umożliwiło prognozowanie ważnego zjawiska, polegającego na synchronizacji (w pewnym zakresie częstości) drgań łopatek i spływania wirów związanych z oderwaniem opływu. Efekt ten, obserwowany w rzeczywistości, jest niebezpieczny, gdyż amplitudy drgań łopatek są wówczas wielokrotnie większe niż wtedy gdy synchronizacja nie zachodzi. Opisana metoda pozwala przewidzieć, w jakim zakresie częstości ma miejsce synchronizacja oraz jaka jest wówczas amplituda drgań łopatek.

5.3. Analiza statyczna aeroelastyczna samolotu

W pracy [20] przedstawiono statyczną analizę aeroelastyczną projektu samolotu myśliwskiego o wysokiej manewrowości. Do opisu opływu samolotu odkształcalnego lecącego w transonicznym zakresie prędkości na dużych kątach natarcia wykorzystano uśredniony reynoldowski model Naviera–Stokesa, dla rozwiązania którego opracowano odpowiednie oprogramowanie – ENS3D (Lockheed). Zdaniem autorów pracy [20] model ten opisuje fale uderzeniowe, oraz wysoce nieustalone pole przepływu (wiry, obszary oderwania). Model konstrukcji samolotu jest liniowy, modalny lub wykorzystujący funkcje wpływu. Do opisu przepływu zastosowano ruchomą, adaptacyjną siatkę różnicową liczącą 318000 węzłów, podzieloną na bloki ("zonal-grid approach" [21]). Liczba równań modelu Naviera–Stokesa jest równa ok. 1.5 miliona. Model ten jest jednym z najbardziej zaawansowanych spośród opisanych w literaturze. Docelowo ma on służyć analizie dynamicznej szeregu zjawisk aeroelastycznych występujących w czasie manewrów, w tym często występującego wówczas buffetingu usterzenia, mającego istotny wpływ na wytrzymałość zmęczeniową tego elementu samolotu. Autorzy stwierdzają, że zasadniczą trudnością jest modelowanie turbulencji; zastosowany przez nich model Baldwina–Lomaxa nie daje zadowalających wyników.

5.4. Wyznaczenie obszaru stateczności ruchu łopat wiatraka

Przykład ten ilustruje zastosowanie podejścia symulacyjnego do wyznaczania obszarów stateczności ruchu względem kilku parametrów. Zadanie dotyczy stateczności ruchu elastycznych łopat wiatraka. Model łopaty uwzględniał nieliniowości sprężyste związane ze sprzężeniem elastycznych stopni swobody, natomiast model aerodynamiki był prostym modelem pasowym, nie uwzględniającym niestacjonarności pola przepływu w sensie Theodorsena, natomiast uwzględniał zmienne warunki opływu związane z faktem, iż łopata wiatraka porusza się w przyziemnej warstwie powietrza. Parametrami modelu były: prędkość obrotowa wiatraka Ω oraz gradient prędkości wiatru w warstwie przyziemnej G_v . Badano kolejno stateczność ruchu względem jednego z parametrów przy ustalonej wartości drugiego. W taki sposób można otrzymać przybliżony obszar stateczności ruchu ustalonego łopaty wiatraka. Koszt obliczeń przy wyznaczaniu stateczności aeroelastycznej względem wielu parametrów jest zależny wykładniczo od ich liczby.

Należy dodać, że opisane podejście stanowi naturalne rozszerzenie metody opisanej w pracach [22÷23], gdzie do analizy stateczności zastosowano metodę Floqueta z macierzą monodromii otrzymaną poprzez selektywną linearyzację równań modelu. Sposób ten wiąże się ze znacznymi komplikacjami algorytmicznymi, których uniknięto stosując podejście symulacyjne. Koszty obliczeń były porówny-

walne.

5.5. Wyznaczanie krytycznej liczby Rayleigha w zadaniu konwekcji swobodnej

Za pomocą podejścia symulacyjnego autor niniejszego artykułu rozwiązywał w przeszłości zadanie "nielotnicze", dotyczące stacjonarnej konwekcji swobodnej w cieczy nieściśliwej znajdującej się w naczyniu podgrzewanym od dołu ("garnek z wodą na kuchence"), tzw. zagadnienie Benarda. Należało wyznaczyć krytyczną wartość liczby Rayleigha, związanej z gradientem temperatury, powyżej której występuje ustalona konwekcja swobodna cieczy. Model przepływu był nieściśliwym modelem Naviera-Stokesa z poprawką Bousinesqa dla konwekcji grawitacyjnej [24]. Krytyczną wartość liczby Rayleigha wyznaczono rozwiązując stacjonarne równania Naviera-Stokesa metodą Newtona przy nieznacznie zaburzonych warunkach brzegowych w chwili startu procedury iteracyjnej. Ruch cieczy wywołany tym zaburzeniem zanikał dla podkrytycznych liczb Rayleigha, $Ra < 1707$, natomiast dla wartości nadkrytycznych uzyskiwało się konwekcję stacjonarną. Przykład ten pokazuje, że metody symulacyjne mogą być używane także do analizy stateczności zagadnień stacjonarnych.

6. Problemy związane z podejściem symulacyjnym

Zaprezentowane przykłady ilustrują dobitnie moc podejścia symulacyjnego. Zachodzi pytanie, jakie trudności wiążą się z jego stosowaniem. Ogólnie można je podzielić na trudności modelowania i problemy numeryczne. Oto krótkie omówienie najważniejszych z nich:

- *potrzeba poszukiwania modeli "optymalnych"*

Niewystarczająca moc obliczeniowa komputerów zmusza do poszukiwania modeli optymalnych, to znaczy takich, które poprawnie opisują fizykę zjawiska i jednocześnie są maksymalnie uproszczone pod względem matematycznym. Przykłady przedstawione w p.5 ilustrują tę tendencję. Charakterystyczne dla takich modeli jest użycie postaci własnych do opisu ruchu konstrukcji. Pozwala to na znaczne zmniejszenie wymiaru zadania, gdyż równania (2.1) są zastąpione układem kilku równań modalnych (3.2).

- *trudności modelowania turbulencji*

Najwięcej kłopotów sprawia modelowanie turbulencji. Można powiedzieć, że jest ona piętą achillesową aerodynamiki [2,25,26] a szerzej – całej mechaniki płynów. Powszechnie stosowane modele oparte na uśrednionych równaniach

Naviera–Stokesa–Reynoldsa okazują się niewystarczające [2,20]. Spotyka się jednak pogląd, że zwykły model Naviera–Stokesa prawidłowo opisuje turbulencję o ile siatka różnicowa użyta do opisu pola przepływu będzie odpowiednio gęsta. Kłopot w tym, że prowadzi to do olbrzymich wymiarów zadania numerycznego, rzędu 10^7 którego rozwiązanie leży na razie poza zasięgiem komputerów.

- *opis geometrii obiektu i pola przepływu*

Ważnym problemem przy rozwiązywaniu złożonych zadań aeroelastyczności jest opis skomplikowanych i zmiennych w czasie kształtów obiektu oraz pola przepływu. Definiowanie siatek różnicowych dla takich obszarów wiąże się z koniecznością użycia specjalizowanych systemów CAD, co z kolei stawia wysokie wymagania komputerom oraz oprogramowaniu. Żądanie wielokrotnego generowania siatki dodatkowo utrudnia zadanie. Stosowane obecnie metody dyskretyzacji zadań przepływowych, takie jak np. metoda objętości skończonych, będąca odmianą metody różnic skończonych, wykorzystują krzywoliniowe siatki ortogonalne. Narzuca to pewne ograniczenia geometryczne zmuszając do zastosowania specjalnych metod, na przykład tzw. zonal-grid [20,21].

- *niestabilności numeryczne*

Istnieje ryzyko, że "rozwiązanie numeryczne" nie jest poprawne fizycznie. Jest to szczególnie ważne w przypadku badania stateczności ruchu, gdyż należy się ustrzec przed sytuacją, w której niestabilność numeryczna byłaby zinterpretowana jako niestateczność fizyczna. Prosty przykład jest rozwiązanie równania $\dot{y} = -cy$, $y(0) = 1$, za pomocą metody trapezów. Rozwiązaniem ścisłym jest funkcja $y(t) = \exp(-ct)$, natomiast rozwiązanie numeryczne ma postać $z(t_i) = z_0(1 - c\Delta t)^i$ i jest rozbieżne dla kroku całkowania $\Delta t > 1/c$. Jest to najprostszy przykład niestabilności metody całkowania. Problem jest poważny, gdyż uzasadnienie poprawności rozwiązania numerycznego na drodze teoretycznej nie jest zazwyczaj możliwe dla bardziej skomplikowanych modeli. Wynika stąd wniosek, że do całkowania równań ruchu należy używać metod stabilnych, z bieżącą kontrolą dokładności poprzez odpowiedni wybór długości kroku całkowania. Pozwala to w pewnym stopniu zabezpieczyć się przed skutkami efektów numerycznych. Ze względu na wielkie wymiary zadań oraz ich złe uwarunkowanie ("sztywność") konieczne jest zazwyczaj użycie wyspecjalizowanych metod całkowania, takich jak: metoda Newmarka dla równań ruchu konstrukcji (ze względu na występowanie pochodnych drugiego rzędu względem czasu) [27], oraz metody typu ADI [28], LBI [29], ILU [30,31] dla równań przepływu. Metody powyższe są dla rozważanych zadań znacznie bardziej efektywne niż metody ogólne, takie jak np. metoda Geara [32].

- *całkowanie równań danych w postaci niestandardowej*

Większość procedur całkujących układy równań różniczkowych zwyczajnych wymaga ich standardowej postaci, w której równania te są rozwikłane względem

najwyższej pochodnej:

$$\frac{d^n q}{dt^n} = F\left(t, q, \frac{dq}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}}\right). \quad (6.1)$$

Procedury te żądają obliczenia wartości najwyższych pochodnych dla danych: t , q oraz pochodnych do rzędu $n - 1$ włącznie. Jeżeli więc model zagadnienia ma właśnie taką postać, to użycie standardowych procedur całkujących nie przedstawia trudności. Jednakże często spotyka się modele, które są bardziej złożone. Mogą to być np. równania całkowo-różniczkowe, różniczkowo-algebraiczne, lub nierozwikływalne analitycznie względem najwyższych pochodnych.

Przykładem modelu całkowo-różniczkowego jest klasyczny model flatteru o dwu stopniach swobody z aerodynamiką potencjalną uwzględniającą wpływ śladu wirowego [1]. Trudność polega na tym, że najwyższe pochodne występują pod znakiem całki, co uniemożliwia analityczne sprowadzenie modelu do postaci standardowej (6.1). Można to zrobić w sposób przybliżony, aproksymując najwyższe pochodne w rozważanym przedziale całkowania $(t, t + \Delta t)$ np. za pomocą wielomianu odpowiedniego stopnia, co pozwala na analityczne obliczenie całki w tym przedziale i w rezultacie sprowadzenie zadania do postaci standardowej. Należy podkreślić, że aproksymacja wielomianem odpowiedniego stopnia nie wprowadza błędów większych niż procedura całkująca, gdyż każda z nich również zakłada wielomianową aproksymację funkcji niewiadomych [32].

Innym problemem związanym z całkowaniem zagadnień całkowo-różniczkowych jest konieczność pamiętania całej historii ruchu. Wydłuża to znacznie czas obliczeń i obciąża pamięć komputera powodując, że dla bardzo długich przedziałów czasu całkowanie staje się nieefektywne.

Przykładem modelu różniczkowo-algebraicznego jest dyskretna wersja równań Naviera-Stokesa lub Eulera dla przepływu nieściśliwego. Równania pędu i energii mają wprawdzie postać standardową, lecz równanie ciągłości, $\text{div}(v) = 0$ staje się po dyskretyzacji równaniem algebraicznym, nie zawierającym pochodnej czasowej. Model dyskretny ma więc postać układu równań różniczkowych i algebraicznych:

$$\frac{dq}{dt} = G(q), \quad F(q) = 0. \quad (6.2)$$

Rozwiązywanie takich modeli, choć ostatnio znacznie rozwinięte, jest nadal sporym problemem. Stosuje się różne sposoby uwzględniania warunku $F(q) = 0$, na przykład za pomocą funkcji kary [34,35].

Najmniej zbadaną klasą modeli są te, których nie można analitycznie rozwikłać względem najwyższych pochodnych:

$$G\left(t, q, \frac{dq}{dt}, \dots, \frac{d^n q}{dt^n}\right) = 0. \quad (6.3)$$

Przykładami modeli tego typu są: półempiryczny model flatteru oderwania [36] oraz nieliniowy model łopaty wiatraka [22,23]. Jeżeli funkcja G jest lokalnie rozwikływalna względem najwyższej pochodnej, to wyznaczenie jej wartości może być dokonane za pomocą odpowiedniej procedury iteracyjnej, np. Newtona, poprzez rozwiązanie układu równań nieliniowych (6.3). Postępowanie takie jest oczywiście kosztowne, szczególnie gdy wymiar zadania jest duży. Istnieje również niebezpieczeństwo, że całkowanie równań ulegnie załamaniu na skutek niezbieżności procedury iteracyjnej.

Pomimo trudności opisanych powyżej można stwierdzić, że podejście symulacyjne jest często skuteczne nawet dla takich zadań. Należy bowiem pamiętać, że podejście klasyczne zwykle nie może być wówczas w ogóle zastosowane.

7. Praktyczne kryteria oceny stateczności ruchu

W podejściu klasycznym jako kryterium stateczności ruchu przyjmuje się znak części urojonej częstości drań ω . W podejściu symulacyjnym kryteria stateczności ruchu oparte są na pewnych charakterystykach konkretnego rozwiązania numerycznego.

• *Kryteria oparte na wartościach amplitud* polegają na ocenie zmian uśrednionych wartości amplitud maksymalnych:

$$h_{tr}^M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h_{max}(i), \quad (7.1)$$

gdzie $h_{max}(i)$ jest kolejną wartością maksimum lokalnego, a M – liczbą maksimum względem których dokonuje się uśrednienia. Liczba ta nie powinna być zbyt mała aby fluktuacje wartości średniej nie utrudniały oceny. Wadą tego sposobu jest konieczność wyznaczania maksimum lokalnych, co może być kłopotliwe w przypadku, gdy ruch ma charakter nieregularny.

• *Kryterium oparte na ocenie zmian energii mechanicznej obiektu* polega na badaniu przebiegu zmian całkowitej energii mechanicznej:

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t), \quad (7.2)$$

gdzie $E_k(t)$ – energia kinetyczna, $E_p(t)$ – energia potencjalna. Obliczenie energii mechanicznej nie przedstawia większych trudności nawet dla złożonych układów; nie wymaga przy tym specjalnych zabiegów numerycznych. Przykładowo, dla obiektu opisanego macierzowym modelem liniowym (2.7) jest ona równa:

$$E(t) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^N)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^N + \frac{1}{2} (\mathbf{u}^N)^T \mathbf{K} \mathbf{u}^N. \quad (7.3)$$

Mając przebieg zmian energii w czasie można niewielkim kosztem oceniać na bieżąco kierunek jej zmian długookresowych, np. za pomocą standardowych metod analizy sygnałów [37], lub poprzez uśrednienie typu (7.1) w celu eliminacji zmian krótkookresowych. Najważniejszą zaletą kryterium energetycznego jest to, że pozwala ono na ocenę globalną stateczności za pomocą pojedynczej wielkości skalarnej. Jeżeli zdefiniuje się energię dla każdego stopnia swobody oddzielnie, można analizować stateczność ruchu poszczególnych stopni swobody: ewentualna niestateczność chociaż jednego z nich świadczy o niestateczności ruchu [14].

Wadą kryterium energetycznego jest to, że nie daje ono możliwości zdefiniowania monotonicznej funkcji parametru względem którego bada się stateczność. Wprawdzie znak zmian energii jest zwykle dobrze określony, co pozwala na stosunkowo dokładne wyznaczenia wartości parametru krytycznego, to jednak zależność $E(V)$ nie jest monotoniczna w pobliżu V_{kr} , co utrudnia zastosowanie do jej wyznaczenia metody aproksymacyjnej opisanej w pracy [33].

• *Kryterium oparte na wartości współczynnika wzrostu wykładniczego η* , zaproponowane zostało w pracach [14,15]. Współczynnik ten może być wyznaczony dla każdego stopnia swobody oddzielnie przy założeniu, że ruch ma charakter oscylacyjny, tj. może być przedstawiony w postaci:

$$u(t) = U_0 \exp(\eta t) \sin(\omega t + \varphi), \quad (7.4)$$

Porównując wyniki całkowania numerycznego $\bar{u}(t_j)$ otrzymane dla chwil t_j z wartościami obliczonymi ze wzoru (7.4), można dokonać identyfikacji parametrów U_0 , η , ω oraz φ za pomocą metod identyfikacji parametrycznej [38] minimalizując wskaźnik jakości postaci:

$$J(U_0, \eta, \omega, \varphi) = \sum_{j=1}^{N_t} \left[\bar{u}(t_j) - U_0 \exp(\eta t_j) \sin(\omega t_j + \varphi) \right]^2, \quad (7.5)$$

gdzie N_t – liczba próbek rozwiązania numerycznego.

Najważniejszą zaletą powyższego kryterium jest to, że współczynnik wzrostu wykładniczego η jest zwykle w pobliżu wartości krytycznej V_{kr} monotoniczną funkcją parametru względem którego bada się stateczność. Pozwala to na precyzyjne wyznaczenie V_{kr} za pomocą metody aproksymacyjnej [33]. Kryterium powyższe ma jednak parę wad:

- wartość η zależy w dużym stopniu od tego na ile rozwiązanie równań modelu jest zbliżone do funkcji (7.4). W przypadku większych odchyień wyniki identyfikacji mogą być całkowicie zafałszowane;
- liczba próbek N_t nie może być mała, gdyż prowadzi to do zafałszowania wartości identyfikowanego parametru. Jest to istotne w pobliżu krytycznej wartości parametru, gdyż może spowodować błędne określenie znaku η [33];
- identyfikacja parametryczna jest stosunkowo kosztowna i wymagająca dość złożonego oprogramowania. Utrudnia to znacznie prowadzenie analizy na bieżąco, w trakcie całkowania równań ruchu.

• *Kryterium oparte na macierzowych równaniach wariacyjnych.* Równania wariacyjne układu $\dot{x} = f(t, x)$ zdefiniowane są jako:

$$\dot{X} = J_x(t, x)X, \quad X(0) = I, \quad (7.6)$$

przy czym $J_x(t, x)$ jest jacobianem wektora $f(t, x)$, czyli macierzą, na ogół niesymetryczną. O stateczności rozwiązania $x(t)$ wnioskuje się na podstawie wartości własnych $\mu_j(t)$ macierzy $X(t)$; jeżeli wszystkie wykładniki Lapunowa:

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln |\mu_j(t)|, \quad (7.7)$$

są ujemne, to ruch jest stateczny. Zaletą takiego podejścia jest to, że badanie stateczności układu nieliniowego zostało sprowadzone do badania stateczności układu liniowego jednorodnego z macierzą zmienną, którego teoria jest dobrze opracowana [39]. Podejście to ma jednak wady, które wręcz uniemożliwiają jego zastosowanie do badania stateczności aeroelastycznej dużych układów:

- konieczność obliczania jacobianu,
- konieczność całkowania N^2 równań różniczkowych, co dla dużych wymiarów ($N > 100$) czyni metodę całkowicie nieprzydatną,
- konieczność wyznaczania wszystkich wartości własnych macierzy niesymetrycznej,
- praktyczne wyznaczanie wykładników Lapunowa (7.7) nie jest w pełni rozwiązane, prowadzone są jednak prace w tym kierunku [40].

8. Ocena przydatności podejścia symulacyjnego

W świetle przykładów i uwag przytoczonych w poprzednich paragrafach można stwierdzić, że podejście symulacyjne może być użyteczne w procesie projektowania konstrukcji lotniczych, o ile modele obiektu i przepływu są starannie dobrane.

Wybór odpowiednich modeli jest w dużej mierze sztuką, a na pewno wymaga dużego doświadczenia od realizatora zadania. Jeśli jednak modele zostały wybrane poprawnie, użycie metody symulacyjnej daje na ogół bardzo dobre wyniki. Nie wydaje się natomiast możliwe (na obecnym etapie badań) użycie modeli najogólniejszych, gdyż prowadzi to do zadania o zbyt wielkich wymiarach.

W świetle rozważań przedstawionych w p.6 jest oczywiste, że podejście symulacyjne narzuca wysokie wymagania komputerom. Ocenia się, że efektywne rozwiązywanie zadań aeroelastyczności za pomocą podejścia symulacyjnego wymaga zwiększenia ich mocy obliczeniowej o 2-3 rzędy wielkości. Jest to dużo, jednakże wydaje się, iż może to być osiągnięte biorąc pod uwagę dotychczasową dynamikę rozwoju komputerów.

Ze względu na wysoką złożoność obliczeniową podejście symulacyjne nie jest konkurencyjne dla tradycyjnych metod wówczas, gdy chodzi o szybką, przybliżoną ocenę prędkości krytycznej flatteru lub w zadaniach dotyczących syntezy układów czynnego przeciwdziałania flatterowi [41]. Wynika stąd, że metody klasyczne na pewno nie zostaną wyparte całkowicie, można się jednak spodziewać zaniechania użycia metod klasycznych dla zadań bardziej złożonych, nawet takich, dla których model liniowy jest odpowiedni. Wynika to z faktu, że całkowanie układów równań różniczkowych zwyczajnych jest znacznie tańsze niż rozwiązywanie wielkiego, zespolonego zagadnienia własnego [42].

Głównym obszarem zastosowań podejścia symulacyjnego będą z pewnością zagadnienia silnie nieliniowe, dla których jest ono bezkonkurencyjne. W świetle przedstawionych faktów wydaje się, że znaczenie podejścia symulacyjnego będzie rosło.

9. Wnioski

Przedstawione rozważania prowadzą do następujących konkluzji.

1. Podejście symulacyjne, w przeciwieństwie do klasycznego, nie narzuca ograniczeń na żadne elementy modelu aeroelastycznego.
2. Symulacyjna analiza stateczności aeroelastycznej stanowi cenne narzędzie badania zjawisk nieliniowych, które nie mogą być analizowane za pomocą podejścia klasycznego, takich jak flatter oderwania, flatter transoniczny, buffeting, buzz.
3. Możliwość użycia podejścia symulacyjnego zależy od starannego wyboru modeli konstrukcji i przepływu, gdyż należy liczyć się z ograniczoną mocą obliczeniową komputerów.

4. Najpoważniejszym problemem jest modelowanie turbulencji; istniejące modele są niewystarczające.
5. Należy mieć na uwadze konieczność weryfikacji poprawności rozwiązań numerycznych, aby uniknąć błędnej interpretacji niestabilności numerycznej jako niestateczności fizycznej.
6. Podejście symulacyjne nie zastąpi klasycznego w niektórych zastosowaniach, takich jak na przykład synteza układów czynnego przeciwdziałania flatterowi.
7. Stały rozwój komputerów i oprogramowania pozwala żywić nadzieję, że w zakres problemów aeroelastycznych, które mogą być analizowane, będzie się stale rozszerzał.

Literatura

1. BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., HALFMAN R.L., 1955, *Aeroelasticity*, Addison-Wesley
2. KUTLER P., 1985, *A Perspective of Theoretical and Applied Computational Fluid Dynamics*, AIAA Journal, 23, 328-341
3. BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., 1962, *Principles of Aeroelasticity*, J.Wiley
4. HESS J.L., SMITH A.M.O., 1967, *Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies*, Progress in Aeronautical Science, 8
5. HESS J.L., 1986, *Review of the Source Panel Technique for Flow Computation*, in Innovative Numerical Methods in Engineering, ed. R.P. Shaw, Springer
6. FUNG Y.C., 1955, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Wiley
7. FORSCHING H.W., 1974, *Grundlagen der Aeroelastik*, Springer
8. DOWELL E.A. i INNI., 1978, *A Modern Course in Aeroelasticity*
9. SARMA B.S., VARADAN T.K., 1988, *Nonlinear Panel Flutter by Finite Element Method*, AIAA Journal, 26, 5, 566-574
10. GRAY C.E., MEI CH., SHORE C.P., 1991, *Finite Element Method for Large-Amplitude Two-Dimensional Panel Flutter at Hypersonic Speeds*, AIAA Journal, 29, 2, 290-297
11. JAMESON A., 1983, *The Evolution of Computational Methods in Aerodynamics*, Transaction of the ASME, 50, 1052-1070
12. TURKEL E., 1980, *Numerical Methods for Large-Scale Time-Dependent Partial Differential Equations*, In Kollmann W. (ed.) Computational Fluid Dynamics, vol II, McGraw-Hill
13. BATINA J.T., YANG T.Y., 1984, *Application of Transonic Codes to Aeroelastic Modeling of Airfoils Including Active Controls*, Journal of Aircraft, 21, 8, 623-630
14. CUNNINGHAM H.J., BATINA J.T., BENNET R.M., 1988, *Modern Wing-Flutter Analysis by Computational Fluid Dynamics Methods*, Journal of Aircraft, 25, 10, 962-968

15. BENNET R.M., BATINA J.T., CUNNINGHAM H.J., 1989, *Wing-Flutter Calculations with the CAP-TSD Unsteady Transonic Small-Disturbance Program*, Journal of Aircraft, 26, 9, 876-882
16. RAUSCH R.D., BATINA J.T., YANG H.T.Y., 1990, *Euler Flutter Analysis of Airfoils Using Unstructured Dynamic Meshes*, Journal of Aircraft, 27, 5, 436-443
17. GURUSWAMY G.P., GOORJIAN P.M., 1988, *Unsteady Transonic Aerodynamics and Aeroelastic Calculations at Low-Supersonic Freestreams*, Journal of Aircraft, 25, 10, 955-961
18. GURUSWAMY G.P., 1990, *Unsteady Aerodynamic and Aeroelastic Calculations for Wings Using Euler Equations*, AIAA Journal, 28, 3, 461-469
19. SISTO F., THANGAM S., ABDEL-RAHIM A., 1991, *Computational Prediction of Stall Flutter in Cascades of Airfoils*, AIAA Journal, 29, 7, 1161-1167
20. SCHUSTER D.M., VADYAK J., ATTA E., 1989, *Static Aeroelastic Analysis of Fighter Aircraft Using a Three-Dimensional Navier-Stokes Algorithm*, Journal of Aircraft, 27, 9, 820-825
21. FLORES J.L., REZNICK S.G., HOLST T.L., GUNDY K., 1988, *Transonic Navier-Stokes Solutions for a Fighter-Like Configuration*, Journal of Aircraft, 25, 875-881
22. FRIEDMANN P.P., 1979, *Aeroelastic Stability and Response of Horizontal Axis Wind Turbine Blades*, AIAA Journal, p.1381
23. DUL F., PIETRUCHA J., 1983, *Technika modelowania łopaty silnika wiatrowego pod kątem analizy aeroelastycznej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Nr 13, Rzeszów
24. VAN STEEG J.G., WESSELING P., 1978, *Solution of the Boussinesq Equations by Means of the Finite Element Method*, Comp.Fluids, 6, 93-101
25. CHAPMAN D.R., 1981, *Trends and Pacing Items in Computational Aerodynamics*, in Reynolds W.C., McCormack R.W. (eds), *Seventh International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, 141, Springer-Verlag
26. ELSNER J.W., 1987, *Turbulencja przepływów*, PWN, Warszawa
27. BATHE K.J., WILSON E.L., 1976, *Numerical Method in Finite Element Analysis*, Prentice Hall
28. BEAM R.M., WARMING R.F., 1976, *An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation-Law Form*, Journal of Computational Physics, 22, 87-110
29. BRILEY W.R., McDONALD H., 1980, *On the Structure and Use of Linearized Block Implicit Schemes*, Journal of Computational Physics, 34, 54-73
30. JAMESON A., TURKEL E., 1981, *Implicit Schemes and LU Decompositions*, Mathematics of Computations, 37, 156, 385-397
31. MACCORMACK R.W., 1982, *A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow*, AIAA Journal, 20, 9, 1275-1281
32. KRUPOWICZ R., 1986, *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa
33. DUL F.A., 1992, *Analiza flatterowa skrzydła opisanego modelem całkowo-różniczkowym za pomocą metody symulacyjnej*, V Konferencja Mechanika w Lotnictwie, Warszawa

34. HUGHES T.J.R., LIU W.K., BROOKS A., 1979, *Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation*, Journal of Computational Physics, 30, 1-60
35. BERCOVIER M., ENGELMAN M., 1979, *A Finite Element for the Numerical Solution of Viscous Incompressible Flows*, Journal of Computational Physics, 30, 181-201
36. BERGH H., VAN DER WEKKEN A.J.P., 1987, *Comparison Between Measured and Calculated Stall-Flutter Behaviour of a One-Bladed Model Rotor*, Vertica, 11, 447-456
37. OTNES R.K., ENOCHSON L., 1978, *Analiza numeryczna szeregów czasowych*, PWN
38. MAŃCZAK K., NAHORSKI Z., 1983, *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*, PWN Warszawa
39. GUTOWSKI R., 1971, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT Warszawa
40. PARKER T.S., CHUA L.O., 1989, *Practical Numerical Algorithm for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, New York
41. OHTA H., FUJIMORI A., NIKIFORUK P.N, GUPTA M.M., 1989, *Active Flutter Suppression for Two-Dimensional Airfoils*, Journal of Guidance, 12, 188-194
42. KERNER W., 1989, *Large-Scale Complex Eigenvalue Problems*, Journal of Computational Physics, 85, 1-89

ANALIZA FLATTEROWA SKRZYDŁA OPISANEGO MODELEM CAŁKOWO-RÓŻNICZKOWYM ZA POMOCĄ METODY SYMULACYJNEJ¹

FRANCISZEK A. DUL

Politechnika Warszawska

W artykule przedstawiono porównanie wyników analizy flutterowej skrzydła, opisanego liniowym modelem całkowo-różniczkowym o dwu stopniach swobody, uzyskanych za pomocą analizy klasycznej (metoda $V-g$ i wzory Pinesa) oraz podejścia symulacyjnego, polegającego na analizie *a posteriori* numerycznych rozwiązań sprzężonych równań ruchu skrzydła i przepływu [1].

W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania prędkości krytycznej flutteru metodą symulacyjną oraz zilustrowano wynikami obliczeń główne problemy związane z prezentowanym podejściem, takie jak: kryteria oceny stateczności ruchu, identyfikacja stanów krytycznych, badanie stateczności względem zbioru parametrów.

Wyniki otrzymane za pomocą metody symulacyjnej są całkowicie zgodne z wynikami uzyskanymi ze wzorów Pinesa (z aerodynamiką ustaloną) – różnica prędkości krytycznej flutteru jest rzędu 0.1%. W przypadku modelu z aerodynamiką nieustaloną wyniki są również zbliżone. W celu ilustracji możliwości metody symulacyjnej przedstawiono także analizę skrzydła z nieliniową sprężystością giętą.

1. Wstęp

W ostatnim okresie daje się zauważyć wzrost zainteresowania nowym sposobem badania stateczności złożonych zjawisk aeroelastycznych, które nie mogą być analizowane metodami opartymi na badaniu ruchu harmonicznego [1]. Podejście to, zwane dalej symulacyjnym, polega na numerycznym badaniu zależności charakteru rozwiązań od wartości parametrów modelu. Przez charakter rozwiązania rozumie się jego zachowanie w czasie: zanikanie, stabilizację lub nieograniczony wzrost. Najważniejszą zaletą nowego podejścia jest całkowita ogólność, pozwalająca analizować stateczność tych zjawisk aeroelastycznych, które nie mogą być opisane modelem liniowym, np. flutter oderwania, buzz, buffeting [1].

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

W niniejszym artykule podjęto próbę porównania wyników uzyskiwanych metodami klasycznymi i symulacyjnymi. Analizowany będzie klasyczny model aeroelastyczny – profil o dwu stopniach swobody opływany płynem nieściśliwym i nielepkim. Porównane będą trzy modele klasyczne: Pinesa, w którym zakłada się ustalone obciążenia aerodynamiczne, Theodorsena, w którym uwzględnia się harmoniczną historię ruchu – wpływ śladu wirowego, oraz ogólny, z dowolną historią ruchu. W celu zaprezentowania możliwości podejścia symulacyjnego przedstawiona będzie także analiza stateczności modelu ze sprężystością nieliniową typu Duffinga.

W oparciu o uzyskane rezultaty przedyskutowane będą ponadto różne aspekty stosowania podejścia symulacyjnego, takie jak: identyfikacja stanów krytycznych, kryteria stateczności oraz badanie stateczności względem zbioru parametrów.

2. Algorytm metody symulacyjnej badania stateczności aeroelastycznej

Jak już wspomniano we wstępie, nieliniowe zjawiska aeroelastyczne można analizować za pomocą metod symulacyjnych, które nie narzucają zasadniczych ograniczeń na model. Ogólny algorytm podejścia symulacyjnego jest następujący. Załóżmy, że należy wyznaczyć stateczność ruchu obiektu opisanego modelem różniczkowym postaci:

$$B(V_\infty)\dot{q} + C(q; V_\infty) = f(V_\infty), \quad q(0) = q_0, \quad (2.1)$$

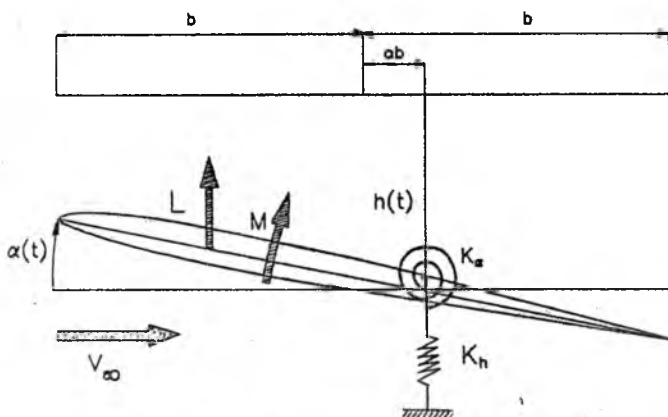
względem parametru V_∞ , który może być np. prędkością lotu. Algorytm wyznaczania krytycznej wartości parametru V_{kr} metodą symulacyjną ma postać:

- a) wstępne poszukiwanie przedziału zawierającego V_{kr}
 - 1) założyć $V^0 \approx 0$, ΔV , tol , ΔT , q_0 ; $i = 0$;
 - 2) scałkować równania modelu (2.1) w przedziale czasu ΔT ;
 - 3) jeżeli rozwiązanie jest stabilne, to $i = i + 1$, $V^i := V^{i-1} + \Delta V$, przejść do kroku 2;
- b) zawężanie przedziału metodą bisekcji
 - 4) $V_a = V^{i-1}$, $V_b = V^i$;
 - 5) jeżeli $V_b - V_a < tol$ STOP; $V = (V_a + V_b)/2$;
 - 6) scałkować równania modelu (2.1) w przedziale czasu ΔT ;
 - 7) jeżeli rozwiązanie jest stabilne, to $V_a = V$, przejść do kroku 5;
 - 8) jeżeli rozwiązanie nie jest stabilne, to $V_b = V$, przejść do kroku 5;

Zasady wyboru ΔT oraz kryteria oceny charakteru ruchu zostały omówione w artykule [1].

Opisany sposób postępowania cechuje się ogólnością, gdyż model aeroelastyczny może być nieliniowy – dotyczy to zarówno aerodynamiki jak i konstrukcji. Podstawowym warunkiem stosowania opisanej metody jest możliwość całkowania numerycznego równań ruchu. Nie jest to żądanie szczególnie trudne do spełnienia w przypadku, gdy model zjawiska ma umiarkowany wymiar i "czystą" postać różniczkową. Problemy pojawiają się wówczas, gdy wymiar zadania jest wielki, rzędu 10^4 równań, lub gdy model ma charakter mieszany, np. różniczkowo-całkowy, różniczkowo-algebraiczny, a w końcu gdy równania modelu nie są rozwiązywalne analitycznie względem najwyższych pochodnych. Kwestie te zostały omówione w artykule [1].

3. Modele flutteru o dwu stopniach swobody



Rys. 1. Model półsztywny skrzydła – oznaczenia

Klasyczny, liniowy model aeroelastyczny o dwu stopniach swobody, tzw. model półsztywny, może opisywać skrzydło o niezbyt małym wydłużeniu. Otrzymuje się go przy założeniach: małych drgań giętnych i skrętnych profilu, potencjalności i małych zaburzeniach pola przepływu, istnienia śladu wirowego spływającego z krawędzi spływu, który oddziałuje na profil. Założenie małych drgań profilu umożliwia przyjęcie stałego obszaru przepływu wraz z liniowymi warunkami brzegowymi wiążącymi prędkości punktów profilu z prędkością płynu. Umożliwia to wyprowadzenie w postaci zamkniętej wzorów dla siły nośnej i momentu aerodynamicznego działających na profil. Model ma więc następującą postać [2,3] (rys.1):

$$m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h h = -L(t, \dot{h}, \ddot{h}, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}; V_\infty),$$

(3.1)

$$S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \dot{\alpha} = M(t, \dot{h}, \ddot{h}, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}; V_\infty),$$

gdzie:

- $h(t)$ – wychylenie profilu z położenia równowagi,
- $\alpha(t)$ – kąt skręcenia profilu,
- m – masa jednostki długości skrzydła,
- S_α – moment statyczny jednostki długości skrzydła,
- I_α – masowy moment bezwładności jednostki długości skrzydła,
- K_h, K_α – sztywności: giętne i skrętne skrzydła,
- L – siła nośna,
- M – moment aerodynamiczny,
- V_∞ – prędkość opływu niezaburzonego.

Warunki początkowe mają postać:

$$\begin{aligned} h(0) &= h_0, & \dot{h}(0) &= \dot{h}_0, \\ \alpha(0) &= \alpha_0, & \dot{\alpha}(0) &= \dot{\alpha}_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wzory ogólne dla siły nośnej i momentu aerodynamicznego, słuszne dla dowolnego ruchu profilu dane są zależnościami [3]:

$$\begin{aligned} L(\tau) &= 2\pi\rho_\infty b V_\infty \left[\dot{h}_0 + V_\infty \alpha_0 + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \dot{\alpha}_0 \right] \Phi(\tau) + \pi\rho_\infty b^2 (\ddot{h} - ab\ddot{\alpha} + V_\infty \dot{\alpha}) + \\ &+ 2\pi\rho_\infty b^2 \int_0^\tau \Phi(\tau - s) \left[V_\infty \dot{\alpha}(s) + \ddot{h}(s) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \ddot{\alpha}(s) \right] ds, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} M(\tau) &= 2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \pi\rho_\infty b^2 V_\infty \left[\dot{h}_0 + V_\infty \alpha_0 + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \dot{\alpha}_0 \right] \Phi(\tau) + \\ &+ \pi\rho_\infty ab^3 (\ddot{h} - ab\ddot{\alpha}) - \left(\frac{1}{2} - a \right) \pi\rho_\infty b^3 V_\infty \dot{\alpha} - \frac{1}{8} \pi\rho_\infty b^4 \ddot{\alpha} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} + a \right) 2\pi\rho_\infty b^3 \int_0^\tau \Phi(\tau - s) \left[V_\infty \dot{\alpha}(s) + \ddot{h}(s) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \ddot{\alpha}(s) \right] ds, \end{aligned}$$

gdzie:

- $\Phi(\tau)$ - funkcja Wagnera,
 τ - czas bezwymiarowy, $\tau = V_\infty t/b$,
 b - połowa cięciwy profilu,
 a - odległość środka sił poprzecznych od środka geometrycznego,
 ρ_∞ - gęstość powietrza.

Funkcja Wagnera $\Phi(\tau)$ dana jest wzorem ścisłym:

$$\Phi(\tau) = 1 - \int_0^\infty \left[(K_0(\xi) - K_1(\xi))^2 + \pi^2 (I_0(\xi) - I_1(\xi))^2 \right]^{-1} \exp(-\xi\tau) \xi^{-2} d\xi, \quad (3.4)$$

gdzie K_0, K_1, I_0, I_1 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela drugiego i pierwszego rodzaju [4]. Złożoność obliczeniowa funkcji (3.4) sprawia, że w praktyce używa się następujących aproksymacji [5]:

$$\Phi(\tau) \approx \frac{\tau + 2}{\tau + 4}, \quad (3.5)$$

$$\Phi(\tau) \approx 1 - 0.165 \exp(-0.0455\tau) - 0.335 \exp(-0.3\tau).$$

Model (3.1)÷(3.3), nazywany dalej *modelem ogólnym*, umożliwia badanie ruchu dowolnego, niekoniecznie harmonicznego.

Ze względu na występowanie funkcji niewiadomych $h(t)$ i $\alpha(t)$ pod całką, równania modelu mają charakter różniczkowo-całkowy i nie mogą być rozwiązane analitycznie dla ruchu dowolnego. Jeżeli jednak założyć się ruch harmoniczny:

$$h(t) = \bar{h} e^{i\omega t}, \quad \alpha(t) = \bar{\alpha} e^{i\omega t}, \quad (3.6)$$

gdzie:

$\bar{h}, \bar{\alpha}$ - amplitudy drgań giętnych i skrętnych,

ω - zespolona częstość drgań,

to model (3.1)÷(3.3) przyjmuje postać układu równań algebraicznych:

$$-\omega^2 m \frac{\bar{h}}{b} - \omega^2 S_\alpha \bar{\alpha} + K_h \frac{\bar{h}}{b} = \pi \rho_\infty b^3 \omega^2 \left[L_h \frac{\bar{h}}{b} + (L_\alpha - \varepsilon L_h) \bar{\alpha} \right], \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 S_\alpha \frac{\bar{h}}{b} - \omega^2 I_\alpha \bar{\alpha} + K_\alpha \bar{\alpha} = \\
 & = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \left[(M_h - \varepsilon L_h) \frac{\bar{h}}{b} + (M_\alpha - \varepsilon(L_\alpha + M_h) + \varepsilon^2 L_h) \bar{\alpha} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie:

$L_h(k), L_\alpha(k), M_h, M_\alpha(k)$ - współczynniki aerodynamiczne [6],

k - częstość zredukowana, $k = \omega b / V_\infty$, $\varepsilon = 1/2 + a$.

Model (3.7) będzie nazywany w dalszej części tej pracy *modelem Theodorsena*.

Jeżeli we wzorach dla siły nośnej i momentu aerodynamicznego (3.2) pominie się wpływ śladu wirowego oraz aerodynamicznych efektów bezwładnościowych (efekt mas dołączonych), to otrzyma się wzory postaci:

$$\begin{aligned} L(t) &= 2\pi\rho_\infty b V_\infty^2 \alpha(t), \\ M(t) &= 2\pi\rho_\infty \varepsilon b^2 V_\infty^2 \alpha(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

a równania modelu są następujące:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 m + K_h) \frac{\bar{h}}{b} + (-\omega^2 S_\alpha + 2\pi\rho_\infty b V_\infty^2) \bar{\alpha} &= 0, \\ -\omega^2 S_\alpha \frac{\bar{h}}{b} + (-\omega^2 I_\alpha + K_\alpha - 2\pi\rho_\infty \varepsilon b V_\infty^2) \bar{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Model (3.9), będzie dalej nazywany *modelem Pinesa*.

4. Wyznaczenie parametrów krytycznych flatteru – przykłady obliczeniowe

Modele: ogólny, Theodorsena oraz Pinesa zostały wykorzystane do wyznaczenia prędkości krytycznej flatteru dwu skrzydeł mających poniższe charakterystyki

Skrzydło I

$a = -0.1$, $b = 1$ m, $\rho_\infty = 0.6$ kg/m³, $m = 36.3$ kg/m, $S_\alpha = 5.0$ kgm/m, $I_\alpha = 25.0$ kgm²/m, $\omega_h = 58.2$ rad/s, $\omega_\alpha = 28.2$ rad/s.

Skrzydło II

$a = -0.15$, $b = 0.127$ m, $\rho_\infty = 1.0$ kg/m³, $\mu = 76.0$, $x_\alpha = 0.25$, $r_\alpha^2 = 0.388$, $\omega_h = 76.8$ rad/s, $\omega_\alpha = 64.1$ rad/s.

Analiza klasyczna, tak modelu Theodorsena, jak i Pinesa, polega na rozwiązaniu zagadnienia własnego:

$$[K - \omega^2 M(V_\infty)] \begin{bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}^T = 0. \quad (4.1)$$

W modelu Theodorsena macierz M zależy niejawnie (poprzez k) od parametru – prędkości lotu V_∞ . Wyznaczenie prędkości krytycznej V_{kr} dokonane zostało za pomocą metody V - g [2,3,5].

Rozwiązanie zagadnienia (4.1) dla modelu Pinesa uzyskuje się na drodze analitycznej, otrzymując tzw. reguły Pinesa oraz wzór dla prędkości krytycznej flutteru [3]:

$$V_{kr} = \sqrt{\frac{2K_{\alpha}Q_{\infty}^{min}}{4\pi b^2\rho_{\infty}}}, \quad (4.2)$$

gdzie:

$$Q_{\infty}^{min} = \min_{\mp} \left\{ \frac{(1 + \Omega^2)(\varepsilon + x_{\alpha}) - 2\varepsilon(1 - x_{\alpha}^2/r_{\alpha}^2)\Omega^2 \mp 2\sqrt{\delta}}{(\varepsilon + x_{\alpha})^2} \right\},$$

$$\delta = x_{\alpha} \left[\varepsilon + x_{\alpha} - \varepsilon\Omega^2 \left(1 - \varepsilon \frac{x_{\alpha}}{r_{\alpha}^2} \right) \right] \Omega^2 \left(1 - \frac{x_{\alpha}^2}{r_{\alpha}^2} \right),$$

$$\mu = \frac{m}{\rho_{\infty}\pi b^2}, \quad x_{\alpha} = \frac{S_{\alpha}}{mb}, \quad r_{\alpha}^2 = \frac{I_{\alpha}}{mb^2},$$

$$\Omega = \frac{\omega_h}{\omega_{\alpha}}, \quad \omega_h = \sqrt{\frac{K_h}{m}}, \quad \omega_{\alpha} = \sqrt{\frac{K_{\alpha}}{I_{\alpha}}}.$$

Całkowanie układu równań różniczkowych w podejściu symulacyjnym przeprowadzono za pomocą metody Geara [7] (procedura DGEAR biblioteki IMSL). Procedura ta posiada mechanizm automatycznego doboru długości kroku całkowania. Kryteriami oceny stateczności były: współczynnik wzrostu wykładniczego η oraz zmiana energii mechanicznej ΔE . Zrezygnowano ze ścisłej postaci funkcji Wagnera (3.4) na rzecz obu aproksymacji (3.5). Prędkości krytyczne flutteru V_{kr} oraz krytyczne częstości ω_{kr} obliczone za pomocą podejścia klasycznego oraz symulacyjnego są przedstawione w tabeli I.

W otrzymanych rezultatach zwracają uwagę następujące fakty:

- prędkości krytyczne flutteru oraz odpowiadającym częstości ω_{kr} wyznaczone za pomocą obydwu podejść różnią się minimalnie;
- w rezultacie zastosowania podejścia symulacyjnego otrzymuje się przedział zawierający prędkość krytyczną;
- wynik jakościowy (nie występowanie flutteru) uzyskany za pomocą reguł Pinesa dla skrzydła II został potwierdzony w podejściu symulacyjnym;
- wartości parametrów krytycznych zależą w pewnym stopniu od aproksymacji funkcji Wagnera przyjętej do obliczeń;
- otrzymane wartości parametrów krytycznych nie zależą od warunków początkowych, co jest zgodne z teorią stateczności układów liniowych.

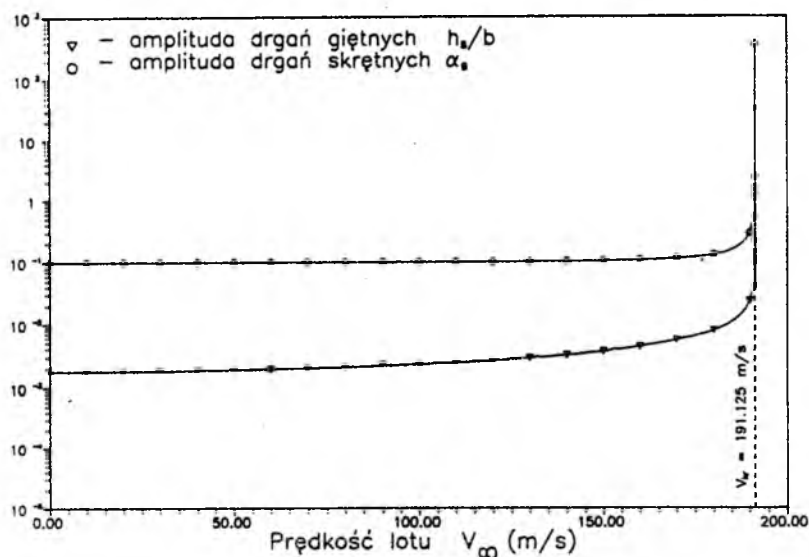
Tabela I

Podójście klasyczne	Podójście symulacyjne	Różnica
Skrzydło I		
Model Pinesa $V_{kr} = 191.25 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 25.60 \text{ rad/s}$	Model Pinesa $V_{kr} = 191.12 \pm 0.02 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 25.60 \pm 0.01 \text{ rad/s}$	0.07 % 0.01 %
Model Theodorsena $V_{kr} = 158.75 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 54.16 \text{ rad/s}$	Model ogólny, $\Phi(\tau) - (3.5)_1$ $V_{kr} = 158.29 \pm 0.02 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 54.00 \pm 0.05 \text{ rad/s}$	0.09 % 0.20 %
	Model ogólny, $\Phi(\tau) - (3.5)_2$ $V_{kr} = 158.90 \pm 0.05 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 54.12 \pm 0.02 \text{ rad/s}$	0.15 % 0.07 %
	Skrzydło II	
	Model Pinesa flutter nie wystąpi $\Omega^2 > \frac{x_p + \epsilon}{\epsilon + \epsilon^2 x_a / \tau_a^2}$	Model Pinesa flutter nie wystąpił dla $V_\infty \in [0, 300] \text{ m/s}$ —
Model Theodorsena $V_{kr} = 42.39 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 70.33 \text{ rad/s}$	Model ogólny, $\Phi(\tau) - (3.5)_1$ $V_{kr} = 42.125 \pm 0.02 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 70.29 \pm 0.01 \text{ rad/s}$	0.06 % 0.05 %
	Model ogólny, $\Phi(\tau) - (3.5)_2$ $V_{kr} = 42.40 \pm 0.02 \text{ m/s}$ $\omega_{kr} = 70.39 \pm 0.03 \text{ rad/s}$	0.01 % 0.08 %

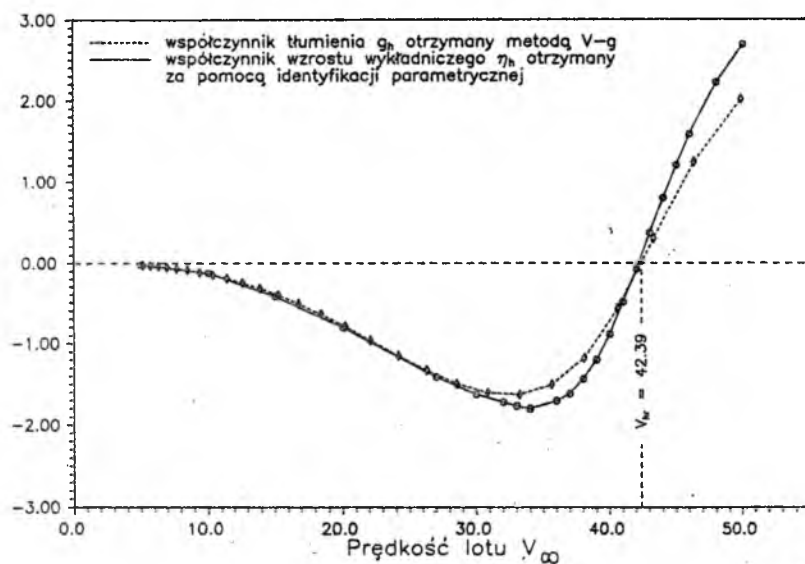
Na rys.2 przedstawiono ustalone wartości amplitud h_s i α_s w zależności od prędkości V_∞ obliczone za pomocą podejścia symulacyjnego przy wykorzystaniu modelu Pinesa. Amplitudy te zależą od warunków początkowych, ale wartość krytyczna V_{kr} jest od nich praktycznie niezależna. Obserwuje się nieznaczny, ograniczony wzrost amplitud w zakresie $(0, V_{kr})$ oraz nieograniczony wzrost powyżej V_{kr} .

Interesujące jest porównanie wartości współczynnika wzrostu wykładniczego η . W modelu Theodorsena, zgodnie z (3.6), jest on zdefiniowany jako $\eta = -\text{Im}(\omega)$. W modelu ogólnym nie występuje on jawnie, można go jednak obliczyć na podstawie rozwiązania numerycznego równań układu przy użyciu metod identyfikacji parametrycznej (por.[1]). Przebiegi obu tych współczynników w funkcji prędkości V_∞ przedstawione są na rys.3. Widać dość znaczne różnice ilościowe, jednak w pobliżu prędkości krytycznej ich wartości są prawie identyczne. Innymi słowy, wartości prędkości krytycznych wyznaczone z warunku $\eta = 0$ różnią się nieznacznie.

Jest widoczne, że w przypadku rozważanych modeli oba podejścia: klasyczne i symulacyjne dają prawie identyczne wyniki. Podobne rezultaty otrzymano dla innych zestawów danych. Nie jest to zaskakujące, jeśli się zauważy, że podejście sy-



Rys. 2. Zależność amplitud drgań giętnych i skrętnych od prędkości lotu V_∞ dla modelu Pinesa



Rys. 3. Zależność współczynników wzrostu wykładniczego od prędkości lotu V_∞ dla skrzydła II, obliczonych metodą V-g oraz za pomocą identyfikacji

mulacyjne stanowi w przypadku rozważanych zadań jedynie inną, bardziej ogólną drogę rozwiązania. Otrzymane rezultaty są interesujące dlatego, że w pewnym sensie weryfikują podejście symulacyjne, pozwalając mieć nadzieję, iż pozwoli ono na uzyskanie użytecznych rozwiązań również dla zadań o wiele bardziej złożonych, które nie mogą być rozwiązane drogą klasyczną.

5. Problemy związane z identyfikacją stanów krytycznych

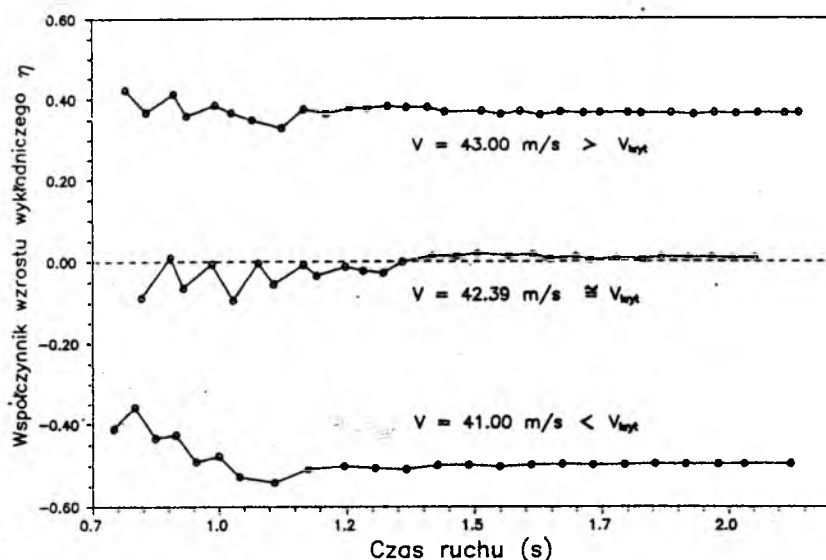
Stosowanie podejścia symulacyjnego wiąże się z pewnymi problemami, które nie występują w podejściu klasycznym. Dotyczą one precyzji, z którą można wyznaczyć wartości krytyczne parametrów. W podejściu klasycznym kryteria stateczności ruchu są "ostre" – określa je znak części urojonej częstości ω . Ponieważ wartość ω może być wyznaczona ze znaczną dokładnością (zależną głównie od uwarunkowania zadania na wartości własne), to krytyczna wartość parametru może również być wyznaczona z dużą dokładnością.

Inaczej jest w podejściu symulacyjnym. Kryteria stateczności ruchu oparte są tutaj na pewnych charakterystykach konkretnego rozwiązania numerycznego: zmiany amplitudy w czasie, zmiany energii mechanicznej obiektu w czasie, wartości współczynnika wzrostu wykładniczego η [1]. Cechą wspólną wszystkich tych kryteriów jest to, że stają się one "nieostre" w pobliżu krytycznej wartości parametru. Na rys.4 przedstawiono przebiegi współczynnika wzrostu wykładniczego η , obliczanego za pomocą metod identyfikacji parametrycznej, w zależności od prędkości V_∞ i czasu trwania ruchu skrzydła II. Jest widoczne, że w pobliżu V_{kr} znak η zmienia się wielokrotnie. Oznacza to, że ustalenie rodzaju stateczności zależy od czasu całkowania, a ściślej – liczby próbek rozwiązania użytych do identyfikacji.

Podobne trudności występują przy stosowaniu kryterium energetycznego. Energia mechaniczna skrzydła dla wszystkich trzech modeli zdefiniowana jest wzorem:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m \dot{h}^2(t) + 2S_\alpha \dot{h}(t) \dot{\alpha}(t) + I_\alpha \dot{\alpha}^2(t) + K_h h^2(t) + K_\alpha \alpha^2(t) \right). \quad (5.1)$$

Kierunek zmian energii mechanicznej ujawnia się po zaniknięciu stanów przejściowych związanych z początkiem ruchu. Jeżeli prędkość V_∞ jest dużo mniejsza od krytycznej V_{kr} , to po niewielu krokach całkowania obserwuje się wyraźne znikanie (lub stabilizację) energii, co świadczy o stateczności układu. Gdy V_∞ jest dużo większa od V_{kr} , to po niewielu krokach energia wzrasta monotonicznie. Gdy $V_\infty \rightarrow V_{kr}$ to ustalenie kierunku zmian energii jest coraz trudniejsze. Wymaga to na ogół wydłużenia czasu całkowania. Jednakże dla V_∞ bardzo bliskiej V_{kr} trudno jest stwierdzić, jak zmienia się energia. Należy ponadto wziąć pod uwagę fakt, że



Rys. 4. Zależność wartości współczynnika wzrostu wykładniczego η od liczby próbek rozwiązania numerycznego użytych do identyfikacji – skrzydło II

dla bardzo długich okresów całkowania następuje kumulacja błędów numerycznych, co może całkowicie zafałszować ocenę. Widać więc, że określenie charakteru rozwiązania w pobliżu V_{kr} jest znacznie utrudnione.

Powyższy efekt "rozmycia" dotyczy wszystkich wymienionych kryteriów. Wynika stąd, że krytyczna wartość parametru może być wyznaczona jedynie z dokładnością do pewnego przedziału:

$$V_{kr} \in (V_1, V_2). \quad (5.2)$$

Z praktycznego punktu widzenia ważne jest oczywiście, jak duży jest ten przedział. Okazuje się, że możliwość zawężania przedziału (5.2) jest ograniczona względami ekonomicznymi – jak już wspomniano, koszt oceny stateczności rośnie szybko w miarę zbliżania się do V_{kr} . Dla zadań opisanych w niniejszym artykule przedziały (5.2) stanowią ułamki procenta wartości krytycznych, co wydaje się aż nadto wystarczające zważywszy, że błędy modelowania są o wiele większe.

6. Wyznaczanie krytycznej wartości parametru metodą aproksymacyjną

W celu zwiększenia efektywności procesu wyznaczania wartości parametru kry-

tycznego można wykorzystać metodę aproksymacyjną wyznaczania pierwiastków funkcji. Polega ona na znajdowaniu miejsca zerowego funkcji określającej stateczność (np. $\eta(V_\infty)$) za pomocą aproksymacji na zbiorze wartości tej funkcji $\{\eta(V_\infty^k), k = 1, \dots, M\}$ inną, odpowiednio wybraną funkcją, np. wielomianem, splajnem itp. Przyjmuje się, że miejsce zerowe funkcji aproksymującej odpowiada miejscu zerowemu funkcji aproksymowanej. Dokładność wyznaczenia wartości krytycznej zależy od regularności funkcji aproksymowanej. Zaletą tego sposobu jest uniknięcie badania stateczności dla wartości parametru bliskich wartości krytycznej, a co za tym idzie – istotne zmniejszenie czasu obliczeń.

Procedurę taką zastosowano dla skrzydła II. Aproksymacja za pomocą wielomianu piątego stopnia na zbiorze 6 punktów wybranych dowolnie spośród tych, dla których określono stateczność daje wartość krytyczną prędkości równą $V_{kr}^{appr} = 42.387$ m/s wobec wartości $V_{kr} = 42.40$ m/s obliczonej poprzez zawężenie przedziału zawierającego V_{kr} . Wynika stąd, że taki sposób może być przydatny w praktyce.

7. Wpływ kryterium stateczności na wartość krytyczną parametru

Zachodzi pytanie, czy wartość krytyczna parametru zależy od użytego kryterium stateczności? Przeprowadzone obliczenia porównawcze wskazują na pomijalny wpływ użytego kryterium na obliczane wartości krytyczne. Istnieje ryzyko, że wskutek zbyt dużej tolerancji użytej do oceny charakteru rozwiązania otrzyma się więcej niż jedną wartość krytyczną (por. rys.4). Problem ten nie jest jednak zbyt istotny, gdyż w przypadku zaistnienia opisanej sytuacji zawsze można dokonać odpowiedniej korekty.

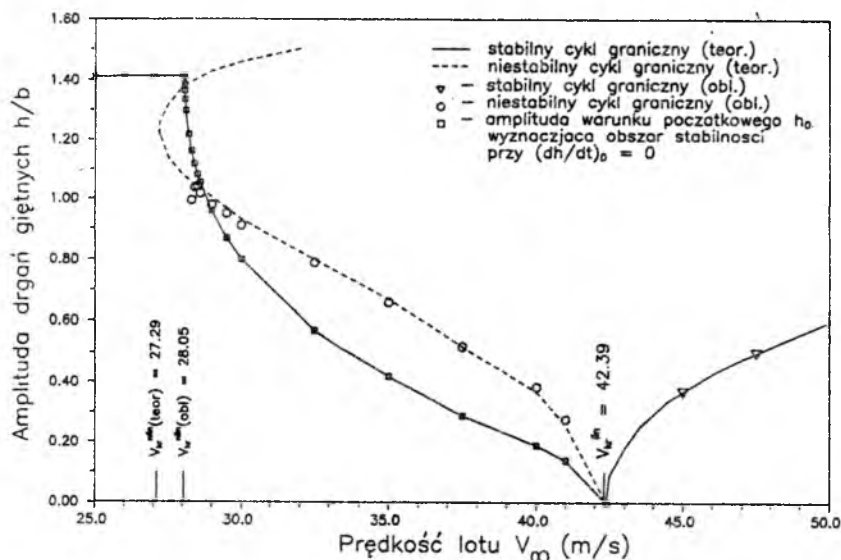
8. Analiza modelu ze sprężystością nieliniową

W celu ilustracji możliwości podejścia symulacyjnego przedstawione zostaną wyniki analizy aeroelastycznej modelu klasycznego (3.1), w którym sprężystość liniowa giętna została uzupełniona nieliniowością typu Duffinga:

$$F_s = -K_h(h + \beta h^3), \quad (8.1)$$

gdzie β jest współczynnikiem sprężystości nieliniowej. Nieliniowość Duffinga może być analizowana teoretycznie za pomocą linearyzacji harmoniczej [8]. Okazuje się przy tym, że w zależności od wartości parametru β model może mieć rozwiązania typu cyklu granicznego, stabilnego dla $\beta > 0$ i niestabilnego dla $\beta < 0$.

Na rys.5 przedstawiono amplitudę $\bar{h}/b$ w funkcji V_{∞} dla obu przypadków ($\beta = \pm 1/2$). Z rozważań teoretycznych wynika, że przy prędkościach większych niż $V_{kr}^{lin} = V_{kr}(\beta = 0)$ pojawia się stabilny cykl graniczny o amplitudzie zależnej od prędkości V_{∞} i współczynnika β . Przy prędkościach mniejszych niż V_{kr}^{lin} i $\beta < 0$ oprócz rozwiązania $h(t) = \alpha(t) \equiv 0$ istnieją niestabilne cykle graniczne w zakresie prędkości $V_{\infty} \in (V_{kr}^{nlin}, V_{kr}^{lin})$, przy czym V_{kr}^{nlin} oznacza najmniejszą prędkość lotu, przy której może pojawić się niestabilny cykl graniczny.



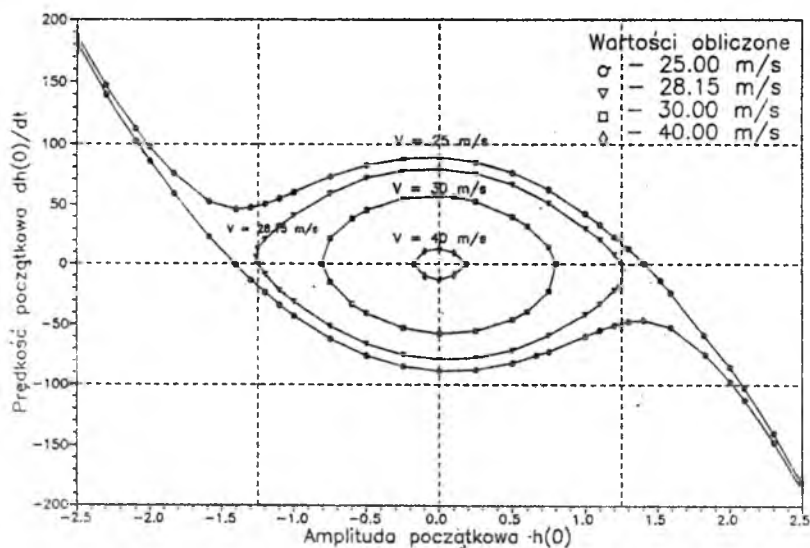
Rys. 5. Obszary stateczności i cykle graniczne drgań giętych skrzydła z nieliniowością sprężystą Duffinga dla $\beta = \pm 1/2$

Powyższe wyniki teoretyczne zostały sprawdzone przy użyciu metody symulacyjnej. Analizowano skrzydło II. Okazało się, że:

- stabilne cykle graniczne dla $\beta > 0$ uzyskuje się niezależnie od przyjętych warunków początkowych – wynik jest zgodny z analizą teoretyczną;
- amplitudy stabilnych cykli granicznych zgadzają się bardzo dobrze z wartościami teoretycznymi (błąd 0.1%);
- użycie specjalnych metod pozwala na wyznaczenie amplitud niestabilnych cykli granicznych (dla $\beta < 0$); otrzymuje się przy tym tylko dolne gałęzie krzywych teoretycznych;
- istnieje graniczna wartość h_0^{gr} powyżej której ruch jest niestateczny w całym zakresie prędkości – rezultat ten nie wynika z analizy teoretycznej opartej na

linearyzacji harmonicznej;

- stateczność ruchu w przypadku $\beta < 0$ zależy od warunków początkowych; na rys.6 przedstawiono obszary stateczności zależne od h_0 oraz $\dot{h}_0$. Jest widoczne, że istnieje graniczna prędkość V_{gr} (różna od V_{kr}^{lin}) taka, że dla każdej prędkości $V_\infty \in [0, V_{gr}]$ obszar stateczności jest nieograniczony. Oznacza to, że dla każdego h_0 można znaleźć $\dot{h}_0(h_0)$ takie, że stan początkowy $(h_0, \dot{h}_0)$ leży w obszarze przyciągania rozwiązania $h(t) \equiv 0, \alpha(t) \equiv 0$. Dla prędkości $V_\infty \in [V_{gr}, V_{kr}^{lin}]$ obszary stateczności są ograniczone, co oznacza, że istnieją wartości graniczne $(h_0)_{min}, (h_0)_{max}, (\dot{h}_0)_{min}, (\dot{h}_0)_{max}$ przekroczenie których prowadzi zawsze do rozwiązania o rosnącej amplitudzie. Wyniki te nie mogą być otrzymane na drodze teoretycznej opartej na linearyzacji harmonicznej, gdyż nie uwzględnia ona warunków początkowych;



Rys. 6. Poziomice obszaru stateczności względem zbioru trójparametrowego $P = \{V_\infty, h_0, \dot{h}_0\}$

- niestabilny cykl graniczny pojawia się tylko w zakresie prędkości V_{gr}, V_{kr}^{lin} , to znaczy że część krzywej teoretycznej nie jest otrzymywana;
- po przekroczeniu wartości krytycznej amplituda rozwiązania narasta gwałtownie, w przeciwieństwie do przypadku liniowego, gdzie wzrost ten jest umiarkowany.

Przedstawienie powyższego przykładu miało głównie na celu prezentację

możliwości podejścia symulacyjnego. Pokazano, że podejście to pozwala uzyskać prawie wszystkie wyniki teoretyczne, a ponadto daje dodatkowe informacje, których nie można uzyskać na drodze teoretycznej.

9. Badanie stateczności względem zbioru parametrów – rola warunków początkowych

Realizacja podejścia symulacyjnego związana jest często z koniecznością arbitralnego wyboru pewnych wielkości, które w danym zadaniu mają znaczenie pomocnicze, lecz mogą wpływać na wyniki analizy. Dla zadań liniowych są to warunki początkowe. Pełnią one rolę zaburzenia wywołującego ruch, który w zależności od stateczności rozwiązania $h(t) \equiv 0$, $\alpha(t) \equiv 0$, będzie zanikał lub rósł. Pojawia się więc problem wpływu wielkości tego zaburzenia na wyniki analizy stateczności. Dla układów liniowych odpowiedź teoretyczna jest znana: warunki początkowe nie mają wpływu na stateczność układu. Potwierdzają to wyniki obliczeń. Niezależnie od tego, jakie przyjęto kombinacje warunków początkowych prędkości krytyczne flutteru obu skrzydeł I i II wyznaczone za pomocą podejścia symulacyjnego były takie same.

Inna sytuacja ma miejsce w przypadku układów nieliniowych. W zależności od warunków początkowych otrzymuje się na ogół różne rozwiązania. Jeżeli stan początkowy leży w obszarze przyciągania rozwiązania statecznego, to w wyniku całkowania otrzyma się to rozwiązanie. W przypadku skrzydła mogą nimi być: brak ruchu (jak w układzie liniowym) lub stabilne cykle graniczne¹. Jednak układy nieliniowe mogą mieć także rozwiązania niestabilne, które nie mogą być na ogół wyznaczone na drodze symulacji numerycznych [9]. Jeżeli zatem przyjęte warunki początkowe nie leżą w obszarze przyciągania jakiegoś rozwiązania stabilnego, to w wyniku symulacji numerycznej otrzyma się pewien ruch o rosnącej amplitudzie, który może być uważany za niestabilny.

Wynika stąd, że badanie nieliniowych zjawisk aeroelastycznych musi brać pod uwagę wpływ warunków początkowych, a ściślej – warunki początkowe powinny być traktowane tak samo jak parametry w rodzaju prędkości lotu V_∞ . Można zatem powiedzieć, że badanie stateczności ruchu układów nieliniowych należy prowadzić w pewnym zbiorze parametrów, który dla nieliniowej wersji modelu (3.1)÷(3.3) ma postać:

$$P = \{V_\infty, h_0, \dot{h}_0, \alpha_0, \dot{\alpha}_0\}. \quad (9.1)$$

Badanie stateczności polega w tym wypadku na poszukiwaniu granic jej obszaru

¹Układ czterech równań różniczkowych może mieć również rozwiązania chaotyczne [9]. Według wiedzy autora przypadki takie nie były jednak obserwowane w układach opisanych w niniejszej pracy.

w zbiorze P . Na rys.6 przedstawiono przykładowy obszar stateczności ruchu skrzydła II z nieliniowością sprężystą typu Duffinga (patrz p.8) względem zbioru trójparametrowego $P = \{V_\infty, h_0, \dot{h}_0\}$. Z matematycznego punktu widzenia jest to równoważne wyznaczaniu granic pewnego zbioru w przestrzeni o wymiarze równym liczbie parametrów. Jest to zadanie skomplikowane; nie ma ogólnych, efektywnych algorytmów jego rozwiązywania. Najprostszy sposób polega na użyciu pomysłu typu Monte-Carlo: sprawdzania stateczności dla wybranych losowo punktów zbioru P . Jest to jednak sposób bardzo drogi, gdyż koszt obliczeń zależy w przybliżeniu wykładniczo od liczby parametrów M

$$K_M \sim (K_1)^M, \quad (9.2)$$

gdzie K_1 – koszt wyznaczenia wartości krytycznej pojedynczego parametru (przy ustalonych wartościach pozostałych $M - 1$ parametrów).

W przypadku ogólnym należy zatem badać stateczność ruchu względem wszystkich wielkości nie będących zmiennymi stanu. Mogą to być: parametry liczbowe modelu (np. masy, sztywności, prędkość opływu), warunki początkowe, brzegowe (dla zadań opisanych równaniami cząstkowymi) oraz wymuszenia zewnętrzne niezależne od zmiennych stanu. W przypadku zadań modelowanych losowo mogą to być także pewne charakterystyki probabilistyczne. Ponieważ podejście symulacyjne zakłada użycie metod numerycznych, to wszystkie te wielkości muszą być reprezentowane za pomocą zbioru wielkości skalarnych. Jest to oczywiste dla parametrów liczbowych, natomiast dla wielkości funkcyjnych, takich jak np. wymuszenia zewnętrzne, należy przyjąć odpowiednie aproksymacje, np. w postaci:

$$f(t) = \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(t), \quad (9.3)$$

gdzie $\varphi_i(t)$ są założonymi funkcjami a c_i – stałymi. Badanie stateczności układu względem wymuszenia $f(t)$ jest w takim przypadku równoważne badaniu stateczności względem zbioru parametrów $P = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$.

10. Wnioski

Przedstawione rezultaty prowadzą do następujących konkluzji.

1. Zastosowanie podejścia symulacyjnego do analizy flatterowej liniowego modelu aeroelastycznego o dwu stopniach swobody prowadzi do uzyskania wyników niemal całkowicie zgodnych z rezultatami analizy klasycznej. Dla rozważanych modeli: Pinesa, Theodorsena i ogólnego uzyskano zgodność wartości parametrów krytycznych rzędu ułamków procenta, co świadczy o

poprawności podejścia symulacyjnego, w szczególności – użytych kryteriów oceny stateczności ruchu.

2. W przeciwieństwie do podejścia klasycznego podejście symulacyjne prowadzi do wyznaczenia przedziału zawierający krytyczną wartość parametru; długość tego przedziału jest jednak niewielka.
3. Niezależnie od przyjętego kryterium oceny stateczności obserwuje się zjawisko "rozmycia" wartości krytycznej, polegające na tym, że w miarę zawężania przedziału zawierającego prędkość krytyczną coraz trudniej jest jednoznacznie określić charakter ruchu.
4. Różne kryteria stateczności ruchu, takie jak zmiana amplitudy w czasie, zmiana energii mechanicznej obiektu w czasie czy też wartość współczynnika wzrostu wykładniczego, prowadzą do identycznych wyników analizy układu aeroelastycznego; Najbardziej przydatne jest kryterium energetyczne, gdyż za jego pomocą można na bieżąco analizować zarówno stateczność ruchu układu jako całości, jak również poszczególnych stopni swobody.
5. Podejście symulacyjne nadaje się szczególnie dla tych zadań, które nie mogą być analizowane metodami zakładającymi harmoniczną postać ruchu. Jest szczególnie użyteczne dla zadań nieliniowych, gdyż nawet te problemy nieliniowe, które mogą być analizowane za pomocą podejścia klasycznego, dają się łatwo rozwiązać za pomocą podejścia symulacyjnego; unika się przy tym konieczności rozwiązywania nieliniowego, zespolonego zagadnienia własnego.

Literatura

1. DUL F.A., 1992, *Metody symulacyjne badania stateczności aeroelastycznej*, V Konferencja Mechanika w Lotnictwie, Warszawa
2. BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., HALFMAN R.L., 1955, *Aeroelasticity*, Addison – Wesley
3. BISPLINGHOFF, ASHLEY H., 1962, *Principles of Aeroelasticity*, J.Wiley
4. ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A., 1965, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55
5. FUNG Y.C., 1955, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Wiley
6. SCANLAN R., ROSENBAUM R., 1964, *Drgania i flatter samolotów*, PWN, Warszawa
7. KRUPOWICZ R., 1986, *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa

8. GUTOWSKI R., MZYK E., *Flutter nekotoroj modeli kryla s nelinejnymi uprugimi charakteristikami tipa Duffinga i gisterezisnogo tipa*, Praca w języku rosyjskim, nieopublikowana
9. PARKER T.S., CHUA L.O., 1989, *Practical Numerical Algorithm for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, New York

PRÓBA ODWZOROWANIA OBCIĄŻEŃ AKUSTYCZNYCH W BADANIACH TRWAŁOŚCI PRZEKŁADKOWEGO STERU WYSOKOŚCI SAMOŁOTU I-22 W HAMOWNI ZA SILNIKIEM K-15¹

ANTONI NIEPOKÓLCZYCKI

Instytut Lotnictwa, Warszawa

1. Wprowadzenie

Problem zmęczenia akustycznego w technice lotniczej wiąże się nieodłącznie z wielkością i prędkością współczesnych statków powietrznych i nabiera ostatnio coraz większego znaczenia.

Elementy struktury samolotu obciążone akustycznie muszą być poddane badaniom, w wyniku których zostanie określony ich reśurs z uwagi na to obciążenie; podobnie jak w wyniku klasycznych badań zmęczeniowych określany jest reśurs od obciążeń np. manewrowych.

Jednym z głównych źródeł obciążenia akustycznego konstrukcji jest silnik odrzutowy. Duża prędkość gazów wylotowych z silnika powoduje powstanie za jego dyszą strefy turbulentnej, która oddziałuje na znajdujące się w niej elementy struktury płatowca. W strefie takiego oddziaływania jest ster wysokości samolotu I-22.

Wykonany w sposób klasyczny (poszycie usztywnione żebrami) ster wysokości okazał się bardzo mało odporny na obciążenia akustyczne – poszycie pękało już po ok. 50 godzinach lotu. Z tego powodu wykonany został tzw. ster przekładkowy, zawierający segmenty spływowe z rdzeniem komórkowym. Ster ten został poddany próbie na zmęczenie akustyczne w dość nietypowych warunkach – wykorzystując bowiem próbę trwałości i niezawodności silnika K-15 w hamowni, umieszczono go tam na specjalnym stanowisku za silnikiem.

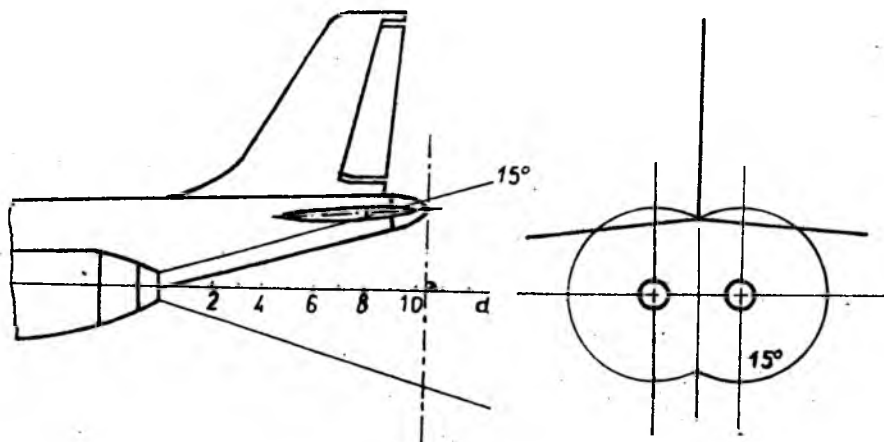
Poniżej przedstawiono

- krótką charakterystykę pola akustycznego oddziałującego na ster;
- opis konstrukcji przekładkowego steru wysokości samolotu I-22;
- sposób w jaki odwzorowywano obciążenia akustyczne w hamowni.

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

2. Charakterystyka pola akustycznego

Ster wysokości samolotu I-22 znajduje się w strefie bardzo silnego oddziaływania akustycznego strumieni gazów wylotowych z silników (rys.1).



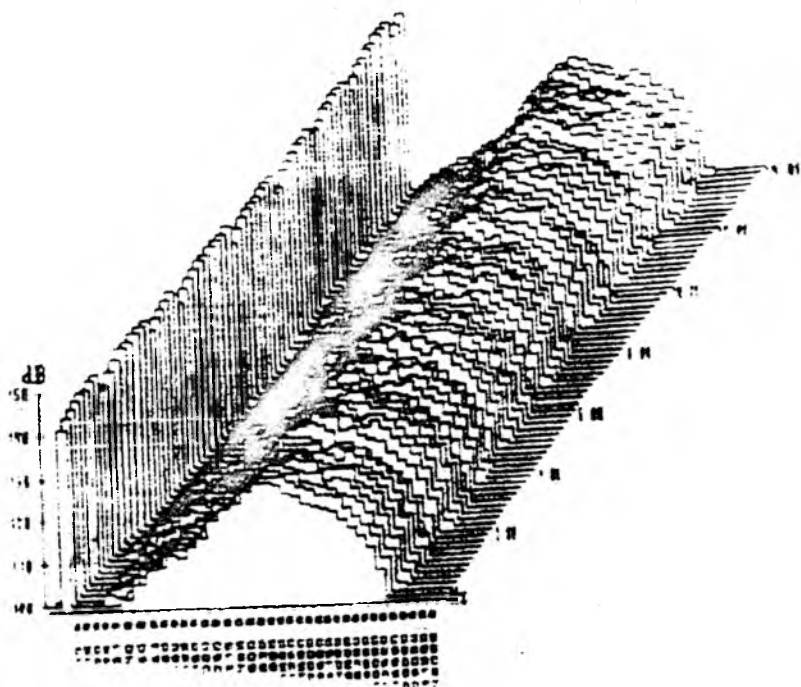
Rys. 1. Samolot I-22 – położenie steru wysokości względem dyszy silników

Rozważania teoretyczne i badania eksperymentalne wykazują, że hałas emitowany przez strumień gazu spalinowego, wypływający z dyszy wylotowej o przekroju okrągłym, jest związany z parametrami jego przepływu. Na proces wypływu spalin i związany z nim hałas, zasadniczy wpływ ma zjawisko burzliwego mieszania się spalin z otoczeniem na granicy stożka wypływającego strumienia. Jak widać na rysunku granica ta przebiega właśnie przez ster wysokości samolotu.

W celu określenia pola akustycznego, które oddziałuje na ster, wykonane zostały pomiary ciśnień akustycznych w punktach leżących za jego krawędzią spływu. Na rysunku 2 przedstawiono wynik pomiaru wykonanego w punkcie leżącym w płaszczyźnie osi silnika, w czasie gdy oba silniki jednocześnie pracowały z pełną mocą ($N = 15600$). Jak widać spektrum hałasu jest szerokopasmowe z maksimum przy częstotliwości około 800 Hz. Całkowity poziom ciśnienia akustycznego L_p jest rzędu 150 dB.

3. Opis konstrukcji przekładkowego steru wysokości samolotu I-22

Typowe struktury samolotu budowane są najczęściej jako zespoły elementów pokrycia usztywnione przez wręgi, podłużnice i żebra. Są to układy słabo tłumiące



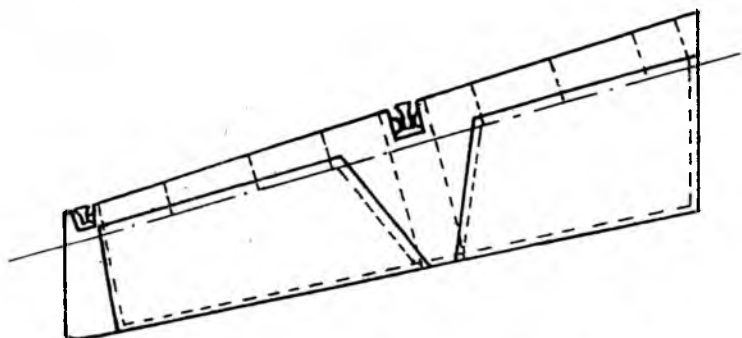
Rys. 2. Ciśnienia akustyczne za krawędzią splywu steru wysokości Irydy

drżania; ich częstotliwości rezonansowe (szczególnie podstawowe częstotliwości rezonansowe paneli pokrycia) leżą w tym samym paśmie częstotliwości, w którym hałas emitowany przez silnik wykazuje dużą intensywność.

Elementy pokrycia zostają pobudzone do drgań rezonansowych, które powodują zmienne obciążenie struktury. Amplitudy tych obciążeń są wprawdzie małe w porównaniu do innych obciążeń zmęczeniowych (np. od podmuchów, manewrów), jednak w następstwie znacznie wyższych częstotliwości mogą powstać pęknięcia zmęczeniowe spowodowane dużą liczbą cykli zmiany obciążenia występującą w ciągu krótszego czasu.

Ster wysokości Irydy wykonany w sposób klasyczny okazał się bardzo mało odporny na obciążenia akustyczne. Pierwsze pęknięcia pokrycia można było zaobserwować już po ok. 50 godzinach lotu. Po wielu modyfikacjach steru i próbach laboratoryjnych zdecydowano się ostatecznie na tzw. ster przekładkowy (rys.3).

Konstrukcja steru przekładkowego tym różni się od konstrukcji klasycznej, że wbudowane zostały w jego części splywowej segmenty z rdzeniem komórkowym. Pozwoliło to na rezygnację z żeber w tym rejonie i na zmniejszenie grubości pokrycia w tej części z 0.6 mm na 0.3 mm.



Rys. 3. Przekładkowy ster wysokości samolotu I-22

- Zasadnicze wady konstrukcji z rdzeniem komórkowym to skomplikowana i wymagająca dużej dokładności technologia oraz mała odporność na niezbyt nawet duże obciążenia skupione.
- Z dynamicznego punktu widzenia przewaga konstrukcji steru z rdzeniem komórkowym nad konstrukcją klasyczną wynika stąd, że rdzeń realizuje ideę ciągłego podparcia pokrycia, przez co eliminuje lokalne drgania jego paneli. Konsekwencją tego jest fakt, że ster w interesującym nas paśmie częstotliwości, odpowiada na wymuszenie akustyczne jedynie postaciami naturalnymi całej struktury.
- Z punktu widzenia zmęczenia akustycznego konstrukcja z wypełniaczem komórkowym jest znacznie korzystniejsza, bowiem eliminuje znaczną ilość połączeń nitowych, które w konstrukcji klasycznej są ogniskami pęknięć.

4. Odwzorowanie obciążeń akustycznych w hamowni

Najczęściej spotykane dotychczas sposoby odtworzenia obciążeń akustycznych to:

- doświadczenie z rzeczywistym silnikiem;
- doświadczenie z hałasem symulowanym;
- doświadczenie z fragmentem struktury.

Pierwszy z tych sposobów odwzorowuje obciążenia akustyczne bardzo dokładnie, wymaga jednak bardzo dużych nakładów. Druga metoda, to metoda laboratoryjna, w której za pomocą specjalnych generatorów odtwarza się dostatecznie dokładnie spektrum i warstwice hałasu; nie są odtwarzane w tej metodzie przestrzenne zależności fazowe ciśnień akustycznych, mają one bowiem drugorzędne znaczenie. Doświadczenie z fragmentem struktury polega na podzieleniu dużej struktury na części i poddawaniu tych części obciążeniu akustycznemu pochodzącemu od hałasu rzeczywistego lub symulowanego.

Żaden z przedstawionych wyżej sposobów odwzorowania obciążeń akustycznych nie mógł być zastosowany przy badaniu trwałości akustycznej przekładkowego steru wysokości samolotu I-22. Pierwszy z powodu zbyt wysokich kosztów, drugi z powodu braku odpowiedniej aparatury i pomieszczenia, a trzeci z braku możliwości podziału steru przekładkowego na odpowiednie fragmenty.

W tej sytuacji postanowiono wykorzystać mającą się właśnie odbyć próbę trwałości i niezawodności silnika K-15 w hamowni naziemnej.

Ster został umieszczony na specjalnym stanowisku w hamowni tak, że względne położenie charakterystycznych punktów i osi było zgodne z ich położeniem na samolocie, z tym, że ster na stanowisku był umieszczony nie w górnej, jak w samolocie, lecz w dolnej strefie stożka gazów wylotowych. Na stanowisku istniała możliwość regulacji wszystkich kątów i odległości steru od osi silnika.

Ponieważ w warunkach hamowni nie można było dokładnie odtworzyć rzeczywistego pola akustycznego (zbyt silny wpływ fal odbitych od ścian hamowni) oraz z powodu innego niż na samolocie zawieszenia steru – tam podatny statecznik, tu trzy sztywne, niezależne podpory – należało wybrać inne kryterium zgodności obciążeń rzeczywistych z obciążeniami uzyskanymi w hamowni.

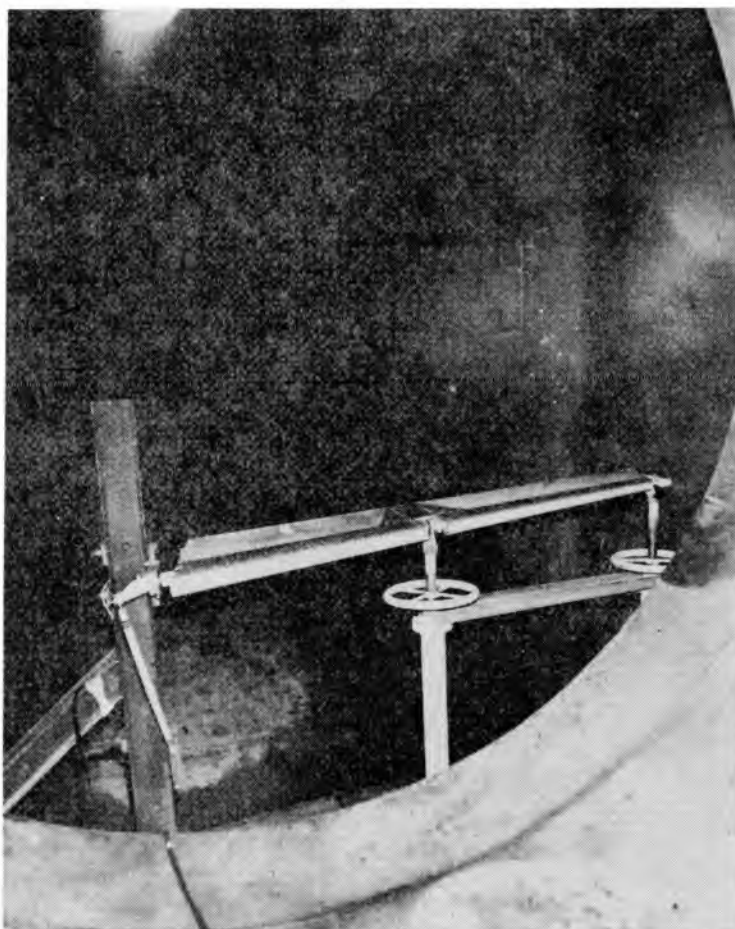
Podstawowym kryterium było odwzorowanie naprężeń.

Dodatkowo przeprowadzono pomiar i porównanie drgań steru.

Poziomy naprężen na pokryciu badanego steru określono na podstawie pomiarów wykonanych na samolocie przy pracujących silnikach na ziemi.

W zarejestrowanych przebiegach tensometrycznych poddano analizie:

- wartości całkowitych naprężeń dynamicznych;
- wartości maksymalnych naprężeń harmonicznych;
- częstotści maksymalnych naprężeń harmonicznych.



Rys. 4. Stanowisko w hamowni

Wartości całkowitych naprężeń dynamicznych przedstawiono poniżej w tabeli.

Nr tens	Naprężenia [MPa]				
	n_{bj}	13000 obr/min	14000 obr/min	15000 obr/min	15600 obr/min
1	0.342	3.420	5.928	8.550	9.120
2	0.342	3.648	6.270	9.120	11.400
3	0.456	3.990	6.270	10.260	12.540

Poziomy drgań akustycznych steru wysokości określono na podstawie pomiarów drgań w locie przeprowadzonych na prototypie ANP01-04 w czasie, gdy zamontowane były na nim stery przekładkowe. Drgania mierzone były czujnikiem tego samego typu co czujnik zamontowany na sterze w hamowni.

Analizie poddano pomiary z 14 lotów. Analiza ta wykazała, że największe drgania steru wysokości wywołane pracą silnika występują w tych fazach eksploatacji samolotu, w których samolot stoi w miejscu a silniki pracują z pełną mocą (są to wszelkie próby silników przed startem lub po przeglądach czy remontach) oraz początkowa faza startu.

W celu uzyskania zgodności naprężeń korygowano położenie steru i ostatecznie został on umieszczony ok. 70 mm bliżej osi silnika niż na samolocie, przy czym zachowane zostały wszystkie kąty charakteryzujące jego położenie.

W tabeli poniżej przedstawiono wartości naprężeń uzyskanych w hamowni po zmianie położenia steru oraz porównanie ich z wartościami rzeczywistymi.

Tensometr nr	Naprężenie w hamowni [MPa]	Naprężenie na samolocie [MPa]	Błąd [%]
1	9.45	9.12	+3.61
2	11.55	11.40	+1.31
3	12.23	12.54	-2.47

Z porównania drgań zmierzonych w hamowni z drganiami zarejestrowanymi w czasie lotu wynika, że:

- zmianie uległy częstotliwości drgań rezonansowych – wynika to z innego sposobu zamocowania steru (tu trzy sztywne, niezależne podpory, a na samolocie podatny statecznik);
- podobnej zmianie uległy częstotliwości maksymalnych naprężeń harmonicznych;
- poziomy drgań w hamowni są wyższe od drgań rzeczywistych w całym rozpatrywanym zakresie częstotliwości.

Częstotliwość rezonansowa [Hz]		Przyspieszenia [m/s^2]		Błąd [%]
samolot	hamownia	samolot	hamownia	
290 ÷ 320	263	60	80	+25
400 ÷ 430	375	60	75	+25
490 ÷ 510	474	100	122	+22
750 ÷ 850	820	45	50	+11

Literatura

1. BURCZAK W., 1975, *Określanie żywotności struktury samolotu obciążonej akustycznie*, Technika Lotnicza i Astronautyczna, 3
2. RAJPERT T., 1980, *Hałas lotniczy i sposoby jego zwalczania*, WKiŁ Warszawa
3. *Pomiary i porównanie naprężeń na pokryciu sterów wysokości wyr.300 wzbudzanych pracą silnika samolotu TS-11*, Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa nr 8/BW-W2/90
4. *Pomiary i ocena naprężeń akustycznych trójpodporowego steru wysokości wyr.300 z wypełniaczem komórkowym*, Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa nr 9/BW-W2/90
5. *Badanie odporności na drgania przekładkowego steru wysokości wyr.300*, Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa nr 14/BW-W1/91

IDENTYFIKACJA WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNYCH IMITATORA CELU POWIETRZNEGO¹

JÓZEF GACEK

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Praca zawiera krótką charakterystykę niekierowanego imitatora celu powietrznego i metodykę badań teoretycznych jego właściwości dynamicznych w locie przestrzennym. Przedstawiono porównanie wyników badań teoretycznych z rezultatami badań doświadczalnych w locie na rzeczywistym imitatorze celu powietrznego.

1. Wprowadzenie

Nowoczesne metody szkolenia obsługi skomplikowanych i kosztownych w eksploatacji urządzeń technicznych wymagają szerokiego stosowania różnego rodzaju imitatorów i symulatorów. Przedmiotem badań w niniejszej pracy jest nowe rozwiązanie konstrukcyjne imitatora celu powietrznego o poddźwiękowej prędkości lotu.

Podstawowym celem przeprowadzonych rozważań było opracowanie metodyki badań teoretycznych właściwości dynamicznych tej klasy obiektów latających. Realizacja założonego celu badań wymagała m.in.:

- opracowania modelu fizycznego rozpatrywanego imitatora;
- sformułowania modelu matematycznego przestrzennego ruchu obiektu;
- przeprowadzenia analizy porównawczej wyników uzyskanych na drodze badań teoretycznych z wynikami badań w locie na rzeczywistych imitatorach celu powietrznego.

Z uwagi na podobieństwo modelu aerodynamicznego rozpatrywanego imitatora do niekierowanych obiektów latających, wykorzystano niektóre rozwiązania z zakresu dynamiki lotu zawarte w pracach [1 ÷ 5].

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

2. Modelowanie fizyczne i matematyczne imitatora

Imitator celu powietrznego traktowano jako bryłę sztywną o zmieniającej się masie i sześciu stopniach swobody odpowiadających przemieszczeniom obiektu w płaszczyźnie pionowej i poziomej x_g, y_g, z_g oraz trzem obrotom dookoła odpowiednich osi układu $0x'y'z'$ (rys.2). Ponadto przyjęto, że:

- ruch obiektu odbywa się w wyniku działania ciągu silnika rakietowego $\bar{P}$ (na aktywnej części toru) oraz stacjonarnych sił aerodynamicznych i masowych zredukowanych do wektora głównego i momentu głównego względem środka masy imitatora (rys.4);
- prędkość opływu $\bar{v}_a$ jest sumą geometryczną prędkości środka masy obiektu $\bar{v}$ oraz prędkości powietrza $\bar{v}_w$, w punkcie pokrywającym się w danej chwili ze środkiem masy obiektu.

Schemat aerodynamiczny rozpatrywanego imitatora z niektórymi jego charakterystykami geometrycznymi przedstawiono na rysunku 1.

Do opisu właściwości dynamicznych imitatora na torze przyjęto następujące prostokątne prawoskrętne układy współrzędnych (rys.2 ÷ 4):

- normalny ziemski układ współrzędnych $0_0x_gy_gz_g$ (rys.2 i rys.3), tzn. nieruchomy układ inercjalny związany z Ziemią;
- normalny układ współrzędnych $0x_gy_gz_g$ (rys.2 i rys.3);
- układ współrzędnych związany z trajektorią $0x_ky_kz_k$ (rys.3);
- prędkościowy (przepływowy) układ współrzędnych $0x_ay_az_a$ (rys.4);
- układ współrzędnych związany z obiektem $0xyz$ (rys.2 i rys.4),

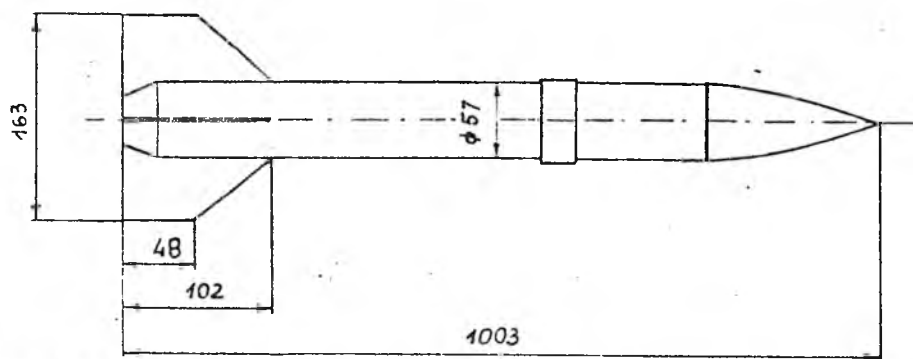
oraz następujące współrzędne liniowe i katowe:

- współrzędne liniowe x_g, y_g, z_g opisujące położenie początku układu związanego z obiektem względem początku układu nieruchomego $0_0x_gy_gz_g$ (rys.2);
- współrzędne katowe ψ, ϑ, γ opisujące konfigurację układu sztywno związanego z obiektem $0xyz$ względem układu normalnego $0x_gy_gz_g$ (rys.2).

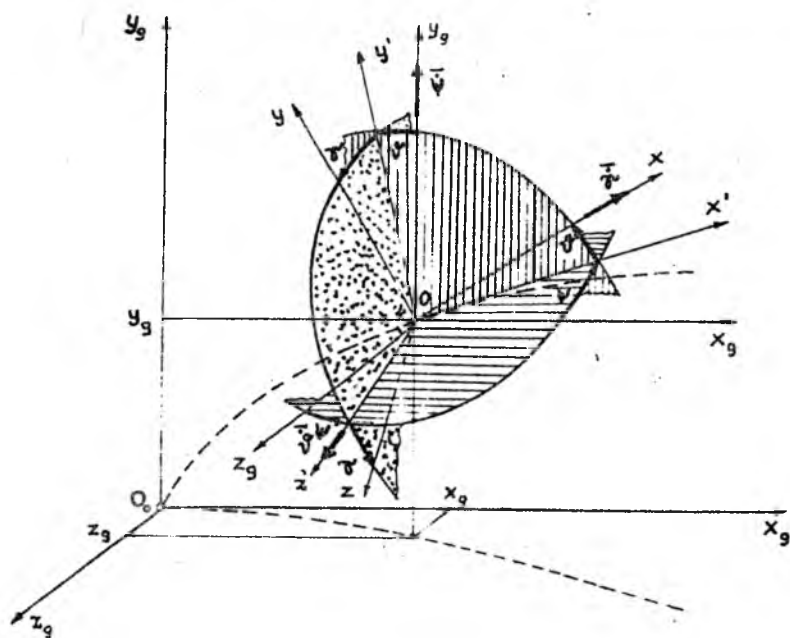
Ponadto przyjęto następujące quasi-prędkości:

- quasi-prędkości liniowe v_x, v_y, v_z , czyli składowe wektora prędkości środka masy imitatora $\bar{v}$ w związanym układzie współrzędnych $0xyz$ (rys.4);
- quasi-prędkości katowe p, q, r , tzn. składowe chwilowej prędkości katowej obiektu $\dot{\Omega}$ w układzie $0xyz$ (rys.4).

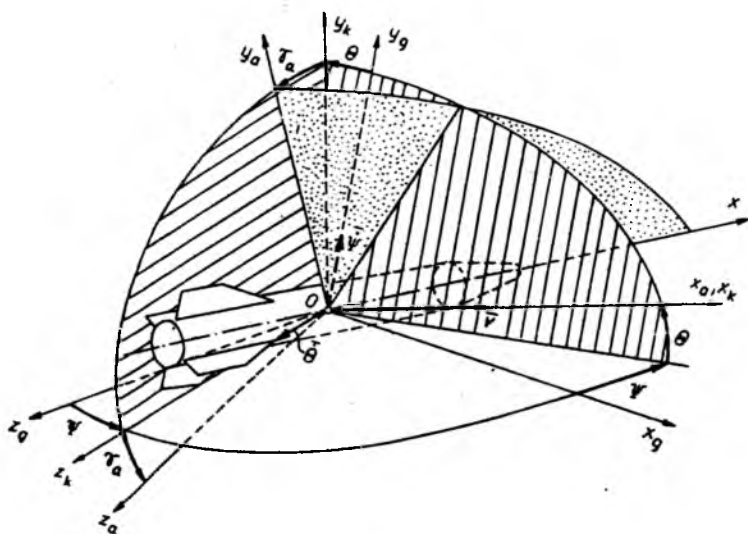
Dynamiczne równania ruchu imitatora sformułowano na podstawie równań dynamiki klasycznej brył o zmieniającej się masie, tzn. prawa o zmianie pędu i krętu



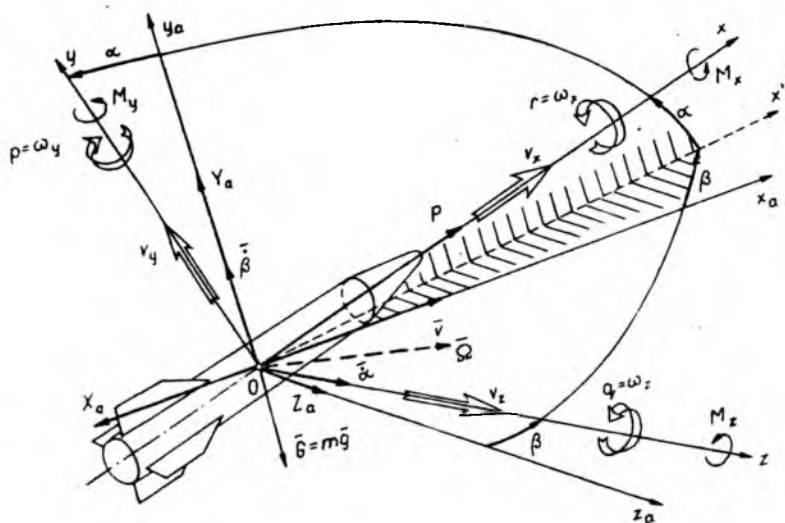
Rys. 1. Schemat aerodynamiczny oraz podstawowe charakterystyki modelu fizycznego imitatora



Rys. 2. Układy współrzędnych: $O_0x_gy_gz_g$, $Ox_gy_gz_g$, $Oxyz$; przyjęte współrzędne: liniowe x_g, y_g, z_g oraz kątowne ψ, θ, γ



Rys. 3. Układy współrzędnych: $0x_ay_ay_a$, $0x_ky_kz_k$, $0x_ay_ay_a$; kąty: pochylenia toru θ , zwrotu toru ψ , prędkościowy kąt przechylenia γ_a



Rys. 4. Siły i momenty sił zewnętrznych działających na obiekt w locie, quasi-prędkości liniowe v_x, v_y, v_z i katowe r, p, q ; kąty α, β

układu materialnego [3,4].

Zapisując dynamiczne równanie ruchu imitatora w układzie współrzędnych związanym z trajektorią $0x_k y_k z_k$ (równania ruchu środka masy) i układzie związanym $Oxyz$ (równania ruchu dookoła środka masy), po określeniu związków kinematycznych i geometrycznych między układami współrzędnych otrzymano następujący układ równań ruchu przestrzennego przyjętego modelu fizycznego rozważanego obiektu:

- równania dynamiczne ruchu postępowego i obrotowego

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}m(t) &= P \cos \alpha \cos \beta - m(t)g \sin \Theta - X_a, \\ \frac{d\Theta}{dt}m(t)v &= P(\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a) + Y_a \cos \gamma_a + \\ &\quad - Z_a \sin \gamma_a - m(t)g \cos \Theta, \\ \frac{d\Psi}{dt}m(t)v \cos \Theta &= -P(\sin \alpha \sin \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a) + \\ &\quad - Y_a \sin \gamma_a - Z_a \cos \gamma_a,\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt}I_x(t) &= M_{x0} + M_x^r r + M_x^p p + M_x^\beta \beta - [I_x(t) - I_y(t)]pq, \\ \frac{dp}{dt}I_y(t) &= M_{y0} + M_y^\beta \beta + M_y^p p + M_y^r r - [I_x(t) - I_y(t)]rq, \\ \frac{dq}{dt}I_x(t) &= M_{x0} + M_x^\alpha \alpha + M_x^q q + M_x^r r - [I_y(t) - I_x(t)]rp,\end{aligned}\quad (2.2)$$

- równania kinematyczne prędkości kątowych i liniowych

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= p \sin \gamma + q \cos \gamma, \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta &= p \cos \gamma - q \sin \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= r - \operatorname{tg} \vartheta (p \cos \gamma - q \sin \gamma),\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_g}{dt} &= v \cos \Theta \cos \Psi, \\ \frac{dy_g}{dt} &= v \sin \Theta, \\ \frac{dz_g}{dt} &= -v \cos \Theta \sin \Psi,\end{aligned}\quad (2.4)$$

- równanie zmiany masy

$$\frac{dm}{dt} = -m_{sek}(t), \quad (2.5)$$

- związki geometryczne

$$\sin \alpha = \left\{ \left[\sin \vartheta \cos \gamma \cos(\Psi - \psi) + \sin \gamma \sin(\Psi - \psi) \right] \cos \Theta + \right. \\ \left. - \sin \Theta \cos \vartheta \cos \gamma \right\} \sec \beta, \quad (2.6)$$

$$\sin \beta = \cos \Theta \left[\sin \vartheta \sin \gamma \cos(\Psi - \psi) - \cos \gamma \sin(\Psi - \psi) \right] - \sin \Theta \cos \vartheta \sin \gamma,$$

$$\sin \gamma_a = \left[\cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \cos \vartheta \left(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma \right) \right] \sec \Theta,$$

gdzie:

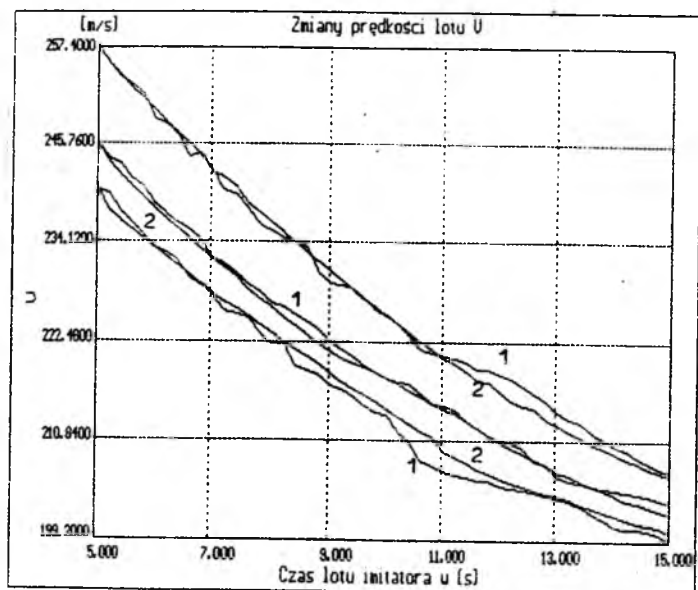
- X_a, Y_a, Z_a - składowe wektora głównego sił aerodynamicznych $\bar{R}_A$ w układzie przepływowym $0x_a y_a z_a$ (rys.4);
- M_x, M_y, M_z - składowe wektora głównego momentu działającego na obiekt $\bar{M}$ w układzie związanym $0xyz$ (rys.4);
- M_x^γ, M_y^β - pochodne składowych momentu względem odpowiednich parametrów ruchu obiektu [1,4].

3. Przykład symulacji komputerowej parametrów lotu imitatora i doświadczalna weryfikacja modelu matematycznego

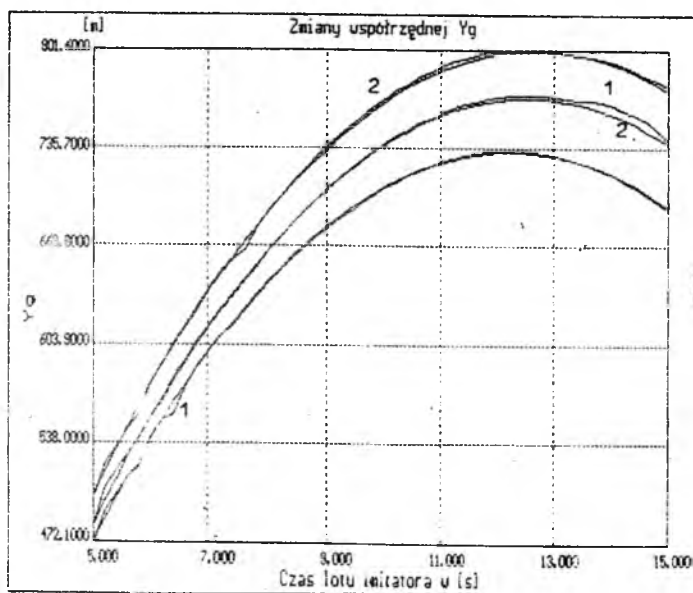
Na podstawie modelu fizycznego i modelu matematycznego opracowano algorytm do wyznaczania parametrów lotu przestrzennego imitatora, przewidujący różne warianty obliczeń ze względu na strukturę badanego obiektu oraz dwa warianty ze względu na warunki początkowe ruchu. I tak np., można symulować lot imitatorów o różnym schemacie konstrukcyjnym, natomiast warunki początkowe ruchu należy określać dla chwili startu lub dla dowolnej innej chwili ruchu imitatora.

W oparciu o wspomniany algorytm opracowano program obliczeń komputerowych, który umożliwia badanie wpływu parametrów konstrukcyjnych oraz warunków startu i lotu obiektu na jego parametry ruchu przestrzennego. Symulację lotu rozpatrywanego imitatora przeprowadzono dla zbioru warunków początkowych ruchu uzasadnionych względami praktycznymi. Np., główne parametry początkowe ruchu przyjmowane były następująco: $\Theta_0 = 5 \div 30^\circ$, $v_0 = 0.0$, $v_k = 200 \div 400$ [m/s], $t_k = 0.62 \div 1.1$ [s]. Indeks dolny k wyróżnia wielkości dotyczące punktu wyłączenia silnika imitatora.

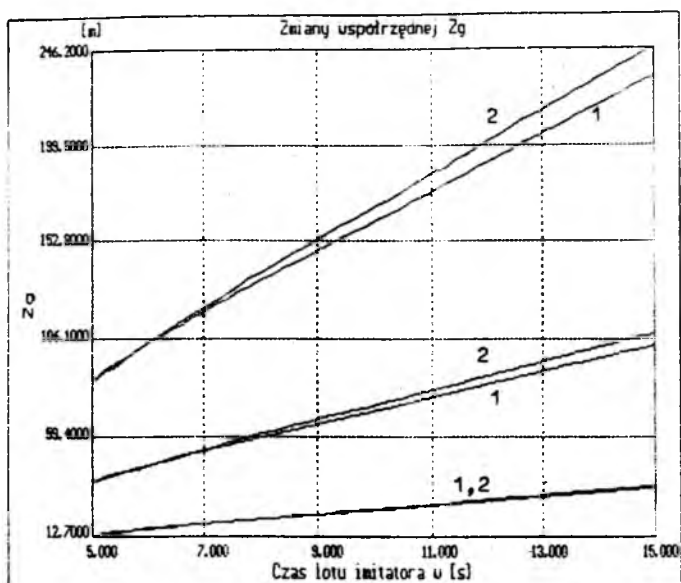
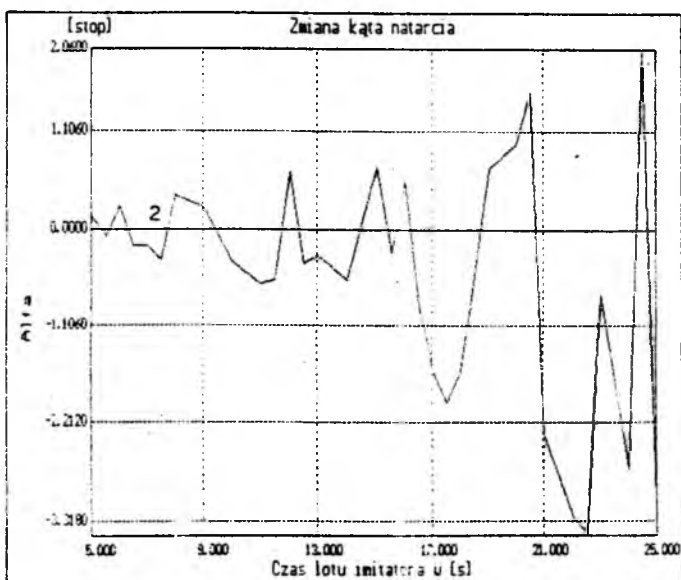
Szczegółowej analizie poddano fazę lotu obiektu w przedziale czasu $(5 \div 15)$ [s], gdyż zastosowana metoda badań eksperymentalnych umożliwiała w tym przedziale czasu uzyskiwać wyniki obarczone znacznie mniejszymi błędami w porównaniu z pozostałymi częściami toru.

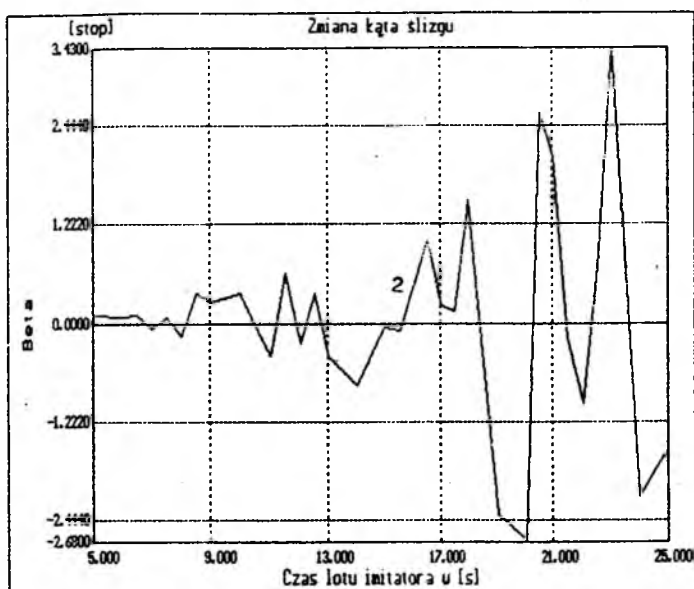
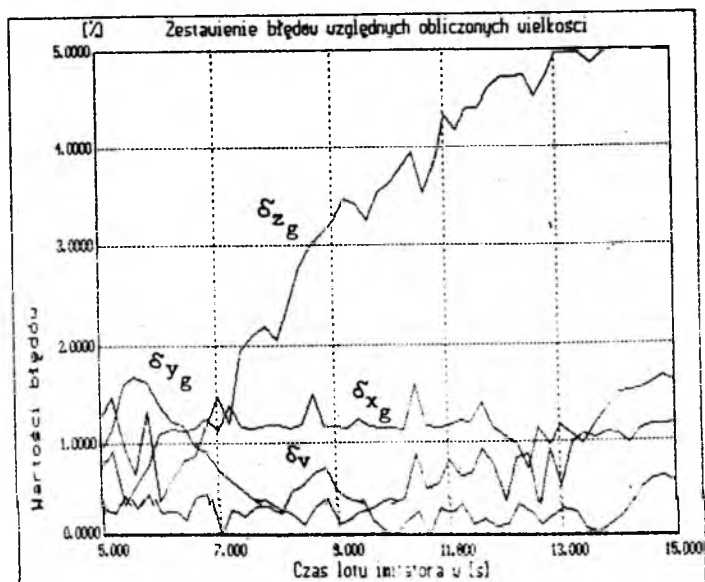


Rys. 5. Wykresy: $v(t, v_0) \Rightarrow$ 1 - wyniki badań doświadczalnych, 2 - wyniki badań teoretycznych



Rys. 6. Wykresy: $y_g(t, v_0)$

Rys. 7. Wykresy: $z_g(t, v_0)$ Rys. 8. Zmiana kąta natarcia α na torze

Rys. 9. Zmiana kąta ślizgu β na torzeRys. 10. Zestawienie błędów względnych wielkości v , x_g , y_g , z_g

Charakterystyczne wyniki analizy numerycznej badanego modelu imitatora oraz ich porównanie z rezultatami badań poligonowych na obiektach rzeczywistych przedstawiono na rysunkach 5 ÷ 10. Na rysunkach tych cyfrą 1 oznaczono krzywe ilustrujące wyniki badań doświadczalnych na imitatorach, natomiast cyfrą 2 oznaczono zmiany parametrów ruchu uzyskane w badaniach teoretycznych według zaproponowanego algorytmu. Różnice występujące między niektórymi wynikami badań teoretycznych i doświadczalnych, w postaci błędów względnych (odniesionych do wyników badań eksperymentalnych) zestawiono na rys.10.

Analiza uzyskanych rezultatów wykazała, że występujące różnice wyników symulacji i eksperymentu mieszczą się w granicach rozrzutu parametrów ruchu imitatora, spowodowanych zmiennymi warunkami startu i lotu (odchyłkami charakterystyk konstrukcyjnych i napędu imitatora, odchyłkami parametrów ośrodka ruchu w stosunku do parametrów określonych według przyjętego modelu atmosfery ziemskiej, itp.).

Przedstawiona teoretyczna metoda badań właściwości dynamicznych obiektów w locie, może również znaleźć zastosowanie do analizy ruchu obiektów o schematach aerodynamicznych różniących się od przedstawionego na rysunku 1.

4. Wnioski końcowe

Zgodnie ze sformułowanym na wstępie celem pracy, wyniki analizy numerycznej zostały potwierdzone podczas badań rzeczywistych imitatorów w locie, w których dokonano pomiaru ich parametrów kinematycznych. Ogólna zgodność wyników uzyskanych z obliczeń i badań modeli rzeczywistych weryfikuje opracowany model badanego zjawiska.

Przedstawiona metoda badań oraz uzyskane rezultaty uzasadniają wniosek, że poprawny i zweryfikowany algorytm badań teoretycznych powinien być stosowany już w fazie wstępnego projektowania obiektów.

Z uwagi na fakt, że zaproponowana metoda umożliwia uzyskiwanie ciągłej informacji o zmianie parametrów ruchu obiektu na torze oraz czas trwania procesu symulacji toru jest mniejszy od czasu w jakim odbywa się rzeczywisty lot imitatora, może ona znaleźć zastosowanie podczas opracowania odpowiednich programów i symulatorów do szkolenia obsługi odpowiednich zestawów rakietowych.

W ramach kontynuacji niniejszej pracy zamierza się przeprowadzić dokładniejszą analizę stabilności ruchu oraz badania wpływu niektórych warunków startu i lotu na rozrzut podstawowych parametrów przestrzennego ruchu tego typu obiektów.

Literatura

1. GACEK J., 1985, *Model aerodynamiczny i opis matematyczny wydłużonego pocisku ciężkiego*, MTiS, 3-4, Warszawa
2. GACEK J., 1986, *Dynamika lotu rakiet z-z*, WAT, Warszawa
3. GUTOWSKI R., 1971, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa
4. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe PW, Mechanika, 32, Wydawnictwa PW, Warszawa
5. HEMSCH M.J., NIELSEN J.N., 1986, *Tactical missile aerodynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., N.Y.

DZIEDZINY FUNKCJONOWANIA OBIEKTU POWIETRZE-POWIETRZE W SYTUACJI CELU MANEWRUJĄCEGO W PŁASZCZYŹNIE PIONOWEJ¹

JAN NICZYPORUK

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Zbadano dziedziny funkcjonowania obiektu powietrze-powietrze w uwarunkowaniach walki powietrznej w sytuacji celu manewrującego w płaszczyźnie pionowej. Ze zbioru reprezentatywnych hipotez o ruchu celu, charakteryzujących "cel manewrujący", wyznaczono manewry obronne kryterialne. Manewry te wyznaczają część wspólną obszarów samonaprowadzania, którą nazwano "gwarantowanym obszarem samonaprowadzania".

1. Wstęp

W pracach [3,7,8,10] przedstawiono aspekty formalizmu aksjomatycznego w ujęciu topologiczno-mnogościowym i aplikacyjnego w pojęciach układów dynamicznych w przestrzeni zdarzeń w postaci układu równań różniczkowych i warunków orientorowych – zagadnienia systemu procesów $\hat{\varphi}_{npw}$ proporcjonalnego samonaprowadzania obiektu powietrze-powietrze w sytuacji celu manewrującego w uwarunkowaniach procesów ataku nosiciela – i metody zobrazowania wyników w ujęciu celowościowym w postaci spełnienia zależności między obszarami dopuszczalnych warunków odpalania $\hat{\Omega}_{0npw}$, startu $\hat{\Omega}_{0pw}$, zdarzeń realizacji zadania $\hat{\Omega}_{rzpw}$, które warunkuje zbiór docelowy Ω_c w postaci relacji $\hat{\Omega}_{rzpw} \subseteq \Omega_c$, zaś wyznaczają operatory transformacji $\mathcal{L}_{np}$ i kinetyczny $\mathcal{L}$. Objasniono również pojęcia dziedzin funkcjonowania obiektu: wejściowej i docelowej w postaci uogólnionej, definiowanej jako rozmaitości $\hat{\Omega}_{0pw}$, $\hat{\Omega}_{rzpw}$ wzbogacone o odpowiednie zbiory pól $\hat{\kappa}_0(\hat{\Omega}_{0pw})$, $\hat{\kappa}_{rz}(\hat{\Omega}_{rzpw})$, które wyznaczają struktury tych rozmaitości.

W niniejszym opracowaniu przedstawia się algorytm obliczeniowy przybliżony metodyki badań [7,8], zorientowany na analizę numeryczną złożonych wielogranicznych zagadnień dziedzin funkcjonowania obiektu powietrze-powietrze (podsystemu ogniowego Q_6) klasy pocisku raketowego o układzie "kaczka", z napędem startowym, wyposażonego w układ koordynatora śledzenia celu i układ proporcjonalnego samonaprowadzania [3].

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Badania obliczeniowe (rozwiązanie przykładu), ilustrujące podjęty przedmiot badań i zaproponowane metody, przeprowadzono dla wyróżnionego kierunku ataku nosiciela w tylnej półpłaszczyźnie na cel manewrujący w płaszczyźnie pionowej, dla sytuacji początkowej procesów samonaprowadzania: wysokości początkowych celu i rakiety $z_{c0} = z_{p0} = 1000$ m, prędkości początkowych celu i rakiety $V_{c0} = V_{p0} = 300$ m/s, $\gamma_{c0} = 0$, $\gamma_{pa} = \text{var}$. Wyróżnione cechy szczególne wariantu zadania oznaczamy indeksem (0) u góry po prawej stronie przy odpowiednich wielkościach.

W wyniku badań wyznaczono:

- Reprezentatywne zobrazowania $\sim \Gamma_{c0}|\tilde{x}_{c0}$, $\sim \Gamma_{n0}|\tilde{x}_{n0}$ charakterystyk celu manewrującego $\tilde{\Omega}_{c0}|\tilde{x}_{c0}$ i nosiciela atakującego $\tilde{\Omega}_{n0}|\tilde{x}_{n0}$ dla standaryzowanych warunków początkowych na przyjętym kierunku ataku.
- Zbiór zagadnień częściowych $\{< \Omega_{0pw}^{(i)}, \Omega_{rzpw}^{(i)}; \mathcal{L}^{(i)} >\}$, $i = 0, \dots, 5$ dziedzin funkcjonowania dla reprezentatywnego zbioru hipotez $\{HRC_i\}$, $i = 0, \dots, 5$ o ruchu celu manewrującego.
- Rozwiązania zagadnień częściowych dla zbioru hipotez o ruchu celu: klasy manewrów prędkością HRC_0 , HRC_1 ; klasy manewrów górką HRC_2 , ..., HRC_4 ; manewru półpętlą HRC_5 .
- Własności zbioru operatorów $\mathcal{L}_{np}^{(i)}$, $\mathcal{L}^{(i)}$ przekształceń rozmaitości $\Omega_{0npw}^{(i)}$, $\Omega_{0pw}^{(i)}$, $\Omega_{rzpw}^{(i)}$.
- Własności zbioru dziedzin funkcjonowania $< \Omega_{0pw}^{(i)}, \kappa_{0pw}^{(i)}(\Omega_{0pw}^{(i)}) >$, $< \Omega_{rzpw}^{(i)}, \kappa_{rzpw}^{(i)}(\Omega_{rzpw}^{(i)}) >$ w aspekcie analiz ilościowej i jakościowej, globalnej i lokalnej (np. skuteczności manewrów ataku nosiciela i manewrów obronnych celu).

Stwierdzono, iż przekształcenia $\mathcal{L}_{np}$, $\mathcal{L}$ są gładkie, wzajemnie jednoznaczne, zachowujące orientację obszarów. Własności te uzasadniają spełnienie koniecznych warunków agregacji rozwiązań częściowych $\Omega_{0pw}^{(i)}$, $\Omega_{rzpw}^{(i)}$; $i = 0, \dots, 5$ do globalnych rozmaitości $\Omega_{0pw}^{(0)}$, $\Omega_{rzpw}^{(0)}$. Zauważamy, iż wspomniane własności umożliwiają zbadanie, przynajmniej w sensie teoretycznym, części wspólnej obszarów $\hat{\Omega}_{0pw}$ nazwanej gwarantowaną dziedziną funkcjonowania obiektu p-p w sytuacji celu manewrującego. W omawianych badaniach ograniczono się do wyznaczenia aproksymacji zewnętrznej $\overline{\hat{\Omega}}_0^{(0)}$ obszaru $\hat{\Omega}_0^{(0)}$. Stwierdzono, iż:

- Aproksymacja zewnętrzna gwarantowanego obszaru samonaprowadzania $\overline{\hat{\Omega}}_0^{(0)}$ jest obszarem jednospójnym, ograniczonym krzywą zamkniętą, składającą się z łuków, będących wycinkami krzywych brzegowych obszarów samonaprowadzania, odpowiadających kryterialnym manewrom obronnym celu.

- Szczególne własności obszaru $\bar{\Omega}_0^{(0)}$ uzasadniają możliwość wydzielenia podobszaru $\bar{\Omega}_{0m}^{(0)}$ semioptymalnych warunków startu rakiety na cel manewrującej.

Wyniki badań potwierdzają celowość formułowania zagadnień dynamiki procesów końcowej fazy ataku nosiciela i inicjacji procesów samonaprowadzania z uwzględnieniem manewrów obronnych celu "ostatniej szansy" (riposty obronnej). Udowodniono, iż możliwe są skuteczne manewry obronne celu, zaś z pozycji nosiciela – uzasadniono potrzebę precyzyjnej realizacji procesów ataku nosiciela, aby wypracować suboptymalne warunki samonaprowadzania z obszaru $\bar{\Omega}_{0m}^{(0)}$.

Zwróćmy uwagę, iż sformułowania odpowiednich wymagań w problemie syntezy układu samonaprowadzania, dotyczące doboru charakterystyk geometrycznych, aerodynamicznych, masowych, metody samonaprowadzania, układów sterowania i stabilizacji determinują pożądane własności dziedzin funkcjonowania podsystemu ogniowego w uwarunkowaniach procesów walki powietrznej.

2. Modele strukturalny i kinetyczny podsystemu ogniowego

W pracy [3], objaśniono pojęcie środowiska systemu procesów samonaprowadzania. Zaproponowano przyjęcie, jako istotnego elementu tej struktury, autonomicznych charakterystyk:

$$[\tilde{\Omega}_{c0}, \tilde{\Omega}_{n0}, \tilde{\Omega}_{p0}] , \quad (2.1)$$

obiektów systemu samonaprowadzania: celu $\tilde{\Omega}_{c0}$, nosiciela $\tilde{\Omega}_{n0}$, pocisku rakietowego $\tilde{\Omega}_{p0}$. Wymienione charakterystyki są wykorzystywane w problemie syntezy systemu procesów walki powietrznej. Odwołując się do metody syntezy systemu procesów samonaprowadzania podanej w pracach [3,6,7] zauważamy, iż pierwszoplanową rolę spełniają zagadnienia elementów struktury systemu procesów walki, jako spójnej teorii interpretacji i formułowania problemów dynamicznych oraz metod badania dziedzin funkcjonowania:

- a) element strukturalny ES-11, reprezentujący klasę procesów walki φ_{pw11} , dla jednej realizacji procesu samonaprowadzania na zadany manewr obronny celu (podstawowy elementarny);
- b) element strukturalny ES-12, reprezentujący klasę procesów walki φ_{pw12} dla wszystkich dopuszczalnych procesów samonaprowadzania z zadany warunkiem początkowym w postaci standaryzowanej na zadany manewr celu, prowadzący do zbadania infinitezimalnego podobszaru Ω_{e0i} dziedziny funkcjonowania;

- c) element strukturalny ES-21, reprezentujący klasę procesów walki φ_{pw21} dla jednej dopuszczalnej sytuacji początkowej procesów samonaprowadzania w przypadku celu manewrującego (podstawowy elementarny w klasie manewrującego celu);
- d) element strukturalny ES-22, reprezentujący klasę procesów walki φ_{pw22} dla zadanej sytuacji początkowej procesów samonaprowadzania w postaci standaryzowanej w przypadku celu manewrującego, prowadzący do zbadania infinitesimalnego gwarantowanego podobszaru $\hat{\Omega}_0$ dziedziny funkcjonowania.

Na bazie wyszczególnionych elementów wyróżniamy dwa warianty metody zbadania różnorodności gwarantowanej dziedziny funkcjonowania $\hat{\Omega}_0$:

- w oparciu o elementy a, b i operacji iloczynu i sumy mnogościowej

$$\hat{\Omega}_0 = \bigcup_{e \in E} \bigcap_{i \in I} \Omega_{aei}, \quad (2.2)$$

- w oparciu o elementy b, c i operacji sumy mnogościowej

$$\hat{\Omega}_0 = \bigcup_{e \in E} \hat{\Omega}_e. \quad (2.3)$$

W dalszej części rozważań podamy interpretację przedmiotu badań w (p.2.2) w ujęciu elementów c i d , zaś procedurę rozwiązania zagadnienia w (p.3) na bazie elementów a, b i operacji (2.2).

2.1. Przybliżone rozwiązania charakterystyk autonomicznych obiektów układu samonaprowadzania

2.1.1. Charakterystyki obiektu celu manewrującego

Przedstawia się badania charakterystyk celu manewrującego w płaszczyźnie pionowej – hipotetycznego obiektu C klasy samolotu myśliwskiego z załogą, traktowanego jako punkt materialny i wykonującego manewry w płaszczyźnie pionowej, sterowane przeciążeniem $\vec{n}_c = [n_{cx}, n_{cz}]$. Uwzględniono ograniczenia sterowań typu lokalnego i globalnego, które są uwarunkowane: przeciążeniem dopuszczalnym $n_{c zg}$ ($n_{c zg} = 8$), przeciążeniem rozporządzalnym, graniczną sprawnością psychofizyczną pilota na podstawie wyników pracy [2].

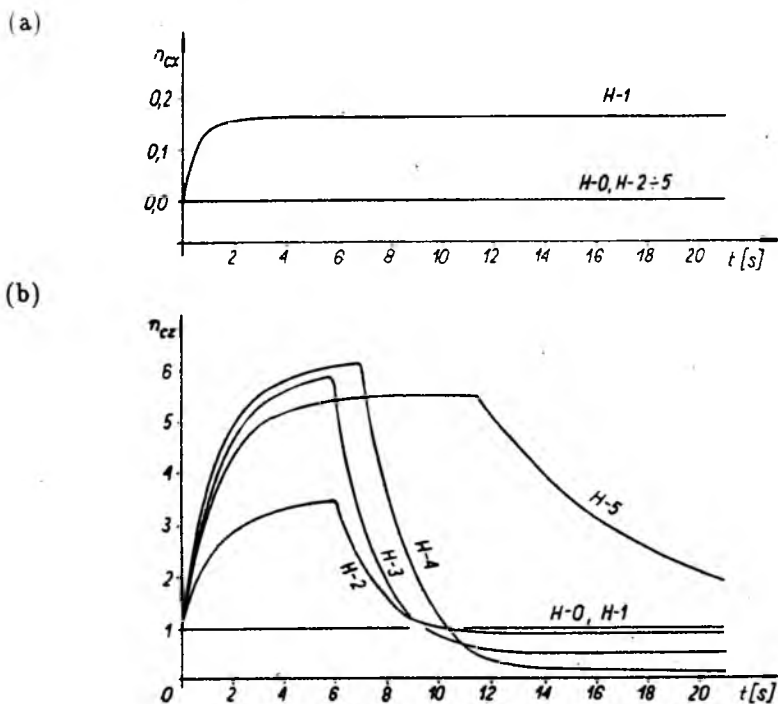
Zbadano:

- a) dziedzinę sterowania (rys.1) $\Omega_{c0} | \tilde{x}_{c0}$ z warunkiem początkowym standaryzowanym

$$\tilde{x}_{c0} = [\tilde{x}_{c0}, z_{c0}, V_{c0}, \gamma_{ac0}] \equiv [0, z, V, \gamma_{ac0}]$$

dla lotu poziomego $\gamma_{ac0} = 0$, na wysokości $z_{c0} = 300$ m, z prędkością $V_{c0} = 300$ m/s;

- b) reprezentatywny zbiór HRC hipotez o ruchu celu $\{HRC_i\}$, $i = 0 \div 5$, o elementach $\tilde{n}_{ci} = [n_{cxi}(t), n_{czi}(t)] | \tilde{x}_{c0}$, które wyznaczają programujące składowe przeciążenia stycznego n_{cxi} (rys.1a) i przeciążenia normalnego n_{czi} (rys.1b);

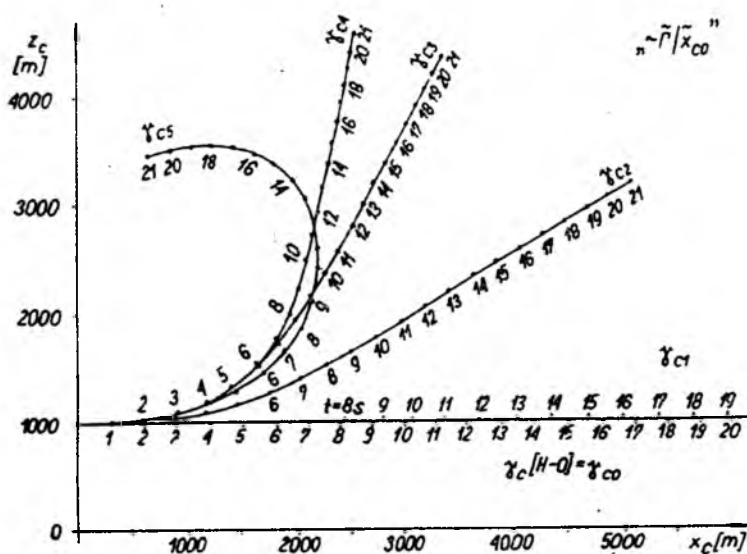


Rys. 1.

- c) obraz (rys.2) portretu orientorowego $\tilde{\Gamma}_{c0} | \tilde{x}_{c0}$ w przestrzeni $0x_c z_c$, reprezentowany zbiorem trajektorii γ_{ci} $i = 0, \dots, 5$, odpowiadających poszczególnym hipotezom o ruchu celu (pkt.b).

W zbiorze hipotez HRC o ruchu celu (pkt.b) wyróżniono:

- d) klasę manewrów prędkością: HRC-0 lot jednostajny poziomy, HRC-1 – rozpędzanie w locie poziomym do prędkości maksymalnej w reżimie pełnego dopalania;
- e) klasę manewrów "górką": HRC-2 – górką płaską (30°) o kącie nachylenia toru 30° , HRC-3 – górką stromą (60°), HRC-4 – górką intensywną (78.2°);
- f) klasę manewrów pólpetli: HRC-5 – pólpetla wykonana z lotu poziomego dla funkcji sterującej n_{cz} (H.5) (rys.1b), zobrazowana trajektorią γ_{c5} (rys.2).



Rys. 2.

2.1.2. Charakterystyka nosiciela

Przedstawia się badania charakterystyk nosiciela w końcowej fazie ataku (wprowadzania, odpalania i wyprowadzania) – hipotetycznego obiektu N , klasy samolotu myśliwskiego z załogą, traktowanego jako punkt materialny i wykonujący lot w płaszczyźnie pionowej, sterowany przeciążeniem $\bar{n}_p = [n_{px}, n_{pz}]$. Uwzględniono ograniczenia sterowań typu lokalnego i globalnego, uwarunkowane między innymi przeciążeniem dopuszczalnym n_{pzg} ($n_{pzg} = 8$) i graniczną sprawnością psychofizyczną pilota [2], wymogami H_{nwp}^* , H_{nwypp}^* bezpieczeństwa lotu w procesie wprowadzania, wyprowadzania. Zbadano:

- a) dziedzinę sterowania $\bar{n}_{n0}|\bar{x}_{n0}$ z warunkiem docelowym standaryzowanym:

$$\bar{x}_{n0} = [\bar{x}_{n0}, z_{n0}, V_{n0}, \bar{\gamma}_{an0}] \equiv [0, z_{n0}, V_{n0}, \dots],$$

$z_{n0} = 1000$ m, $V_{n0} = 300$ m/s. Dziedzinę zobrazowano (rys.3) zbiorem sterowań $u_{ni}|\bar{x}_{n0} \equiv \bar{n}_{ni}|\bar{x}_{n0}$ programujących składowe wektora przeciążenia $[n_{cri}, n_{csi}]|\bar{x}$, $i = 1, \dots, 4$.

- b) obraz portretu orientorowego $\bar{\Gamma}_n|\bar{x}_{n0}$ w przestrzeni konfiguracji $0_n x_n z_n$ reprezentowany zbiorem trajektorii γ_{ni} $i = 0, \dots, 4$ (rys.4), odpowiadających dopuszczalnym sterowaniom (pkt.a), w tym trajektoria brzegowa γ_{npg} , uwarunkowana wymogiem bezpieczeństwa nosiciela w fazie wprowadzania (H_{nwp}^*

gdzie:

$$\lambda_{ngd} = -35.5^\circ, \quad \lambda_{ngg} = 40^\circ.$$

2.1.9. Charakterystyka obiektu powietrze-powietrze

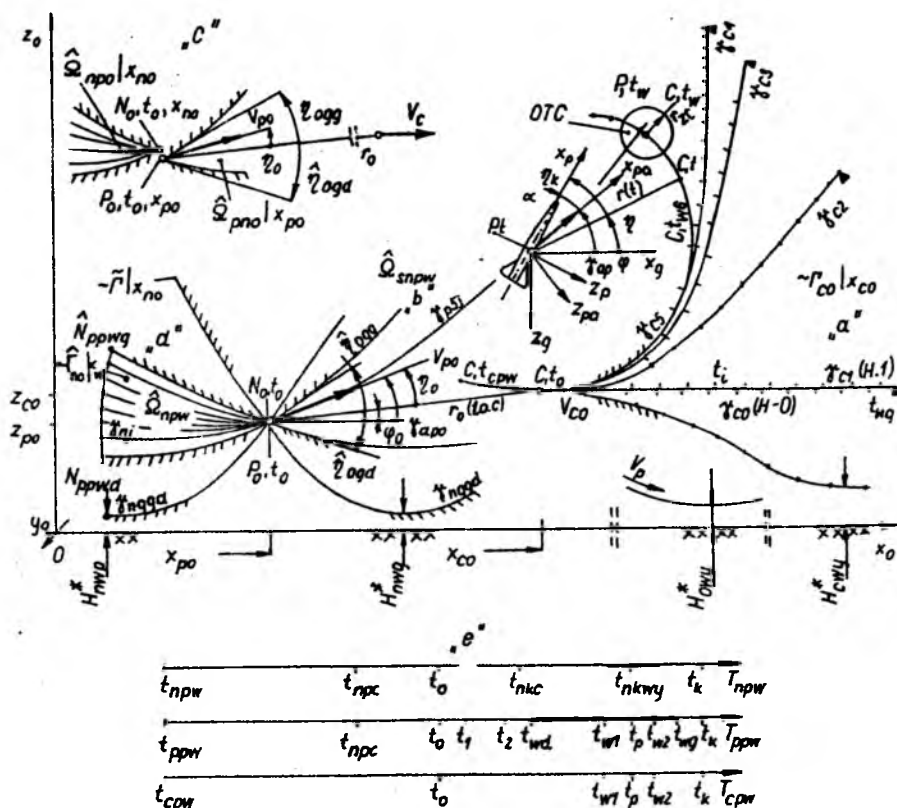
Koncepcję badań apriorycznych charakterystyk $\tilde{\Omega}_{p0}$ obiektu powietrze-powietrze (P), jako otwartego układu sterowania, rozpatrzono w pracy [9]. Zagadnienie analizy A_p jest więc identyczne do A_c w ogólnym sformułowaniu, zaś różnice dotyczą specyfiki obiektu P : obiekt bezzałogowy o znacznie większym przeciążeniu dopuszczalnym ($n_{pzg} = 10$), z układem sterowania składowymi przeciążenia normalnego i bocznego, z ograniczeniem na sterowanie typu globalnego – resursu napędu sterów, wyrażonym ograniczeniem czasu lotu sterowanego $t_{wg} = 21$ s.

Obiekt P opisano szczegółowo w pracy [3] – pocisk raketowy klasy powietrze-powietrze z układem proporcjonalnego samonaprowadzania, o układzie aerodynamicznym "kaczka", układ bryły sztywnej o zmiennej masie z wychylanymi nieodkształcalnymi sterami aerodynamicznymi przeznaczonymi do sterowania składowymi przeciążenia normalnego i bocznego, z napędem raketowym startowym. Obiekt P w strukturze LSB stanowi podsystem ogniowy Q_6 [3,7] – i jako podukład przenoszenia Q_{61} wyposażony jest w koordynator śledzący za celem oraz układ formowania sygnałów proporcjonalnego samonaprowadzania, zaś jako podukład rażenia Q_{62} jest wyposażony w głowicę bojową z zespołem czujników odległościowych i kontaktowych.

2.2. Model kinetyczny podsystemu ogniowego w uwarunkowaniach procesów walki powietrznej w sytuacji celu manewrującego i zadanych warunków początkowych procesów samonaprowadzania w postaci standaryzowanej na wyróżnionym kierunku ataku

Model kinetyczny podsystemu Q_{61} jest ukierunkowany na objaśnienie podstawowego przedmiotu podjętych badań, który dotyczy kompleksowego ujęcia procesów samonaprowadzania obiektu p-p na cel manewrujący w uwarunkowaniach procesów walki powietrznej – i ułożenia algorytmu metody przybliżonej celowościowego zobrazowania charakterystyk funkcjonowania obiektu w postaci dziedzin funkcjonowania zaproponowanych w pracy [7].

Zgodnie z uwagami we wstępie do niniejszego rozdziału – zagadnienie syntezy elementów walki powietrznej (p.2.1) objaśnimy na rys.5, bazując na elementach strukturalnych ES-21 (p.2c) i ES-22 (p.2d). Rozpatrzono przypadek samonaprowadzania obiektu na cel manewrujący w płaszczyźnie pionowej Ox_0z_0 zanurzonej w układzie odniesienia $Ox_0y_0z_0$.



Rys. 5.

Na rys.5 wyróżniono:

1. Proces manewru obronnego celu $p(C_{pw}, C_0)$ w fazie ataku nosiciela i reprezentatywny zbiór $\{\gamma_{ci}(t; x_{co})\}$, $i = 0, \dots, 5$ manewrów obronnych celu "ostatniej szansy" podjętych ze stanu początkowego $x_{co} = [x_{co}, z_{co}, V_{co}, \gamma_{co}]$, odpowiadających hipotezom o ruchu celu HRC (p.2.1.2), należących do przestrzeni charakterystyk $\Omega_{co}|x_{co}$ celu manewrującego z warunkiem standaryzowanym $\tilde{x}_{co}[0, z_{co}, V_{co}, 0]$. Dyskretny zbiór procesów celu manewrującego interpretujemy również jako przybliżone zobrazowanie $\sim \tilde{I}_{co}|x_{co}$ pola orientorowego $\tilde{I}_{co}|x_{co}$ (rys.5a).
2. Rozmaiłość procesów samonaprowadzania $\hat{N}_{spw}$ obiektu P na cel C , (rys.5b) reprezentowana zbiorem $\{\gamma_{pij}(t; x_{po}, t_0)\}$ procesów samonaprowadzania na cel manewrujący $\{\gamma_{ci}(t; x_{co}, t_0)\}$, $i = 0, \dots, 5$, inicjowa-

nych zdarzeniami startu rakiety $\{x_{pn0ij}(t_0)\}$ przez sterowalne zdarzenia odpalania $\{x_{np0ij}(t_0)\}$ w dopuszczalnych procesach ataku nosiciela $\{\gamma_{nj}(t; x_{npw}, x_{cpw}, t_{pw}, x_{np0}, t_0)\}$, $j = k(i) \div l(i)$.

Zauważmy, iż wyszczególnione zbiory reprezentują odpowiednie rozmaitości: $\hat{\Omega}_{npw}, \Omega_{cpw}|x_{c0}, \hat{\Omega}_{pn0}|x_{p0}, \Omega_{np0}|x_{n0}, \hat{\Omega}_{npw}$ (rys.5).

3. Rozmaitości dualne odpalania $\hat{\Omega}_{np0}|x_{n0}$ i startu $\hat{\Omega}_{pn0}|x_{p0}$, reprezentowane zbiorami zdarzeń $\{x_{np0ij}(t_0)\}$, $\{x_{pn0ij}(t_0)\}$, $i = 0, \dots, 5$, $j = k(i) \div l(i)$ (rys.5c).
4. Rozmaitość dopuszczalnych procesów ataku nosiciela $\hat{\Omega}_{npw}$ z dziedziną $\hat{\Omega}_{np0}$ realizacji zadania odpalania, reprezentowaną zbiorem procesów $\{\gamma_{nj}(t; x_{npw}, x_{cpw}, t_{pw})\}$, $j = k(i) \div l(i)$ sterowalności zdarzeń odpalania $\{x_{np0ij}(t_0)\}$. Dyskretny zbiór procesów ataku nosiciela (rys.5d) na cel manewrujący interpretujemy również jako przybliżone zobrazowanie $\sim \hat{\Gamma}_{n0}|x_{n0}$ pola orientorowego $\hat{\Gamma}_{n0}|x_{n0}$.
5. Dziedzinę czasową T_{pw} systemu procesów walki φ_{pw} definiowaną iloczynem kartezjańskim [7]:

$$T_{pw} = T_{npw} \times T_{ppw} \times T_{cpw},$$

w którym czynniki wyznaczają dziedziny czasowe funkcjonowania podukładów: nosiciela T_{npw} , rakiety T_{ppw} , obiektu celu T_{cpw} .

6. Przestrzeń podstawową N_0 warunków początkowych procesów samonaprowadzania, sparametryzowaną układem współrzędnych $N_0 r_0 \eta_0$, gdzie: r_0 - początkowa odległość obiektu P od celu C , η_0 - początkowy kąt wyprzedzania.
 7. Układy współrzędnych: $Px_g z_g$ - związany z ziemią o początku ustalonym na rakiecie, $Px_p z_p$ - związany z rakietą, $Px_{pa} z_{pa}$ - związany z przepływem.
 8. Parametry lotu rakiety: prędkość rakiety $[V_p, \gamma_{ap}]$, kąt natarcia α , kąt pochylenia l.o.c. - φ , kąt wyprzedzania η , kąt śledzenia koordynatora η_k .
- 3. Formalizm przybliżonej metody rozwiązania zagadnienia dziedzin funkcjonowania**

Odwołując się do podstawowych opracowań [3,7,8] zauważamy, iż objaśniają formalizm aksjomatyczny i analityczny formułowania zagadnień systemu pro-samonaprowadzania i metody zobrazowania celowościowego wyników w poddziedzin funkcjonowania. W rezultacie prowadzi to do złożonych zagadnień

wielogranicznych, których rozwiązanie jest możliwe w oparciu o przybliżone metody numeryczne.

3.1. Sformułowanie zagadnienia obliczeniowego

Planuje się przeprowadzenie badań obliczeniowych (rozwiązanie przykładu), ilustrujących podjęty przedmiot badań i zaproponowane metody – dla wyróżnionego kierunku ataku nosiciela w tylnej półsfery (φ_0, χ_0) na cel manewrujący w płaszczyźnie pionowej, dla zbioru danych: zerowych wartości kątów pochylenia φ_0 i odchylenia χ_0 linii obserwacji celu w chwili t_0 – odpalania i startu rakiety; zbioru HRC (p.2.1.1) reprezentatywnych hipotez o ruchu celu manewrującym; początkowych warunków ruchu celu i startu rakiety: wysokości $z_{c0} = z_{p0} = 1000\text{m}$, prędkości $V_{c0} = V_{p0} = 300 \text{ m/s}$, kątów pochylenia wektorów prędkości $\gamma_{c0} = 0$, $\gamma_{p0} = \text{var}$.

Z treści zadania wynika, iż zadane warunki początkowe w postaci standaryzowanej są identyczne do przyjętych w (p.2.1.1), (p.2.1.2), co umożliwia wykorzystanie do rozwiązania zagadnienia opracowanych charakterystyk $\tilde{\Omega}_{c0}|\tilde{x}_{c0}$ (p.2.1.1), $\tilde{\Omega}_{n0}|\tilde{x}_{n0}$ (p.2.1.2).

3.2. Algorytm rozwiązań przybliżonych

Proponowana przybliżona procedura badawcza dziedzin funkcjonowania obejmuje:

1. Wybór z tablic charakterystyk autonomicznych celu manewrującego $\tilde{\Omega}_{c0}|\tilde{x}_{c0}$, obiektu p-p $\tilde{\Omega}_{p0}|\tilde{x}_{p0}$ i nosiciela $\tilde{\Omega}_{n0}|\tilde{x}_{n0}$ dla warunków początkowych $\tilde{x}_{c0}$, $\tilde{x}_{p0}$, $\tilde{x}_{n0}$ w postaci standaryzowanej na zadanym kierunku ataku (p.3.1).
2. Dyskretyzację rozmaitości $\tilde{\Omega}_{c0}|\tilde{x}_{c0}$ do zbioru HRC hipotez $\{HRC_i\}$, $i = 0, \dots, 5$ o ruchu celu z warunkiem początkowym standaryzowanym $\tilde{x}_{c0}$.
3. Operację uzupełnienia warunków początkowych:

$$\tilde{x}_{c0} \rightarrow x_{c0}, \quad \tilde{x}_{p0} \rightarrow x_{p0}, \quad \mathcal{L}_{np}(x_{p0}) \rightarrow x_{n0},$$

i wyznaczenia parametrów początkowych procesów samonaprowadzania: odległości r_0 i prędkości względnej $\dot{r}_0$ obiektów P i C , kąta φ_0 i prędkości kątowej $\dot{\varphi}_0$ pochylenia l.o.c, kątów wyprzedzenia: rakiety η_0 , nosiciela η_{0n} – wg:

$$\eta_{0n} = \lambda_{n0} - \varphi_0.$$

4. Wstępne oszacowanie obszaru przeszukania $\tilde{\Omega}_0$ w przestrzeni N_0 w zakresie początkowych odległości $\tilde{r}_{0d} \leq r_0 \leq \tilde{r}_{0g}$ i kątów wyprzedzania $\tilde{\eta}_{0d} \leq \eta_0 \leq \tilde{\eta}_{0g}$.
5. Uporządkowanie ograniczeń zmiennych stanu i wyjść obiektów C, P, N oraz zobrazowanie ich w przestrzeni podstawowej warunków początkowych procesów samonaprowadzania N_0 w postaci odpowiednich ograniczeń dolnych $\eta_{0\dots gd}$ i górnych $\eta_{0\dots gg}$ początkowych kątów wyprzedzania η_0 :

a. Klasa ograniczeń dynamicznych d dopuszczalnego przedziału kątów wyprzedzania $[\eta_{0dgd}, \eta_{0dgg}]$ obiektu P , uwarunkowana ograniczeniami: przeciążenia dopuszczalnego η_{zg} , przeciążenia rozporządzalnego η_{zrg} , krytycznej wartości parametru prędkości p_{wkr} , niestatecznością metody naprowadzania typu k_1, k_2 [3], ograniczeniem dolnym t_{wd} i górnym t_{wg} dopuszczalnego przedziału czasu t_w realizacji procesu samonaprowadzania:

$$\eta_{0dgd}(r_0) \leq \eta_{0d}(r_0) \leq \eta_{0dgg}(r_0),$$

$$r_{0d} \leq r_0 \leq r_{0g}.$$

b. Klasa ograniczeń k dopuszczalnego przedziału $[\eta_{0kgd}, \eta_{0kgg}]$ kątów wyprzedzania η_{0k} , uwarunkowana ograniczeniem φ_{kg} zakresu kątów koordynatora φ_k śledzenia celu wyznaczonym wg:

$$\eta_{0kgg} \leq \eta_{0k} \leq \eta_{0kgd}.$$

c. Klasa ograniczeń kp dopuszczalnego przedziału $[\eta_{0kpgd}, \eta_{0kpgg}]$ kątów wyprzedzania η_{0kp} uwarunkowana ograniczeniem $\dot{\varphi}_{kg}$ prędkości katowej koordynatora $\dot{\varphi}_k$ śledzenia celu:

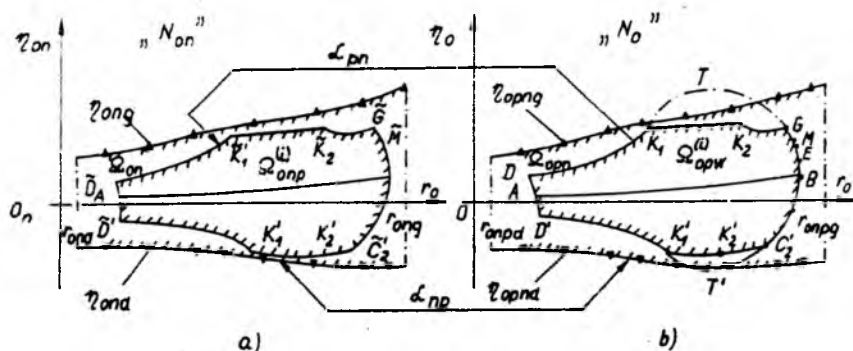
$$\eta_{0kpgd} \leq \eta_{0kp} \leq \eta_{0kpgg}.$$

d. Klasa ograniczeń hp zakresu dolnego η_{0hpgd} kątów wyprzedzania η_{0hp} , uwarunkowana ograniczeniem H_{pg}^* minimalnej wysokości przelotu rakiety nad powierzchnią ziemi (rys.5).

e. Klasa ograniczeń η_{pn} dopuszczalnego przedziału $[\eta_{0pnd}, \eta_{0png}]$ kątów wyprzedzania η_0 , uwarunkowana ograniczeniami dopuszczalnego przedziału $[\eta_{0nd}, \eta_{0ng}]$ kątów wyprzedzania η_{0n} nosiciela (rys.6) wg relacji przekształcenia:

$$\eta_{0pnd} = \mathcal{L}_{np}(\eta_{0nd}),$$

$$\eta_{0png} = \mathcal{L}_{np}(\eta_{0ng}).$$



Rys. 6.

6. Sformułowanie zbioru zagadnień częściowych dla wyodrębnionego podukładu samonaprowadzania:

$$\langle \Omega_0^{(i)}, \Omega_{rz}^{(i)}, \mathcal{L}_i \rangle, \quad \Omega_{rz}^{(i)} \subset \Omega_c, \quad i = 0, \dots, 5,$$

przyporządkowanych poszczególnym hipotezom HRC_i o ruchu celu (p. 3.2.2).

7. Metodę rozwiązania zagadnienia częściowego $\Omega_0^{(i)}$.

- a. Badanie obszaru samonaprowadzania $\Omega_{0(dc)}^{(i)}$, posługując się me tołą [3,5], z uwzględnieniem ograniczeń klasy d (p.5a):

$$\Omega_{0(dc)}^{(i)} = \left[\eta_0(r_0) : \eta_{0dg d}(r_0) \leq \eta_0(r_0) \leq \eta_{0dgg}(r_0), \quad r_{0dd} \leq r_0 \leq r_{0dg} \right].$$

Na rys.6b obszar $\Omega_{0(dc)}^{(i)}$ jest wyznaczony krzywą brzegową $DAD'K'_1T'C'_2BEMGK_1D$.

- b. Badanie wpływu ograniczeń opisanych w punktach 7c÷7e na konfigurację $\Omega_{0(dc)}^{(i)}$, prowadzące do rozwiązania zagadnienia częściowego wyodrębnionego $\Omega_0^{(i)}$ o konfiguracji (rys.6b) wyznaczonej krzywą brzegową $DAD'K'_1K'_2C'_2BEMGK_2K_1D$. Zauważamy, iż czynne są ograniczenia: k - na łukach $K_1K_2, K'_1K'_2$; kp - na łuku K_2G ; hp - na łuku $K'_2C'_2$.

8. Rozwiązanie częściowe $\Omega_{0pw}^{(i)}$ w uwarunkowaniach procesów ataku nosiciela, stanowiące część wspólną obszarów,:

$$\Omega_{0pw}^{(i)} = \Omega_0^{(i)} \cap \Omega_{0pn},$$

gdzie:

$$\Omega_{0pn} = \mathcal{L}_{np}(\Omega_{0n}).$$

Zauważamy, iż na rys.6b przedstawiono przypadek, gdy $\Omega_{0pw}^{(i)} \equiv \Omega_0^{(i)}$, który jest zgodny z wymaganiami sformułowanymi w [7].

9. Badanie aproksymacji zewnętrznej $\bar{\Omega}_0$ gwarantowanego obszaru $\hat{\Omega}_0$ samonaprowadzania w sytuacji celu manewrującego w uwarunkowaniach procesów walki powietrznej w zbiorze reprezentatywnych manewrów obronnych HRC (p.2.1.1), (p.3.2.2), wg operacji:

$$\bar{\Omega}_0 = \bigcap_{i=0}^5 \Omega_{0pw}^{(i)}.$$

10. Wyznaczenie obszaru $\bar{\Omega}_{0np}^{(0)}$ - sterowalnych w procesie ataku, gwarantowanych warunków odpalania rakiety:

$$\bar{\Omega}_{0pn}^{(0)} \equiv \bar{\Omega}_0^{(0)}, \quad \bar{\Omega}_{0np}^{(0)} \equiv \mathcal{L}_{pn}(\bar{\Omega}_0^{(0)}).$$

4. Obszary samonaprowadzania

W niniejszym rozdziale przedstawia się wyniki badań obszarów samonaprowadzania obiektu powietrze-powietrze [3], (p.2.1.3) w uwarunkowaniach walki powietrznej (celu manewrującego C (p.2.1.1), nosiciela (p.2.1.2.)) jako rozwiązania zbioru zagadnień częściowych (p.3.2.6) metodą przybliżoną (p.3.2) dla danych (p.3.1).

Przyjęto oznaczenia $\Omega_0^{(i)}$ obszarów samonaprowadzania. Indeks i określa numer wybranej hipotezy o ruchu celu (p.2.1.1).

Algorytm postępowania (p.3.2), prowadzący do wyznaczenia obszaru $\bar{\Omega}_0$, który aproksymuje zewnętrznie obszar gwarantowany $\hat{\Omega}_0$ wymaga:

- zbadania obszarów $\Omega_0^{(i)}$ $i = 0, \dots, 5$;
- wyznaczenia obszaru $\bar{\Omega}_0$, będącego częścią wspólną obszarów $\Omega_0^{(i)}$ $i = 0, \dots, 5$, wg:

$$\bar{\Omega}_0 = \bigcap_{i=1}^5 \Omega_0^{(i)}. \quad (4.1)$$

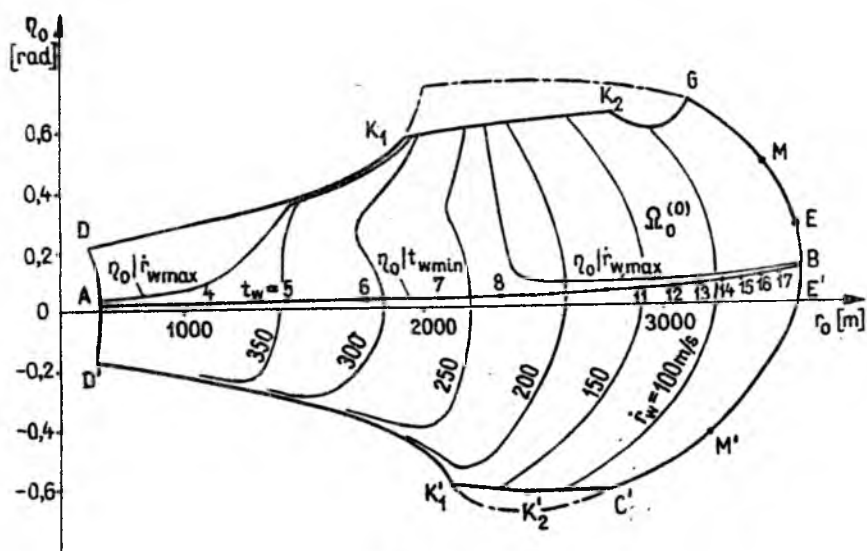
Badania wykazały, że obszary $\Omega_0^{(i)}$ w płaszczyźnie $0r_0\eta_0$ są rozmaitościami spójnymi. Brzegi obszarów stanowią krzywe skierowane zamknięte, bez punktów wielokrotnych (kontury), złożone z łuków regularnych o skończonej liczbie punktów wierzchołkowych. Każdy łuk krzywej brzegowej składa się z punktów, które charakteryzują się odpowiednią własnością dynamiczną uwarunkowaną czynnym ograniczeniem ze zbioru ograniczeń (p.3.2.5). Obszary samonaprowadzania $\langle \Omega_0^{(i)}, \kappa(\Omega_0^{(i)}) \rangle$ są wyznaczane na bazie charakterystyk rozwiązania zagadnień dwugranicznych [3]: profili prędkości wejścia rakiety w otoczenie celu i profili czasu realizacji procesów samonaprowadzania. Wymienione charakterystyki umożliwiają wykreślenie: zbioru linii stałych prędkości wejścia $\dot{r}_w = \text{const}$ rakiety w otoczenie celu, zbioru linii stałych czasów realizacji procesów samonaprowadzania $t_w = \text{const}$, linii $\eta_0 = \eta_0(r_0)|\dot{r}_w \max$ (w skróconym zapisie $\eta_0|\dot{r}_w \max$) i $\eta_0 = \eta_0(r_0)|t_w \min$ (w skróconym zapisie $\eta_0|t_w \min$), które odpowiednio wyznaczają zbiory warunków początkowych $(\eta_0, r_0) \in \Omega_0$ procesów samonaprowadzania o własnościach maksymalnej prędkości wejścia i minimalnego czasu samonaprowadzania.

Zauważmy, iż zgodnie z [3], omówione elementy obszaru samonaprowadzania wyznaczają podstawowe własności dynamiczne procesów samonaprowadzania. Zbiór rozwiązań częściowych $\Omega_0^{(i)}$ $i = 0, \dots, 5$, dla przyjętych hipotez o ruchu celu umożliwia identyfikację wpływu poszczególnych manewrów na ewolucję własności dynamicznych. W tym celu zaproponowano relację porządkującą (odpowiednie opisanie krzywej brzegowej), polegającą na: wyszczególnieniu w postaci ciągu kolejnych łuków brzegowych obszaru $\Omega_0^{(i)}$ wraz z własnościami ich punktów, przy obejściu konturu obszaru zgodnie z dodatnim skierowaniem. Stosuje się przy tym skróconą formę opisu: $\langle \text{wycinek łuku, rodzaj manewru, typ własności} \rangle$ jak np.: $EF|HRC - 5|n_{zgg}$.

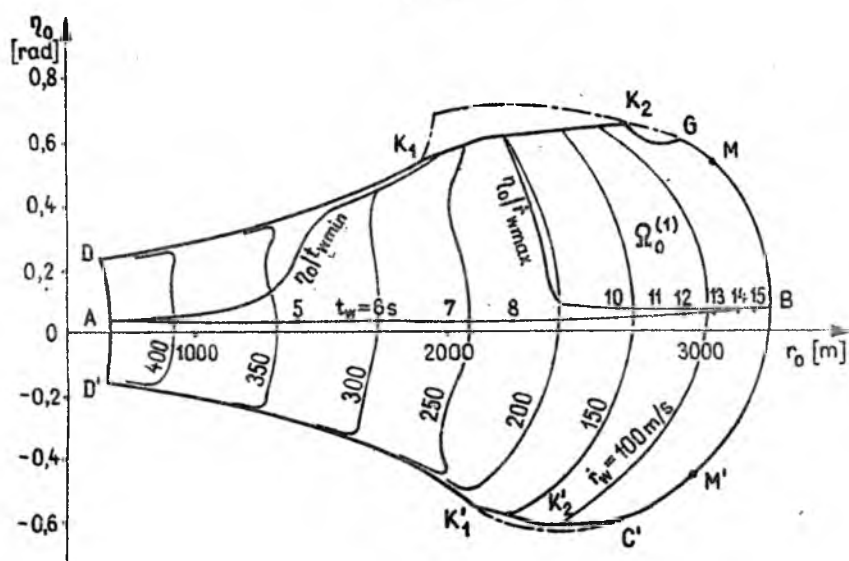
4.1. Obszary samonaprowadzania dla manewrów prędkością

Obszar samonaprowadzania $\langle \Omega_0^{(0)}, \kappa(\Omega_0^{(0)}) \rangle$ (rys.7) na cel, odbywający lot ze stałą prędkością (wg hipotezy $HRC - 0$), nazwano podstawowym. Brzeg obszaru $\Omega_0^{(0)}$ stanowi krzywa zamknięta $AD'K_1'K_2'C_2'M'E'BEMGK_2K_1DA$ bez punktów wielokrotnych, złożona z łuków regularnych, uwarunkowanych ograniczeniami (pkt. 3.2.5): $DAD'|t_{wd}$, $D'K_1'|n_{zgd}$, $K_1'K_2'|\varphi_{kgd}$, $K_2'C_2'|\eta_{ogp}$, $C_2'M'|n_{zgd}$, $M'E'|p_{wkr}$, $E'B|t_{wg}$, $EM|p_{wkr}$, $MG|n_{zgg}$, $GK_2'|\dot{\varphi}_{kg}$, $K_2K_1'|\varphi_{kg}$, $K_1D|n_{zgg}$, $r_{0gd}^{(0)} = 660 \text{ m}$, $r_{0gg}^{(0)} = 3590 \text{ m}$ ($\bar{r}_{0gg}^{(0)} = 0.184$; $\bar{r}_{0gg}^{(0)} = 1$).

Odcinki krzywej brzegowej $D'K_1'K_2'C_2'B$ stanowią zbiór η_{0gd} granicznych dolnych początkowych kątów wyprzedzenia, zaś $BEMGK_2K_1D$ - granicznych górnych η_{0gg} początkowych kątów wyprzedzania. Punkty wycinka AB krzywej $\eta_0 = \eta_0(r_0)|t_{wmin}$ charakteryzują się własnością minimalnego czasu t_{wmin} reali-



Rys. 7.



Rys. 8.

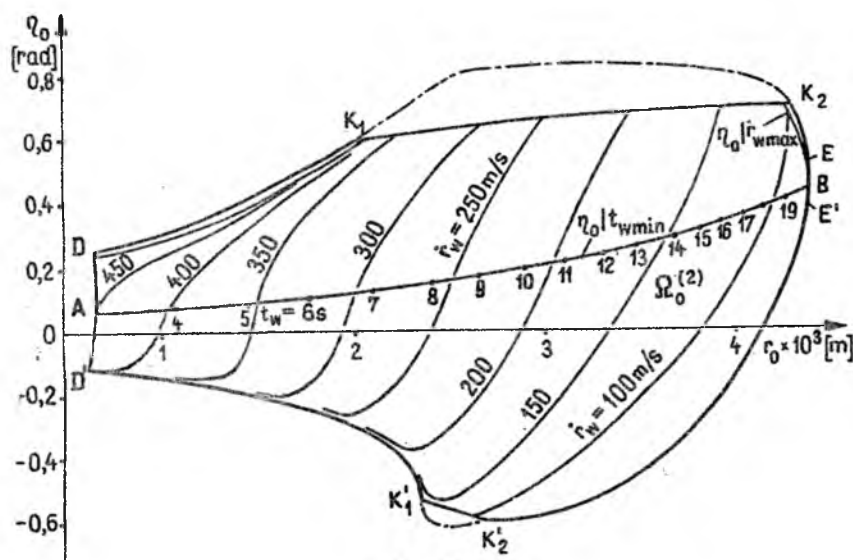
zacji procesów samonaprowadzania. Krzywa $\eta_0|t_{wmin}$ separuje obszar $\Omega_0^{(0)}$ na podobszary górny $\Omega_0^{(0)}|\eta_0 \geq \eta_{0opt}$ i dolny $\Omega_0^{(0)}|\eta_0 < \eta_{0opt}$.

Na rys.8 przedstawiono obszar samonaprowadzania $\langle \Omega_0^{(1)}, \kappa(\Omega_0^{(1)}) \rangle$ na cel wykonujący manewr prędkością wg HRC - 1 (p.2.1.1d), tj. rozpędzanie w locie poziomym do prędkości maksymalnej w reżimie pełnego dopalania. Brzeg obszaru stanowi krzywa zamknięta $AD'K'_1K'_2C'M'E'BEMGK_2K_1DA$, złożona z łuków regularnych uwarunkowanych: $DAD'|t_{wd}$, $D'K'_1|n_{zgd}$, $K'_1K'_2|\varphi_{kgd}$, $K'_2C'|n_{0gp}$, $C'M'|n_{zg}$, $M'BM|p_{wkr}$, $MG|n_{zg}$, $GK_2|\varphi_{kg}$, $K_2K_1|\varphi_{kg}$, $K_1D|n_{zg}$, $r_{0gg}^{(1)} = 3380$ m, $r_{0gg}^{(1)} = 0.94$.

Zuważamy szczególną skuteczność manewru prędkością w zakresie dużych odległości, która wynika z relacji $r_{0gg}^{(1)} < r_{0gg}^{(0)}$.

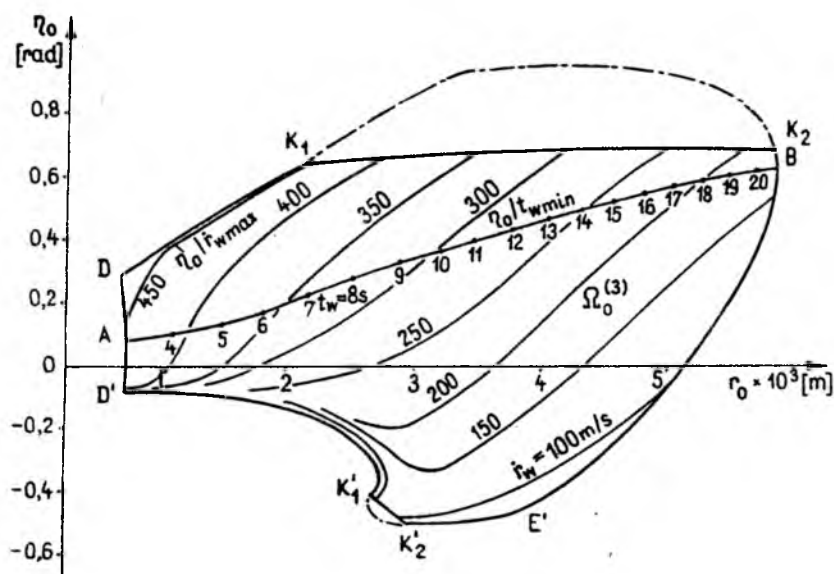
4.2. Obszary samonaprowadzania w sytuacji manewrów celu klasy "górką"

W klasie manewrów "górką" wyróżniono: górkę płaską (30°), górkę stromą (60°) i górkę stromą intensywną (78.2°).

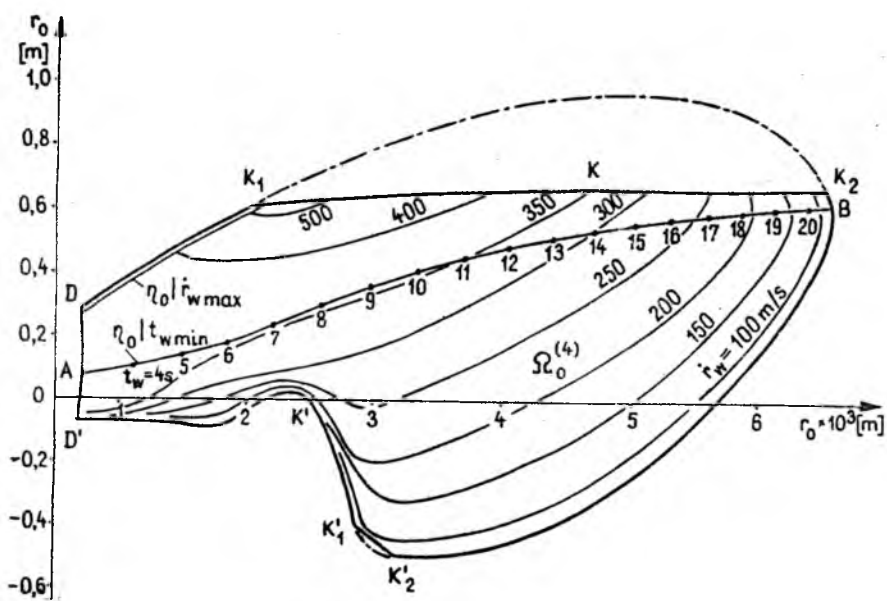


Rys. 9.

Na rys.9 przedstawiono obszar samonaprowadzania $\langle \Omega_0^{(2)}, \kappa(\Omega_0^{(2)}) \rangle$ na cel wykonujący manewr górkę płaskiej o kącie nachylenia toru 30° (wg HRC - 2,



Rys. 10.



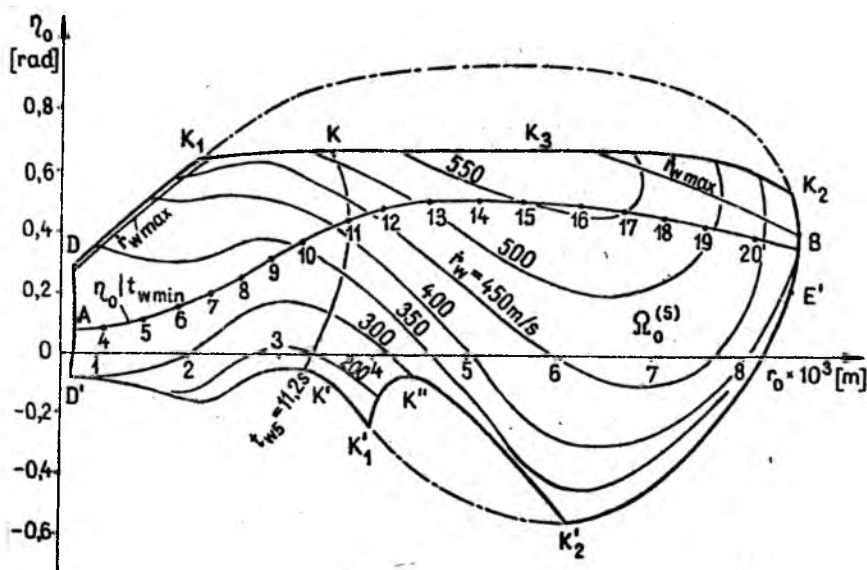
Rys. 11.

p.2.1.1e). Brzeg obszaru stanowi krzywa zamknięta $DAD'K'_1K'_2E'BK_2K_1D$, złożona z łuków regularnych: $DAD'|t_{wd}$, $D'K'_1|n_{zg}$, $K'_1K'_2|\varphi_{kg}$, $K'_2E'|p_{wkr}$, $E'B|t_{wg}$, $E'K_2|p_{wkr}$, $K_2K_1|\varphi_{kg}$, $K_1D|n_{zg}$, $r_{0gg}^{(2)} = 4400$ m, $\bar{r}_{0gg}^{(2)} = 1.22$.

Na rys.10 przedstawiono obszar samonaprowadzania $\langle \Omega_0^{(3)}, \kappa(\Omega_0^{(3)}) \rangle$ na cel wykonujący manewr górki stromej o kącie nachylenia toru 60° (wg HRC - 3, p.2.1.1e). Brzeg obszaru stanowi krzywa zamknięta $DAD'K'_1K'_2E'BK_2K_1D$ złożona z łuków: $DAD'|t_{wd}$, $D'K'_1|n_{zg}$, $K'_1K'_2|\varphi_{kg}$, $K'_2E'|p_{wkr}$, $E'BK_2|t_{wg}$, $K_2K_1|\varphi_{kg}$, $K_1D|n_{zg}$, $r_{0gg}^{(3)} = 5300$ m, $\bar{r}_{0gg}^{(3)} = 1.47$.

Wyniki badania obszaru $\langle \Omega_0^{(4)}, \kappa(\Omega_0^{(4)}) \rangle$ na cel wykonujący manewr intensywniej górki stromej o kącie nachylenia toru 78.2° (wg HRC - 4, p.2.1.1e) przedstawiono na rys.11. Brzeg obszaru $DAD'K'K'_1K'_2BK_2KK_1D$ składa się z łuków: $DAD'|t_{wd}$, $D'K'K'_1|n_{zg}$, $K'_1K'_2|\varphi_{kg}$, $K'_2BK_2|t_{wg}$, $K_2KK_1|\varphi_{kg}$, $K_1D|n_{zg}$, $r_{0gg}^{(4)} = 6520$ m, $\bar{r}_{0gg}^{(4)} = 1.82$.

4.3. Obszar samonaprowadzania $\Omega_0^{(5)}$ w sytuacji manewru celu klasy "pół-pętla"



Rys. 12.

Obszar samonaprowadzania $\langle \Omega_0^{(5)}, \kappa(\Omega_0^{(5)}) \rangle$ na cel wykonujący manewr

obronny półpętla (wg $HRC - 5$, p.2.1.1f) przedstawiono na rys.12. Brzeg obszaru stanowi krzywa zamknięta $DAD'K'K_1''K_2'E'BK_2K_3KK_1D$, złożona z łuków regularnych: $DAD'|t_{wd}$, $D'K'K_1''|n_{zg}$, $K_1''K_2'| \varphi_{kg}$, $K_2'E'|p_{wkr}$, $E'BK_2|t_{wg}$, $K_2K_3| \varphi_{kg}$, $K_3K_1| \varphi_{kg}$, $K_1D|n_{zg}$, $r_{ogg}^{(5)} = 8580$ m, $\bar{r}_{ogg}^{(5)} = 2.39$.

Linia $K'K$ (rys.12) separująca obszar $\Omega_0^{(5)}$ na podobszar przedni i tylny charakteryzuje się szczególnymi własnościami – stanowi zbiór warunków początkowych (η_0, r_0) procesów, które w jednakowym czasie $t_{w5} = 11.2$ s osiągają cel w położeniu (C, t_{w5}) na trajektorii γ_{c5} (rys.5). Oznacza to, że część przednia podobszaru stanowi zbiór warunków początkowych, które umożliwiają osiągnięcie celu na łuku $(C, t_{wd}; C, t_{w5})$, zaś część tylna – na pozostałej części łuku $(C, t_{w5}; C, t_{wg})$.

5. Aproksymacja zewnętrzna gwarantowanego obszaru samonaprowadzania

Zgodnie z (4.1) wyznaczono aproksymację zewnętrzną $\bar{\Omega}_0$ gwarantowanego obszaru samonaprowadzania $\hat{\Omega}_0$, w zbiorze zbadanych (p.4.1÷4.3) obszarów $\Omega_0^{(i)}$ $i = 0, \dots, 5$ uwarunkowanych reprezentatywnym zbiorem HRC manewrów celu (p.2.2.1d,e,f).

Obszar $\bar{\Omega}_0^{(0)}$, jednopójny, ograniczony jest krzywą zamkniętą $\hat{D}\hat{A}\hat{D}'\hat{D}''\hat{E}'\hat{F}'\hat{B}\hat{M}\hat{G}\hat{I}\hat{K}_2\hat{K}_1\hat{H}\hat{D}$, składającą się z łuków regularnych: $\hat{D}\hat{A}\hat{D}'|t_{wd}$, $\hat{D}'\hat{D}''\hat{E}'|(HRC - 4)|n_{zgg}$, $\hat{E}'\hat{F}'|(HRC - 5)|n_{zgg}$, $\hat{F}'\hat{B}\hat{M}|(HRC - 1)|p_{wkr}$, $\hat{M}\hat{G}|(HRC - 1)|n_{zgd}$, $\hat{G}\hat{I}|(HRC - 0)|\varphi_{kg}$, $\hat{I}\hat{K}_2|(HRC - 1)|\varphi_{kg}$, $\hat{K}_2\hat{K}_1|(HRC - 1)|\varphi_{kg}$, $\hat{K}_1\hat{H}|(HRC - 1)|n_{zgd}$, $\hat{H}\hat{D}|(HRC - 0)|n_{zgd}$.

Wykreślono zbiór linii $\{(\eta_0|t_{w \min})_i\}$ dopuszczalnych danych wejściowych procesów samonaprowadzania o ekstremalnej własności minimum czasu realizacji procesów, przeniesione z obszarów $\Omega_0^{(i)}$, $i = 0, \dots, 5$, które odpowiednio oznaczono $0, \dots, 5$. Zwarte usytuowanie tych linii objaśnia interesującą pożądaną własność występowania podobszaru $\bar{\Omega}_{0m} \subset \bar{\Omega}_0$ generującego semioptymalne procesy samonaprowadzania dla wszystkich manewrów obronnych celu. Zwróćmy uwagę, iż obszar $\bar{\Omega}_0$ jest usytuowany tylko w podobszarach bliższym i środkowym.

Z przedstawionej analizy wynikają wnioski:

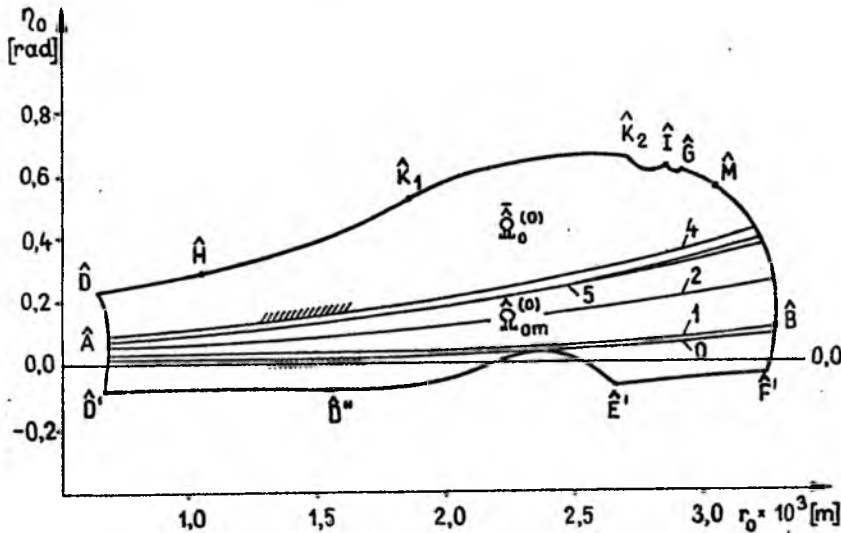
- w pełnym zakresie odległości $r_0 \in [r_{0gd}, r_{ogg}]$, graniczne górne kąty wyprzedzenia $\hat{\eta}_{ogg}$ uwarunkowane są manewrami prędkością, i tak:

$$\hat{F}'\hat{B}\hat{M}\hat{G}|(H - 1), \hat{G}\hat{I}|(H - 0), \hat{I}\hat{K}_2\hat{K}_1\hat{H}|(H - 1), \hat{H}\hat{D}|(H - 0);$$

- w zakresie małych i średnich odległości, graniczne dolne kąty wyprzedzenia $\hat{\eta}_{0gd}$ uwarunkowane są manewrem intensywnej górkii strojmej (łuk

$\hat{D}'\hat{D}''\hat{E}'(H-4)$), zaś w zakresie dużych odległości – manewr rem półpętli (łuk $\hat{E}'\hat{F}'(H-5)$);

- układ linii 0,...,5 (rys.13) o własnościach $\eta_0|t_{w\min}$, uzasadnia użyteczność wydzielenia podobszaru $\bar{\Omega}_{0m}^{(0)}$ o własnościach semioptymalnych warunków początkowych startu rakiety;



Rys. 13.

- zgodnie z definicją kryterialnych manewrów celu, w badanym zagadnieniu, w zbiorze reprezentatywnych manewrów HRC (p.2.1.1d,e,f) kryterialnymi manewrami są: $H-4$, $H-5$, $H-1$, $H-0$.

W oddzielnym opracowaniu przedstawi się:

- szczegółową analizę wpływu rodzaju manewru celu na konfigurację obszarów samonaprowadzania;
- analizę porównawczą ilościową i jakościową w aspekcie globalnym i lokalnym obszarów $\Omega_0^{(i)}$, $i = 0, 1, 4, 5$, uwarunkowanych kryterialnymi manewrami celu;
- analizę porównawczą gwarantowanych obszarów $\bar{\Omega}_0$ i $\bar{\Omega}_{0m}$;
- analizę efektywności manewru obronnego celu i skuteczności ataku nosiciela na cel manewrujący.

6. Wnioski

1. Metoda modelowania własności dynamicznych procesów samonaprowadzania obiektu powietrze-powietrze w uwarunkowaniach procesów walki powietrznej zaproponowana w pracach [3,7,8], w zastosowaniu do konkretnych układów odsłania nowe interpretacje własności dynamicznych w aspekcie jakościowym i ilościowym, globalnym i lokalnym, takich jak struktury topologiczne rozmaitości dziedzin funkcjonowania: wejściowej Ω_{0pw} – generującej procesy samonaprowadzania o globalnej jednoznaczności i praktycznej realizowalności oraz docelowej Ω_{rzpw} – spójnej i ograniczonej.
2. Rozmaitości dziedzin funkcjonowania wejściowej Ω_{0pw} i docelowej Ω_{rzpw} tworzą układ dualny o jednoznacznej odpowiedności rodzin podobszarów $\kappa_{0pw}(\Omega_{0pw})$ i $\kappa_{rzpw}(\Omega_{rzpw})$, które umożliwiają bezpośrednie rozwiązywanie interesujących zagadnień dwugranicznych.
3. Ilościowe i jakościowe wyniki badań przedstawione w niniejszym opracowaniu uzasadniają celowość formułowania zagadnienia gwarantowanych dziedzin funkcjonowania podsystemów ogniowych, których osobliwością jest uwzględnienie wszystkich dopuszczalnych manewrów obronnych celu "ostatniej szansy" (riposty obronnej). Udowodniono bowiem, iż możliwe są skuteczne manewry obronne celu, zaś z pozycji nosiciela – uzasadniono potrzebę precyzyjnej realizacji procesów ataku nosiciela, w szczególności celowania i odpalania, aby wypracować suboptymalne warunki inicjacji pro cesu samonaprowadzania (startu) z obszaru $\bar{\Omega}_{0m}$.
4. Zaproponowana przybliżona procedura obliczeniowa dziedzin funkcjonowania polega na dyskretyzacji charakterystyk celu manewrującego do zbioru reprezentatywnych hipotez o ruchu celu i charakterystyki nosiciela atakującego, które stanowią podstawę do sformułowania zbioru prostszych zagadnień częściowych. Rozwiązanie zbioru zagadnień częściowych umożliwia analizę ilościową i jakościową w aspekcie globalnym i lokalnym wpływu manewrów obronnych celu oraz wyznaczanie aproksymacji zewnętrznej gwarantowanej dziedziny funkcjonowania i analizę porównawczą jej własności w zbiorze rozwiązań częściowych.
5. Postuluje się formułowanie, w oparciu o pożądaną własności gwarantowanych dziedzin funkcjonowania, odpowiednich zagadnień optymalizacyjnych podsystemów ogniowych (charakterystyk geometrycznych, masowych, zespołu napędowego, metody samonaprowadzania, układów sterowania i stabilizacji).

6. Proponuje się uznać dziedziny funkcjonowania obiektu p-p w uwarunkowaniach procesów walki powietrznej jako podstawowe charakterystyki kinetyczne (funkcjonowania) podsystemu ogniowego.

Literatura

1. DUBIEL S., 1978, *Orientorowy warunek Wazewskiego a uogólnione układy dynamiczne*, Proceedings of the VII-th International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague
2. DOMASZUK J., WOJTKOWIAK M., 1974, *Metody i ocena badań tolerancji przyspieszeń na wirówce przeciążeniowej*, Medycyna Lotnicza, z.46
3. NICZYPORUK J., 1987, *Obszary proporcjonalnego samonaprowadzania rakiet powietrze -powietrze*, WAT, Warszawa
4. NICZYPORUK J., 1989, *Modelowanie własności dynamicznych układu samonaprowadzania*, XXVIII Sympozjum: Modelowanie w mechanice, Gliwice-Wisła
5. NICZYPORUK J., 1989, *Metoda badań kinetycznych układów samonaprowadzania*, II Krajowa Konferencja "Automatyzacja nawigacji i systemów sterowania", Gdynia
6. NICZYPORUK J., 1990, *Badanie obszarów proporcjonalnego samonaprowadzania obiektu p-p na cel manewrujący w płaszczyźnie poziomej*, Biul.WAT, XXXIX, 10
7. NICZYPORUK J., *Zagadnienia proporcjonalnego samonaprowadzania obiektu powietrze -powietrze w uwarunkowaniach kompleksu systemowego walki powietrznej*, Biul.WAT (w przygotowaniu)
8. NICZYPORUK J., *Interpretacja dziedzin funkcjonowania obiektu powietrze -powietrze w formalizmie analitycznym układów dynamicznych w przestrzeni zdarzeń w ujęciu równań różniczkowych i warunków orientorowych*, Biul.WAT (w przygotowaniu)
9. NICZYPORUK J., 1973, *Algorytmizacja procesu obliczenia charakterystyk dynamicznych rakiet klasy powietrze -powietrze przy wykorzystaniu EMC*, Materiały III Konferencji Instytutów Wydziału Elektromechanicznego Uzbrojenia, WAT, Warszawa
10. WIELGUS A., 1991, *Modelowanie symulacyjne walki powietrznej*, III Konferencja "Automatyzacja nawigacji i systemów sterowania", Gdynia



CENTRUM KSZTAŁCENIA JĘZYKOWEGO KADR BANKOWYCH I FINANSOWYCH

Centrum prowadzi kształcenie językowe – języki angielski i niemiecki, kadr bankowych od poziomu podstawowego do zaawansowanego. Nasi absolwenci bez problemów zdają egzaminy resortowe, a najlepsi są przygotowani do zdania egzaminu Cambridge Certificate – pierwszy stopień. Centrum działa trzeci rok, a najwyższy poziom kształcenia ukończyło 330 osób. Naszymi klientami są PKO Bank Państwowy, Bank PEKAO S.A., Bank Handlowy, Powszechny Bank Kredytowy S.A., Bank Gospodarki Żywnościowej i wiele innych.

Kształcenie odbywa się w ośrodku szkoleniowym oddalonym od centrum Warszawy o 13 km.

Centrum posiada specjalistyczne wyposażenie dydaktyczne znacznie ułatwiające i przyspieszające naukę języków. Programy kształcenia zostały opracowane przy współpracy angielskich partnerów.

Kadrę Centrum stanowią specjaliści językowi z jednej z najlepszych firm językowych Europy – EUROCENTRES

oraz pracownicy Uniwersytetu Warszawskiego, Szkoły Głównej Handlowej i kilku innych szkół wyższych.

Zajęcia organizowane są przy pomocy różnorodnych technik łącznie z wykorzystaniem komputerów, sprzętu audiowizualnego oraz SITA LEARNING SYSTEM.

Kursy organizowane są w układzie trzydniowych, tygodniowych i dwutygodniowych zjazdów. Terminy zjazdów i ich ilość dostosowana jest do potrzeb klienta i poziomu uczestników. Podstawowe formy kształcenia to kurs specjalistyczny, który trwa 560 godzin i kurs podstawowy, który trwa 360 godzin.

Pod koniec 1992r. po raz pierwszy organizowane będą w Centrum miesięczne kursy przygotowawcze do egzaminów Cambridge Certificate – pierwszy i drugi stopień.

W IV kwartale 1992r. również po raz pierwszy wspólnie z Polskim Biurem Podróży „ORBiS” S.A. rozpoczniemy pełny zestaw kursów dla pracowników branży turystycznej. Kursy te odbywać się będą na poziomie podstawowym, średniozaawansowanym i specjalistycznym.

00-828 WARSZAWA
AL. JANA PAWŁA II NR 13
TEL. 20-25-51, 20-03-51/261
FAX 24-35-65

ROZWIĄZANIE ZADANIA O BRACHISTOCHRONIE Z OPOREM AERODYNAMICZNYM METODĄ MAKSYMUM PONTRIAGINA¹

ANDRZEJ HOMZIUK

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

W artykule przedstawiono pewną modyfikację poszukiwania optymalnych sterowań osobliwych w zadaniach rozwiązywanych metodą maksimum Pontriagina. Modyfikacja ta dotyczy przypadku, gdy w równaniach ruchu obiektu występują sinusy i cosinusy kierunkowe. Mimo prostoty ujęcia (algebraicznych i trygonometrycznych przekształceń) proponowane ujęcie może znaleźć zastosowanie w pewnej dość szerokiej grupie zadań. Takie ujęcie dotyczy w całości zadania przedstawionego między innymi w [1], jak również przykładowo zaprezentowanego zadania o brachistochronie z oporem aerodynamicznym.

1. Przekształcenie funkcji Hamiltona

W zadaniach rozwiązywanych z wykorzystaniem zasady maksimum Pontriagina wymagane jest aby przedstawić:

– równania ruchu obiektu:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m),\end{aligned}\tag{1.1}$$

– funkcjonal jakości:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt,\tag{1.2}$$

– ograniczenia sterowań:

$$\begin{aligned}u_1^{min} &\leq u_1 \leq u_1^{max}, \\ &\dots \\ u_m^{min} &\leq u_m \leq u_m^{max},\end{aligned}\tag{1.3}$$

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

– oraz funkcję Hamiltona:

$$H(\lambda, x, u) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m). \quad (1.4)$$

Zmienne sprzężone λ oraz zmienne stanu x wyznaczyć można z równań kanonicznych Hamiltona:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Warunkiem koniecznym występowania sterowań optymalnych u^* jest aby:

$$H|_{\max}(\lambda, x, u^*) = 0, \quad (1.6)$$

oraz:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \dot{\lambda}_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_i} \dot{u}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

W literaturze przedmiotu zaleca się aby poszukiwanie sterowań rozpocząć od przekształcenia funkcji Hamiltona do postaci:

$$H(\lambda, x, u) = F(\lambda, x) + \sum_{i=1}^m \sigma_i(\lambda, x) u_i, \quad (1.8)$$

a następnie badać funkcje przełączania σ_i . Przypomnijmy, że poszukiwane sterowania optymalne zależą od funkcji przełączania:

$$\begin{aligned} \sigma = 0 &\Rightarrow u^* \text{ — nieokreślone} \quad (\text{sterowania osobiwe}), \\ \sigma \neq 0 &\Rightarrow u^* = \text{sign}(\sigma) u^{\max} \quad (\text{sterowania "bang — bang"}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Proponowana modyfikacja poszukiwania sterowań optymalnych w przypadku, gdy w równaniach ruchu obiektu występują sinusy i cosinusy kierunkowe, polega na tym aby przekształcać funkcję Hamiltona do postaci:

$$\begin{aligned} H(\lambda, x, u) &= F(\lambda, x) + \sum_{i=1}^k \sigma_i(\lambda, x) u_i + \sum_{i=k+1}^l g_i(\lambda, x) \cos(u_i + \sigma_i) + \\ &+ \sum_{i=l+1}^m h_i(\lambda, x) \sin(u_i + \sigma_i), \end{aligned} \quad (1.10)$$

wykorzystując zależności:

$$A \cos u + B \sin u = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left(u - \arctg \frac{B}{A} \right), \quad (1.11)$$

$$A \sin u - B \cos u = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left(u - \arctg \frac{B}{A} \right).$$

Z zależności (1.7) i (1.5) wynika, że w przypadku gdy funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu, dla sterowań optymalnych spełniony musi być warunek:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial u_i} \dot{u}_i = 0. \quad (1.12)$$

Zatem analogiczne do (1.9) pozostają warunki:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow \text{sterowania osobliwe}, \quad (1.13)$$

$$\frac{du_i}{dt} = 0 \Rightarrow \text{sterowania "bang - bang"}.$$

Zauważmy, że pierwsza zależność (1.13) jest tożsama z warunkiem $\sigma_i = 0$. Drugi warunek przedstawiony w postaci $u = \text{const} = u^{\max}$ odpowiada sterowaniom z brzegu zbioru sterowań (sterowania "bang-bang"). Jeżeli funkcja Hamiltona przekształcona zostanie do postaci (1.10), wówczas poszukiwanie sterowań osobliwych sprowadza się do analizy związków:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\lambda, x) &= 0 & i &= 1, \dots, k, \\ g_i(\lambda, x) \sin(u_i + \sigma_i) &= 0 & i &= k+1, \dots, l, \\ h_i(\lambda, x) \cos(u_i + \sigma_i) &= 0 & i &= l+1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Jako kolejną modyfikację zadań rozwiązywanych metodą maksimum proponuje się stosowanie zmiennych sprzężonych transformowanych. Uzyskuje się je po podzieleniu funkcji Hamiltona przez stałą. Ponieważ:

$$\begin{aligned} H(\lambda, x, u^*) &= \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n, u_1^*, \dots, u_m^*) = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{C} f_i(x_1, \dots, x_n, u_1^*, \dots, u_m^*) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

To proste przekształcenie sprowadza funkcję Hamiltona do postaci:

$$H(\bar{\lambda}, x, u^*) = \sum_{i=0}^n \bar{\lambda}_i f_i(x_1, \dots, x_n, u_1^*, \dots, u_m^*) = 0, \quad (1.16)$$

gdzie: $\bar{\lambda}_i = \lambda_i/C$.

Jeżeli stała C jest większa od zera, zadanie formalnie nie ulega żadnej zmianie. Okazuje się jednak, że stosowanie takiego przekształcenia jest niezwykle korzystne, gdyż przy odpowiednio dobranej stałej C umożliwia wyeliminowanie z zadania co najmniej jednej niewiadomej. W wielu przypadkach może się to przyczynić do uzyskania rozwiązań w postaci zamkniętej.

2. Sformułowanie zadania o brachistochronie z oporem aerodynamicznym

Przyjmijmy układ równań ruchu obiektu w płaszczyźnie pionowej:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= g \sin u - AV^2, \\ \dot{x} &= V \cos u, \\ \dot{y} &= V \sin u,\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie:

- g – przyspieszenie ziemskie,
- u – sterowanie kątem pochylenia wektora prędkości,
- V – prędkość obiektu,
- x, y – współrzędne położenia obiektu sterowania.

Poszukujemy takiego sterowania optymalnego u^* , które przeprowadza obiekt z punktu początkowego $A(x_0, y_0)$ do punktu końcowego $B(x_1, y_1)$ w minimalnym czasie, tj. przy minimum funkcjonału jakości:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt.\tag{2.2}$$

Ponieważ sterowaniem jest kierunek wektora prędkości, który może zmieniać się w przedziale od zera do 2π , dlatego praktycznie nie występuje ograniczenie sterowań (1.3). Można także sądzić, że szczególną rolę w rozwiązaniu zadania będą odgrywały sterowania osobliwe. Zakładamy, że znana jest prędkość w punkcie początkowym A , natomiast prędkość w punkcie końcowym B jest dowolna. Dopuszczalne są także kąty wyjścia z punktu początkowego i dotarcia do punktu końcowego. Założenia te powodują, że z warunków transversalności (nie omawianych dokładniej w artykule) uzyskamy zależność:

$$\lambda_1(t_k) = 0.\tag{2.3}$$

Pozostałe zmienne sprzężone λ są dowolne zarówno na początku jak i na końcu trajektorii.

Tak przedstawione zadanie pokrywa się z zadaniem o linii najszybszego spadku – brachistochronie, sformułowanym przez Jana Bernoulliego. Różnica polega jedynie na tym, że spadek ten odbywa się w atmosferze, co uwzględniono w wyrażeniu na prędkość poprzez składnik AV^2 .

3. Rozwiązanie zadania

Na podstawie równań ruchu (2.1) oraz wskaźnika jakości (2.2) otrzymamy funkcję Hamiltona:

$$H(\lambda, V, x, y, u) = \lambda_0 + \lambda_1 g \sin u - \lambda_1 AV^2 + \lambda_2 V \cos u + \lambda_3 V \sin u, \quad (3.1)$$

a po przekształceniu do postaci (1.10):

$$H(\lambda, V, x, y, u) = \lambda_0 - \lambda_1 AV^2 + \sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2} \cos\left(u - \arctg \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_2 V}\right). \quad (3.2)$$

Sterowanie osobiwe wyznaczone z pierwszej zależności (1.13) wynosi:

$$\sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2} \sin\left(u^* - \arctg \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_2 V}\right) = 0. \quad (3.3)$$

Ponieważ wyrażenie podpierwiastkowe nie może równać się zero (zadanie uległoby zdegradowaniu), dlatego osobiwe sterowanie optymalne wynosi:

$$u^* = \arctg \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_2 V}, \quad (3.4)$$

a zatem:

$$\sin u^* = \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2}}, \quad (3.5)$$

$$\cos u^* = \frac{\lambda_2 V}{\sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2}}. \quad (3.6)$$

Po uwzględnieniu (3.4) funkcja Hamiltona (3.2) przyjmie postać:

$$H_{\max}(\lambda, V, x, y, u^*) = \lambda_0 - \lambda_1 AV^2 + \sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2} = 0. \quad (3.7)$$

Z zależności (3.5), (3.6) i (3.7) wyznaczyć można prostszą postać sinusa i cosinusa optymalnego kąta pochylenia wektora prędkości:

$$\sin u^* = \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_1 AV^2 + \lambda_0}, \quad (3.8)$$

$$\cos u^* = \frac{\lambda_2 V}{\lambda_1 AV^2 + \lambda_0}. \quad (3.9)$$

W metodzie maksimum Pontriagina udawadnia się, że $\lambda_0 \leq 0$. Zmienna ta, wartość równą zero osiąga jedynie w specyficznych przypadkach i łatwo można dowieść, że dla przedstawianego zadania, λ_0 jest liczbą ujemną. Aby nie popełnić błędu przy licznych przekształceniach, w zależnościach (3.8), (3.9) i wszystkich następnych, zmieniono znak przed λ_0 pamiętając by dalej zmienną tę traktować jako dodatnią.

Z równań kanonicznych Hamiltona (1.5) wynika, że:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \text{const}, & \lambda_1 &= \text{var}, \\ \lambda_2 &= \text{const}, & \lambda_3 &= \text{const}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Można zatem z samej funkcji Hamiltona (3.7) wyznaczyć zmienną sprzężoną λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0 A V^2 - \lambda_3 g V + \sqrt{\Delta}}{g^2 - A^2 V^4}, \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\Delta = g^2 \lambda_2^2 (\lambda_0^2 - V^2) + (g \lambda_0 \lambda_3 - A V^3)^2. \quad (3.12)$$

Zauważmy, że w zależnościach (3.8), (3.9) i (3.11) nieznana pozostaje prędkość V . Pozostałe wielkości g , A , λ_0 , λ_2 i λ_3 są stałymi, z których znaną wartość liczbową posiada g i A . Poszukiwanie optymalnej trajektorii sprowadza się więc do znalezienia takich λ_0 , λ_2 i λ_3 , aby spełnione były warunki początkowe i końcowe równań ruchu oraz warunki transversalności. Takich rozwiązań w ogólnym przypadku jest nieskończenie wiele. Dlatego należałoby dodatkowo sprawdzać minimum funkcjonału jakości (2.2) a poszukiwanie rozwiązania byłoby pewnym procesem iteracyjnym.

Okazuje się jednak, że istnieją ściśle związki pomiędzy λ_0 , λ_2 i λ_3 . Uwzględniając (3.8), (3.9) i (2.3) otrzymamy:

$$\sin^2 u^*(t_k) + \cos^2 u^*(t_k) = \left(\frac{V_k}{\lambda_0}\right)^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) = 1. \quad (3.13)$$

Zatem:

$$V_k = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}}, \quad (3.14)$$

Jeżeli zastosujemy proponowane przekształcenie (1.15) gdzie:

$$C = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \quad (3.15)$$

otrzymamy wówczas identyczne zależności od (3.1) do (3.12), w których dotychczasowe zmienne sprzężone zastąpione zostaną zmiennymi sprzężonymi transformowanymi:

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}}, \quad i = 0, \dots, 3, \quad (3.16)$$

oraz dodatkowe związki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \bar{\lambda}_0 = V_k, \\ \text{b)} \quad & \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2 = 1, \\ \text{c)} \quad & \sqrt{\Delta} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Przechodząc w równaniach ruchu (2.1) na zmienną niezależną V oraz uwzględniając (3.8) ÷ (3.12) i (3.17) otrzymamy:

$$x = \int \frac{\lambda_2 V^2}{\sqrt{\Delta}} dV, \quad (3.18)$$

$$y = \int \frac{gV}{g^2 - A^2 V^4} dV + \int \frac{AV^3(gV_k - \lambda_3 AV^3)}{(g^2 - A^2 V^4)\sqrt{\Delta}} dV, \quad (3.19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta &= g^2 \lambda_2^2 (V_k^2 - V^2) + (gV_k \lambda_3 - AV^3)^2, \\ \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

W takim ujęciu zadanie sprowadza się do poszukiwania prędkości końcowej V_k oraz jednej ze stałych λ_2 lub λ_3 , tak aby całka (3.18) była równa wartości końcowej x_1 , a całka (3.19) wartości y_1 .

4. Wnioski

W przypadku, gdy poszukujemy linii najszybszego spadku w próżni, tj. $A = 0$ wyrażenia (3.18) i (3.19) przekształcają się do postaci:

$$x = \int \frac{\lambda_2 V^2}{g \sqrt{V_k^2 - \lambda_2^2 V^2}} dV, \quad (4.1)$$

$$y = \int \frac{V}{g} dV. \quad (4.2)$$

Stosując podstawienie:

$$V = \frac{V_k}{\lambda_2} \sin t, \quad (4.3)$$

otrzymamy:

$$x = \left(\frac{V_k^2}{g \lambda_2^2} \right) \int \sin^2 t dt, \quad (4.4)$$

$$y = \left(\frac{V_k^2}{g \lambda_2^2} \right) \int \sin t \cos t dt, \quad (4.5)$$

i ostatecznie:

$$x = \left(\frac{V_k^2}{4g\lambda_2^2} \right) (2t - \sin 2t) + C_1, \quad (4.6)$$

$$y = \left(\frac{V_k^2}{4g\lambda_2^2} \right) (1 - \cos 2t) + C_2. \quad (4.7)$$

Jest to zatem poszukiwane równanie cykloidy (wyrażone w postaci parametrycznej).

W przypadku, gdy $A \neq 0$ uzyskanie rozwiązań w postaci zamkniętej nie jest możliwe. Można jednak na podstawie (3.18) i (3.19) przewidzieć dwa charakterystyczne rozwiązania. Zależą one będą od wartości początkowych, współrzędnej punktu końcowego $B(x_1, y_1)$ oraz A i g .

Rozwiązanie I

Gdy prędkość końcowa V_k jest jednocześnie prędkością maksymalną V_{max} na całej trajektorii ruchu obiektu, wówczas pozostają prawdziwe zależności (3.18) i (3.19). Jak zostało wspomniane, zadanie sprowadza się do znalezienia V_k oraz jednej ze stałych λ_2 lub λ_3 . Można także dowieść, że λ_2 i λ_3 są dodatnie.

Rozwiązanie II

Gdy prędkość końcowa V_k jest mniejsza od pewnej nieznanej prędkości maksymalnej V_{max} , trajektorię ruchu obiektu należy podzielić na dwa odcinki ekstremali (odpowiednio z sobą zsyte). Odpowiada to przypadkowi, gdy w końcowej fazie następuje wytracanie prędkości na skutek przewagi sił oporu aerodynamicznego nad siłą grawitacji. Należy wówczas całki (3.18) i (3.19) rozpatrywać w dwóch przedziałach $< V_0, V_{max} >$ i $< V_{max}, V_k >$. Znalezienie rozwiązań tego typu jest znacznie trudniejsze, gdyż praktycznie należy uwzględnić jeszcze jedną niewiadomą V_{max} .

Literatura

1. DUBIEL S., HOMZIUK A., 1991, *Rozwiązanie zadania o brachistochronie metodą maksimum Pontriagina*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 29, 1
2. LEITMAN G., 1971, *Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego*, WNT Warszawa
3. BOŁTIAŃSKI W.G., 1971, *Matematyczne metody sterowania optymalnego*, WNT Warszawa

MINIMALIZACJA BLIŻSZEJ GRANICY STREFY PRZECHWYCENIA CELU W POLU GRAWITACYJNYM¹

STANISŁAW DUBIEL

JERZY KAMOLA

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Rozważono problem minimalizacji bliższej granicy strefy przechwycenia celu w polu grawitacyjnym w odniesieniu do malej rakiety przeciwlotniczej o zmiennej masie, sterowanej wiązką, startującej z wyrzutni ze stałym kątem podniesienia prowadnic. Wykorzystując teorię ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi oraz zasadę maksimum Pontriagina wyznaczono optymalny program sterowania rakieta zapewniający minimalną odległość programowego wprowadzenia rakiety w wiązkę prowadzącą.

1. Wstęp

Nowe rozwiązania zestawów ракет przeciwlotniczych rezygnują ze sprzężenia automatycznego ruchu wyrzutni z ruchem wiązki śledzącej cel co najmniej w kącie podniesienia, co pociąga za sobą wydłużenie odległości przechwycenia celu. Wylania się potrzeba programowego wprowadzenia rakiety w wiązkę prowadzącą minimalizującego odległość do bliższej granicy strefy przechwycenia celu. Zmniejszenie odległości programowego wprowadzenia w pole sterowania rakiety sterowanej aerodynamicznie wiąże się z własnościami manewrowymi rakiety, które w sposób istotny zależą od prędkości lotu. Powyższy wniosek sugeruje sformułowanie następującego zadania optymalizacyjnego:

- wyznaczyć optymalny program zmiany prędkości i kierunku lotu rakiety przeciwlotniczej sterowanej aerodynamicznie w polu grawitacyjnym i przy zmiennej masie rakiety, który gwarantuje minimalizację bliższej granicy strefy przechwycenia celu.

Zadanie to z pełną kompensacją składowej siły grawitacyjnej i przy uśrednionej masie rakiety rozwiązano w pracy [6].

¹ Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Do sformułowania i rozwiązania problemu optymalizacji wykorzystamy teorię ruchu nieswobodnego opisaną i rozwiniętą do tej klasy problemów w pracach [1,2,3] oraz zasadę maksimum Pontriagina [5].

2. Sformułowanie problemu optymalizacji w ujęciu ogólnym

Ruch rakiety sterowanej dla $t > t_0$, od zejścia z wyrzutni aż do włączenia układu sterowania można opisać następującym układem równań ruchu nieswobodnego z więzami dynamicznymi, oddziałującymi na raketę w sposób nieciągły w czasie.

Równania ruchu:

$$\ddot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{u}_j, u_j, t), \quad (2.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Równania więzów:

$$\Phi_j(y_1, \dots, y_m, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_m, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad m < n.$$

Związki sprzęgające:

$$\xi_i = x_i - y_i, \quad (2.3)$$

$$\Psi(\ddot{u}_j, \dot{u}_j, u_j) = Y(t_p; t_w)\sigma,$$

gdzie:

- x_i - uogólnione współrzędne ruchu rzeczywistego w przestrzeni konfiguracji;
- y_i - współrzędne ruchu sterowanego idealnie;
- σ - sygnał sterowania wiązką;

$$\sigma = \Phi_j(\ddot{\xi}_j, \dot{\xi}_j, \xi_j, \int_0^t \xi_j d\tau, t), \quad (2.4)$$

- ξ_i - błąd sterowania (uchyby);
- $Y(t_p, t_w)$ - funkcja przełączania sygnału sterowania pozwalająca równanie (2.3) zapisać w postaci:

$$\Psi(\ddot{u}_j, \dot{u}_j, u_j) = [H(t - t_p) - H(t - t_w)]u_p + H(t - t_w)\sigma, \quad (2.5)$$

u_p - sterowanie programowe.

Jeżeli prawe strony równań ruchu (2.1) są określone i analityczne w obszarze: $t_0 < t < t_1$ oraz $-\infty \leq x_i \leq \infty$ wówczas układy równań (2.1), (2.2) i (2.5) rozdzielają się na dwa układy równań ruchu (np. drogą rozwinięcia funkcji F_i w szereg Taylora):

1. równania ruchu nieswobodnego z więzami klasycznymi, opisujące ruch sterowany idealnie;
2. równania ruchu względem położenia równowagi pola sił sterujących, opisujące ruch w przestrzeni błędów [2,3].

Program sterowania minimalizujący bliższą granicę strefy przechwycenia poszukuje się z równań ruchu sterowanego idealnego, które z ograniczeniami możemy zapisać w postaci:

$$\ddot{y}_k = F_k(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, \dot{u}_j, u_j, t), \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^m u_j^2 - u_d^2 \leq 0, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 - (n_d g)^2 \leq 0. \quad (2.8)$$

Badania optymalizacyjne za pomocą zasady maksimum Pontriagina prowadzi się w n -wymiarowej przestrzeni stanu, w której ruch sterowany obiektu opisują równania stanu:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, t), \quad (2.9)$$

$$i = 0, 1, \dots, 2k-1, 2k, \dots, n,$$

gdzie:

x_i - współrzędne n -wymiarowego wektora stanu obiektu, które dla równania (2.6) możemy zapisać:

$$x_{2k-1} = y_k, \quad x_{2k} = \dot{y}_k,$$

$u_1, \dots, u_r$ - zmienne sterowania należące do określonego, ustalonego zbioru sterowań dopuszczalnych $u \in E^r$ niezależnego od stanu x i czasu t ,

f_i - pewne funkcje określające wewnętrzną strukturę obiektu.

Rozpatruje się ponadto układ równań zmiennych sprzężonych (pomocniczych) $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \sum_{a=0}^n \frac{\partial f_a(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_i} \lambda_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Spośród wszystkich sterowań dopuszczalnych $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ przesuwających obiekt w przestrzeni stanu z początkowego położenia $\mathbf{x}(t_0)$ (rozmaitości początkowej Θ^0) do punktu końcowego $\mathbf{x}(t_1)$ (rozmaitości końcowej Θ^1), należy znaleźć takie, dla których funkcjonal jakości:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt = \min, \quad (2.11)$$

przyjmuje wartość najmniejszą.

Do rozważań wprowadza się funkcję Hamiltona zmiennych $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \lambda_0, \dots, \lambda_n, u_1, \dots, u_r$:

$$H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{a=0}^n \lambda_a f_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.12)$$

dzięki której równania (2.9) i (2.10) możemy zapisać w postaci układu równań kanonicznych Hamiltona:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Poprawne wyznaczenie warunków brzegowych dla problemu minimalizacji bliższej granicy strefy przechwycenia wymaga wcześniejszego ustalenia równowagi sił sterujących w punkcie końcowym optymalizowanego etapu wprowadzenia rakiety w wiązkę sterującą. Do wyznaczenia rozmaitości Θ^1 zastosujemy koncepcję ujęcia lotu rakiety sterowanej wiązką prowadzącą w sposób nieciągły w czasie jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi [1]. Równania ruchu względem położenia równowagi pola sił sterujących oraz ograniczenia możemy przedstawić w postaci:

$$\ddot{\xi}_j = E_j(\xi_1, \dots, \xi_m, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_m, \dot{u}_j, u_j, t), \quad (2.15)$$

$$\Psi_j(\ddot{u}_j, \dot{u}_j, u_j) = Y(t_{wl}, t_{wyl}) \Phi_j(\ddot{\xi}_j, \dot{\xi}_j, \xi_j, \int_0^t \xi d\tau), \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^m E_j^2 - (n_d g) \leq 0, \quad (2.17)$$

gdzie: E_j – funkcje sił w zredukowanej przestrzeni błędów.

Optymalizację związków sprzęgających (2.17) możemy przeprowadzić w oparciu o kryteria:

1. maksymalnego prawdopodobieństwa "przechwycenia" obiektu latającego przez układ sterowania,
2. "najłagodniejszego" wprowadzenia obiektu w pole sterowania.

Dla drugiego kryterium zadanie wyznaczenia rozmaitości Θ^1 można sformułować następująco:

- dobrać warunki końcowe etapu programowego wprowadzenia rakiety w pole sterowania, dla których rakietą zostanie wprowadzona w obszar osiągalności Ω_0 . Obszar Ω_0 w takim ujęciu rozumiany jest jako obszar dopuszczalnych przeciążeń oraz przemieszczeń rakiety wokół położenia równowagi sił sterujących, które w tym wypadku wyznaczają oś wiązki prowadzącej. Wyznaczenie rozmaitości Θ^1 z obszaru osiągalności Ω_0 ujmuje zarówno względy bezpieczeństwa (siły sterujące nie przekroczą wartości dopuszczalnych) jak i wymaganą dokładność naprowadzania.

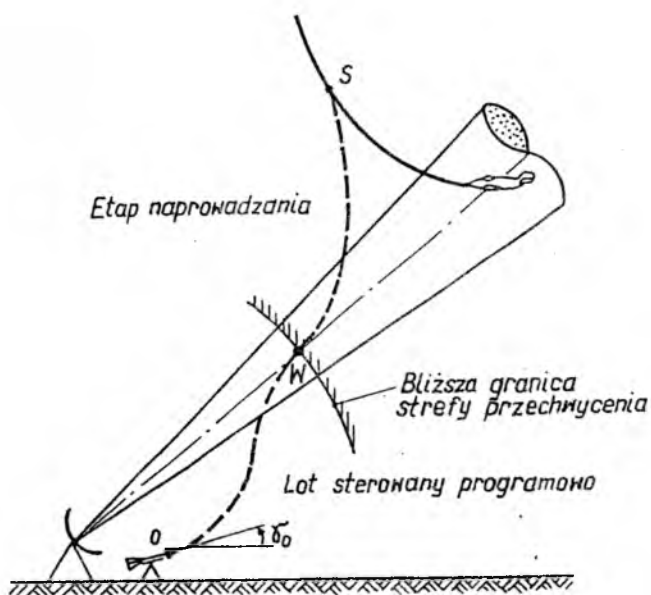
3. Wyznaczenie rozmaitości końcowej optymalizowanego procesu sterowania

Rozważa się dwuetapowy lot rakiety przeciwlotniczej:

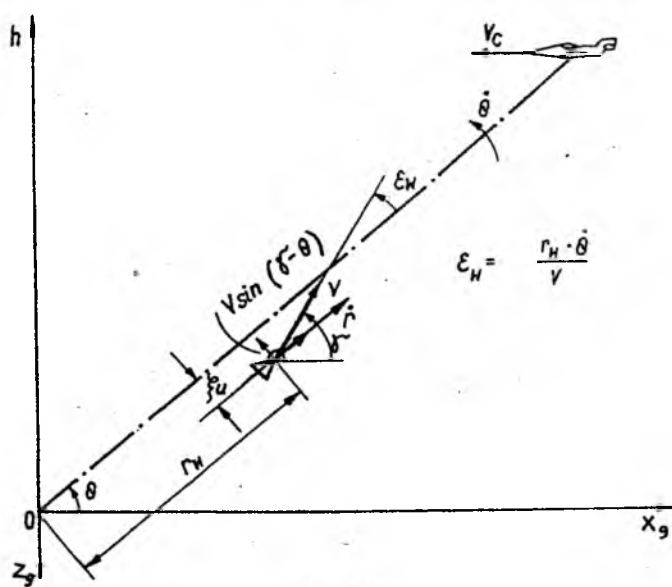
1. programowe wprowadzenie w wiązkę prowadzącą;
2. sterowanie w wiązce prowadzącej.

Proces wprowadzenia przedstawia rys.1. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia programu sterowania, który przeprowadza raketę ze stanu określonego przez Θ^0 (punkt 0 – rys.1) do stanu Θ^1 (punkt WS – rys.2). Niech osiągnięcie rozmaitości Θ^1 oznacza zarazem osiągnięcie bliższej granicy strefy przechwycenia zestawu. Drugi etap – naprowadzanie na cel (odcinek $W-S$ rys.1) – odbywa się w granicach strefy przechwycenia. Zrozumiałe jest więc, że począwszy od chwili t_1 – osiągnięcia rozmaitości Θ^1 związki sprzęgające powinny zapewniać odpowiednio wysoką dokładność naprowadzania gwarantującą przechwycenie celu powietrznego. Dlatego też postać rozmaitości Θ^1 – końcowej dla I etapu i początkowej dla etapu II powinna zapewniać łagodne przejście rakiety z lotu sterowanego programowo do sterowania wiązką.

Układy śledzące raketę określają jej położenie jako punktu materialnego, dlatego dalsze rozważania procesu wprowadzenia ogranicza się do ruchu rakiety jako punktu materialnego. Przyjmuje się do dalszych badań model dynamiczny małej



Rys. 1.



Rys. 2.

rakiety sterowanej wychylanymi skrzydłami startującej z wyrzutni o stałym kącie podniesienia prowadnic. Sterowany lot rakiety w płaszczyźnie pionowej opisują poniższe układy równań i związków sprzęgających.

a) Równania ruchu:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{w_e \mu}{m} - c_x \rho \frac{SV^2}{2m} - g \sin \gamma, \\ V \frac{d\gamma}{dt} &= -g \cos \gamma + c_{x6} \rho \frac{SV^2}{2m} \delta, \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \gamma, \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \gamma, \\ \frac{dm}{dt} &= -\mu.\end{aligned}\tag{3.1}$$

b) Równania więzów:

$$\Phi(r, \theta, t) = 0.\tag{3.2}$$

c) Związki sprzęgające:

$$\delta(t) = [H(t - t_p) - H(t - t_1)]u_p + H(t - t_1)f(\dot{\xi}, \xi),\tag{3.3}$$

$$\xi = V \sin(\gamma - \theta) - r\theta, \quad r = V \cos(\gamma - \theta),\tag{3.4}$$

gdzie:

- $u_p = \delta_p$ – kąt programowego wychylenia sterów;
- t_1 – chwila uruchomienia układu naprowadzania wiązką (wejścia rakiety w wiązkę prowadzącą);
- t_p – chwila włączenia sterowania programowego;
- δ – kąt wychylenia sterów;
- μ – prędkość zmiany masy rakiety.

Związek (3.3) zezwala na ujęcie równaniami ruchu (3.1) wszystkich trzech faz lotu: lot niesterowany ($u = 0$), lot sterowany programowo ($u = u_p$) i naprowadzanie wiązką ($u = f(\dot{\xi}, \xi)$). Celem wyznaczenia rozmaitości θ^1 bada się ruch sterowany dla $t > t_1$ w przestrzeni błędów. Dla omówienia wpływu związków sprzęgających na postać θ^1 przyjmijmy następującą ich postać:

$$\delta(t) = f(\dot{\xi}, \xi) = -k_1 \dot{\xi} - k_0 \xi \quad \text{dla } t > t_1,\tag{3.5}$$

gdzie: k_0, k_1 – współczynniki wzmocnienia w układzie wychylenia sterów.

Na etapie naprowadzania wiązką różnica kątów $(\gamma - \theta)$ jest mała. Można więc przyjąć:

$$\sin(\gamma - \theta) \cong \gamma - \theta \quad \text{i} \quad \cos(\gamma - \theta) \cong 1 ,$$

dzięki czemu zależności (3.4) uproszczą się do postaci:

$$\dot{\xi} = V\gamma - V\theta - r\dot{\theta} , \quad (3.6)$$

$$\dot{r} = V .$$

Zróżniczkowanie równania (3.6) oraz wykorzystanie związku (3.5) i drugiego równania układu (3.1) prowadzi do następującego równania lotu sterowanego programowo dla $t_p < t < t_1$ i sterowanego wiązką dla $t > t_1$:

$$\ddot{\xi} + [H(t - t_p) - H(t - t_1)]AV^2u_p + H(t - t_1)(k_1AV^2\dot{\xi} + k_0AV^2\xi) = a , \quad (3.7)$$

gdzie:

$$A = c_{x6}\rho \frac{S}{2m} , \quad (3.8)$$

$$a = -g \cos \gamma - 2V\dot{\theta} - r\ddot{\theta} .$$

Funkcja wymuszająca a w polu grawitacyjnym uzupełniona jest o człon $-g \cos \gamma$. Równanie (3.7) można rozpisać na płaszczyźnie fazowej w formie bardziej przydatnej do naszych badań.

Dla $t < t_p$ - lot niesterowany:

$$\dot{\xi} = \eta , \quad (3.9)$$

$$\dot{\eta} = a .$$

Dla $t_p \leq t \leq t_1$ - lot sterowany programowo:

$$\dot{\xi} = \eta , \quad (3.10)$$

$$\dot{\eta} = a + AV^2u_p .$$

Dla $t > t_1$ - lot sterowany wiązką:

$$\dot{\xi} = \eta , \quad (3.11)$$

$$\dot{\eta} = E(\xi, \eta) + a ,$$

gdzie:

$$E(\xi, \eta) = -k_1AV^2\dot{\xi} - k_0AV^2\xi .$$

Najłagodniejsze wprowadzenie rakiety w wiązkę oznacza, osiągnięcie w chwili t_1 (uruchomienia układu sterowania wiązką) położenia równowagi układu. Położenie równowagi dla równań (3.11) określa punkt osobliwy, który spełnia warunki:

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{\xi} &= 0 \Rightarrow \eta = 0, \\ 2) \quad \dot{\eta} &= 0 \Rightarrow E(\xi, \eta) + a = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Na podstawie warunków (3.12) możemy teraz określić wartości zmiennych stanu $(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$ ruchu idealnego w chwili $t = t_1$. Z zależności (3.6) i (3.12.1) dostaniemy:

$$\gamma_1 = \theta_1 + \dot{\theta} \frac{r_1}{V_1}. \quad (3.13)$$

Skorzystanie z warunku (3.12)₂ oraz (3.7) przy założeniu, że na etapie naprowadzania $V = \text{const.}$ prowadzi do równania:

$$\ddot{\xi} + \lambda_1 \dot{\xi} + \lambda_0 \xi = a, \quad (3.14)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= k_1 A V^2, \\ \lambda_0 &= k_0 A V^2. \end{aligned}$$

Z zależności (3.14) otrzymamy:

$$\xi u = \frac{a}{\lambda_0}. \quad (3.13')$$

Spełnienie warunków (3.13) i (3.13') oznacza, że dla $t = t_1$ wektor prędkości rakiety wyprzedza położenie osi wiązki sterującej o wartość kątową

$\epsilon_1 = (r_1/V_1)\dot{\theta}$, natomiast sama raketa jest oddalona od osi wiązki o wartość ξ_u (rys.2). Dynamiczny model ruchu rakiety opisany równaniami (3.1) ÷ (3.4) zezwala na sformułowanie następującego zadania minimalizacji odległości wprowadzenia rakiety w wiązkę prowadzącą.

Niech ruch środka masy rakiety opisują równania (3.1) przekształcone w przestrzeni stanu do postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, & \dot{x}_2 &= \frac{\bar{A}}{x_6} x_1 u_2 - \frac{g}{x_1} \cos x_2, \\ \dot{x}_3 &= \Omega, & \dot{x}_4 &= x_1 \cos x_2, \\ \dot{x}_5 &= x_1 \sin x_2, & \dot{x}_6 &= -\mu, \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie:

$$u_1 = \frac{w_c \mu - c_x \rho S V^2 / 2}{m} - g \sin \gamma, \quad u_2 = \delta,$$

$$\bar{A} = c_{x6} \rho \frac{S}{2m}, \quad (3.16)$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ – odpowiednio $V, \gamma, \Omega, x, h, m$.

Ograniczenia sterowań i zmiennych stanu zapiszemy jako:

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1 \leq a_{xd}, \\ \Phi_1 &= \delta^2 - \delta_{max}^2 \leq 0, \\ \Phi_2 &= \left(\frac{\bar{A}}{x_6} x_1^2 u_2 - g \cos x_2 \right)^2 - a_{xd}^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie:

a_{xd}, a_{zd} – wartości dopuszczalnych przyspieszeń stycznego i normalnego;

δ_{max} – dopuszczalny kąt wychylenia steru.

θ^0 :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 \geq 0, & x_2 &= x_2^0, & x_3 &= x_3^0, \\ x_4 &= x_4^0, & x_5 &= x_5^0, & x_6 &= x_6^0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

θ^1 :

$$\begin{aligned} x_1 - x_1^0 &= 0, \\ x_2 - x_3 - \frac{\Omega}{x_1} \sqrt{(x_4 - \xi_u \sin x_3)^2 + (x_5 + \xi_u \cos x_3)^2} &= 0, \\ x_3 - x_3^1 &= 0, \\ \left. \begin{array}{l} x_4 \\ x_5 \end{array} \right\} : x_5 + \xi_u \cos x_3 - (x_4 - \xi_u \sin x_3) \operatorname{tg} x_3 &= 0, \\ x_6 &- \text{dowolne}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdzie:

Ω – prędkość kątowna l.o.c.;

ξ_u – wartość liniowego odchylenia rakiety od l.o.c. w chwili uruchomienia układu sterowania wiązką prowadzącą (rys.2), opisana zależnością (3.16)₂.

Przyjmując, że na etapie naprowadzania wiązką $V = \text{const.}$, $\Omega = \text{const.}$, $\lambda_0 = k_0 A V^2 = \text{const.}$, dostaniemy:

$$\xi_u = -\frac{2V}{\lambda_0} \Omega - \frac{g}{\lambda_0} \cos \gamma.$$

Ponadto, ponieważ wejście rakiety w wiązkę prowadzącą oznacza osiągnięcie bliższej granicy strefy przechwycenia celu, dla zapewnienia odpowiedniej dokładności naprowadzania musi być spełniony warunek:

$$\xi_u \leq \xi_{dop.},$$

gdzie: $\xi_{dop.}$ – dopuszczalny błąd naprowadzania rakiety.

W sformułowanym zadaniu należy wyznaczyć sterowania $u_1(t)$ i $u_2(t)$ ze zbioru sterowań dopuszczalnych, określonych ograniczeniami i więzami (3.17), które przeprowadzając raketę ze stanu Θ^0 do Θ^1 minimalizują funkcjonal jakości:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} x_1 dt + \sqrt{[x_4(t_1)]^2 + [x_5(t_1)]^2} = \min. \quad (3.20)$$

Funkcjonał jakości określony zależnością (3.20) łączy odległość bliższej strefy przechwycenia z drogą rzeczywistą rakiety jako punktu materialnego. Taki funkcjonal jakości eliminuje rozwiązania wydłużające czas i drogę rakiety.

4. Rozwiązanie zadania optymalnego wprowadzenia

4.1. Sterowania optymalne

Zasada maksimum Pontriagina dla równań ruchu (3.15) oraz wskaźnika jakości (3.20) zezwala skonstruować funkcję Hamiltona w postaci:

$$\begin{aligned} H(\lambda, x, u) = & \lambda_0 x_1 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 \left[A \frac{1}{x_6} x_1 u_2 - \frac{g}{x_1} \cos x_2 \right] + \\ & + \lambda_3 \Omega + \lambda_4 x_1 \cos x_2 + \lambda_5 x_1 \sin x_2 - \lambda_6 \mu. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ponieważ więzy Φ_2 zależą od zmiennych stanu x_1 , x_2 i x_6 , równania zmiennych sprzężonych zapiszemy w postaci:

a) dla $\Phi_2 < 0$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}, \quad (4.2)$$

b) dla $\Phi_2 = 0$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad (4.3)$$

gdzie:

- λ - wektor o współrzędnych $\lambda_0, \dots, \lambda_6$;
 x - wektor o współrzędnych $x_1, \dots, x_6$;
 u - wektor sterowań u_1, u_2 ;
 $f(x, u)$ - wektor, którego współrzędnymi są prawe strony równań układu (3.15);

oraz:

$$\nu = \lambda \frac{\partial f}{\partial u_2} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} \right]^{-1}. \quad (4.4)$$

Ograniczenie sterowania u_2 więzami Φ_2 (3.17) występuje dla prędkości $V(t) > V_m$. Charakterystyczną prędkość V_m wyznacza się dla granicznych wartości sterowań i przeciążenia, a więc z równania więzów Φ_2 otrzymamy:

$$V_m = \sqrt{m_m \frac{a_{zd} + g \cos \gamma_m}{A \sigma_{max}}}. \quad (4.5)$$

Warunki transversalności dotyczące rozmaitości Θ^1 przy niecałkowym wskaźniku jakości przyjmują postać [5]:

$$-\lambda_0 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial G}{\partial x_j} \eta_j^1 + \sum_{j=1}^6 \lambda_j \eta_j^1 = 0, \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial \Theta_\sigma^1}{\partial x_j} \eta_j^1 = 0, \quad \sigma = 1, 2, 3, 4, 5,$$

gdzie: $\eta^1 = [\eta_1^1, \dots, \eta_6^1]$ - dowolny wektor normalny do wektora λ w chwili t_1 .

Odpowiednie przekształcenia oraz wykorzystanie warunków transversalności, prowadzi do następującej postaci układu równań zmiennych sprzężonych [7]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_0 - \left(\lambda_0 + \frac{\Omega}{x_1^1} \right) \cos(x_2 - \Theta_0) - \lambda_2 \left[\bar{A} \frac{1}{x_6} u_2 + \frac{g}{x_1^2} \cos x_2 \right] \Rightarrow \Phi_2 < 0, \\
 \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_0 - \left(\lambda_0 + \frac{\Omega}{x_1^1} \right) \cos(x_2 - \Theta_0) + \lambda_2 \left[\bar{A} \frac{1}{x_6} u_2 + \frac{g}{x_1^2} \cos x_2 \right] \Rightarrow \Phi_2 = 0, \\
 \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_2 \frac{g}{x_1} \sin x_2 + x_1 \left(\lambda_0 + \frac{\Omega}{x_1^1} \right) \sin(x_2 - \Theta_0) \Rightarrow \Phi_2 < 0, \\
 \dot{\lambda}_2 &= x_1 \left(\lambda_0 + \frac{\Omega}{x_1^1} \right) \sin(x_2 - \Theta_0) \Rightarrow \Phi_2 = 0, \\
 \dot{\lambda}_3 &= \dot{\lambda}_4 = \dot{\lambda}_5 = 0, \\
 \dot{\lambda}_6 &= \lambda_2 \bar{A} \frac{1}{x_6} x_1 u_2 \Rightarrow \Phi_2 < 0, \\
 \dot{\lambda}_6 &= 0 \Rightarrow \Phi_2 = 0.
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Na podstawie funkcji Hamiltona (3.17) funkcje przełączania dla sterowań $u_1(t)$ i $u_2(t)$ odpowiednio $\sigma_1(t)$ i $\sigma_2(t)$ wynoszą:

$$\sigma_1(t) = \lambda_1(t), \quad (4.8)$$

$$\sigma_2(t) \equiv \lambda_2(t) \bar{A} \frac{1}{x_6(t)} x_1(t).$$

Supremum Hamiltonianu (4.1) przy więzach (3.17) zapewnia następujący zbiór sterowań:

$$\begin{aligned} a) \quad u_1(t) &= a_{xd} & \Rightarrow \sigma_1(t) > 0, \\ b) \quad u_1(t) &= 0 & \Rightarrow \sigma_1(t) < 0, \\ c) \quad u_2(t) &= +\delta_{max} & \Rightarrow \sigma_2(t) > 0 \quad \text{i} \quad \Phi_2 < 0, \\ d) \quad u_2(t) &= -\delta_{max} & \Rightarrow \sigma_2(t) < 0 \quad \text{i} \quad \Phi_2 < 0, \\ e) \quad u_2(t) &= + \frac{(a_{xd} + g \cos x_2) x_6(t)}{A[x_1(t)]^2} & \Rightarrow \sigma_2(t) > 0 \quad \text{i} \quad \Phi_2 = 0, \\ f) \quad u_2(t) &= - \frac{(a_{xd} + g \cos x_2) x_6(t)}{A[x_1(t)]^2} & \Rightarrow \sigma_2(t) < 0 \quad \text{i} \quad \Phi_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na podstawie analizy funkcji przełączania ze zbioru sterowań (4.9) możemy wyznaczyć następujące ciągi sterowań optymalnych, które zgodnie z równaniami ruchu (3.15) przeprowadzając raketę ze stanu początkowego Θ^0 do końcowego Θ^1 minimalizują odległość do bliższej granicy strefy przechwycenia:

$$1) \quad u_1(t) = \{a_{xd}\}, \quad (4.10)$$

$$u_2(t) = \left\{ \pm \delta_{max}; \pm \frac{(a_{xd} + g \cos x_2) x_6(t)}{A[x_1(t_m)]^2} \right\},$$

$$2) \quad u_1(t) = \{a_{xd}; 0; a_{xd}\}, \quad (4.11)$$

$$u_2(t) = \left\{ \pm \delta_{max}; \pm \frac{(a_{xd} + g \cos x_2) x_6(t)}{A[x_1(t_m)]^2} \right\}.$$

4.2. Rozwiązanie równań ruchu dla sterowań optymalnych

Rozwiązanie równań ruchu (3.15) dla sterowań (4.9) jest możliwe na drodze numerycznej. Dla przypadków gdy $a_{xd} \gg g \cos x_2$ sterowanie u_2 określone zależnością (4.9e,f) przy $\Phi_2 = 0$ możemy zapisać jako:

$$u_2(t) = \pm \frac{a_{xd} + x_6(t)}{A[x_1(t)]^2}. \quad (4.12)$$

Dla $w_e = \text{const.}$, $c_x = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, wykorzystując pierwsze i ostatnie z równań układu (3.15) uzyskamy zależności na zmianę masy rakiety podane w pracy [8] w postaci:

1) dla $\Phi_2 < 0$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{xd}, & u_2(t) &= \delta_{max}, \\ V(t) &= V_0 + a_{xd}(t - t_0), \\ m(t) &= \left(m_0 - \frac{2\bar{c}_x w_e^2}{\bar{a}_{xd}}\right) e^{-\bar{a}_{xd}(t-t_0)} - \bar{c}_x a_{xd} \left[(t - t_0)^2 - \frac{2(t - t_0)}{\bar{a}_{xd}} + \frac{2}{\bar{a}_{xd}^2}\right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

2) dla $\Phi_2 = 0$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0, & u_2(t) &= \frac{a_{xd}}{AV_m^2} m(t) = \delta_{max}, \\ V(t) &= V_m = \text{const.}, \\ m(t) &= m_m \left[1 - \frac{\bar{c}_x}{w_e} \frac{a_{xd}}{A\delta_{max}} (t - t_m)\right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

3) dla $\Phi_2 = 0$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{xd}, & u_2(t) &= \frac{a_{xd}}{A[V(t)]^2} m(t), \\ m(t) &= \left(m_p - \frac{2\bar{c}_x w_e^2}{\bar{a}_{xd}}\right) e^{-\bar{a}_{xd}(t-t_p)} - \bar{c}_x a_{xd} \left[(t - t_p)^2 - \frac{2(t - t_p)}{\bar{a}_{xd}} + \frac{2}{\bar{a}_{xd}^2}\right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdzie:

$$\bar{a}_{xd} = \frac{a_{xd}}{w_e}, \quad \bar{c}_x = c_x \rho \frac{S}{2},$$

t_m - chwila osiągnięcia przez raketę maksymalnych przyspieszeń normalnych;

m_m, V_m - masa i prędkość rakiety w chwili t_m ;

t_p, m_p - czas i masa rakiety w chwili przełączania sterowania.

Wykorzystując zależności (4.14) i (4.15), sterowania u_2 dla $\Phi_2 = 0$ możemy zapisać w postaci:

1) gdy $u_1(t) = 0$

$$u_2(t) = \pm \left[\delta_{max} - \bar{a}_x(t - t_m)\right] = \frac{m(t)}{m_m} \delta_{max}, \quad (4.16)$$

2) gdy $u_1(t) = a_{xd}$

$$u_2(t) = \pm \frac{a_{zd} m_p e^{-\bar{a}_{xd} t} - \bar{c}_x a_{xd} \left[(t - t_p)^2 - \frac{2(t - t_p)}{\bar{a}_{xd}} + \frac{2}{\bar{a}_{xd}^2} \right]}{\bar{A} [V_m + a_{xd}(t - t_m)]} . \quad (4.17)$$

Na podstawie (4.13) i (4.5) oraz zbioru sterowań optymalnych (4.9) możemy zapisać:

$$V_m = \sqrt{m(t_m) \frac{a_{zd}}{\bar{A} \delta_{max}}} = V_0 + a_{xd} t_m , \quad (4.18)$$

Podstawiając za $m(t)$ zgodnie z (4.13) otrzymamy:

$$(V_0 + a_{xd} t_m)^2 - \frac{a_{zd}}{\bar{A} \delta_{max}} \left\{ m_0 e^{-\bar{a}_{xd} t_m} - \bar{c}_x a_{xd} \left[t_m^2 - \frac{2t_m}{\bar{a}_{xd}} + \frac{2}{\bar{a}_{xd}^2} \right] \right\} = 0 . \quad (4.19)$$

Z równania (4.19) możemy z dowolną dokładnością wyznaczyć charakterystyczny czas t_m metodą iteracyjną.

Wykorzystując zbiór sterowań optymalnych dla przypadku, gdy $\Phi_2 < 0$ pozostałe równania ruchu układu (3.15) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\bar{A}}{m(t)} (V_0 + a_{xd} t) \delta_{max} , \\ \frac{dx}{dt} &= (V_0 + a_{xd} t) \cos \gamma(t) , \\ \frac{dh}{dt} &= (V_0 + a_{xd} t) \sin \gamma(t) , \end{aligned} \quad (4.20)$$

gdzie: $m(t)$ – opisuje równanie (4.12).

Złożona postać równania (4.13) zezwala na rozwiązanie układu równań różniczkowych (4.20) jedynie drogą rozwiązań numerycznych. Dla przypadku, gdy $\Phi_2 = 0$ i $\sigma_1 < 0$ równania ruchu przyjmują postać:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_m , \\ \gamma(t) &= \gamma_p \pm \frac{\bar{A}}{m_p} V_m \delta_{max} (t - t_p) , \\ x(t) &= x_p \pm \frac{m_p}{\bar{A} \delta_{max}} [\sin \gamma(t) - \sin \gamma_p] , \\ h(t) &= h_p \pm \frac{m_p}{\bar{A} \delta_{max}} [\cos \gamma_p - \cos \gamma(t)] . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sterowania optymalne opisane zależnościami (4.9a) i (4.9e,f) dają rozwiązania równań ruchu w postaci:

$$V(t) = V_m + a_{xd}(t - t_p) ,$$

$$\gamma(t) = \gamma_p \pm \frac{a_{zd}}{a_{xd}} \ln \frac{V(t)}{V_m}, \quad (4.22)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{4a_{xd}^2 + a_{zd}^2}} \left\{ V^2(t) \cos [\gamma(t) - \varphi] - V_m^2 \cos [\gamma_p - \varphi] \right\} + x_p,$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{4a_{xd}^2 + a_{zd}^2}} \left\{ V^2(t) \sin [\gamma(t) - \varphi] - V_m^2 \sin [\gamma_p - \varphi] \right\} + h_p.$$

4.3. Wyznaczenie charakterystycznych stref sterowalności

Z równań ruchu (3.15) oraz więzów (3.17) wynika, że istnieje minimalny promień manewru rakiety określony zależnością:

$$R_m = \frac{1}{a_{zd}} \sqrt{m_m \frac{a_{zd} + g \cos \gamma_m}{\bar{A} \delta_{max}}}, \quad (4.23)$$

który wyznacza granicę nieosiągalnego manewrem bezpośrednim obszaru przestrzeni wokół punktu startu nazywanego [4] strefą n (rys.3).

Rozwiązania równań ruchu (4.20)÷(4.22) pozwalają podzielić obszar wokół punktu startu rakiety na charakterystyczne strefy sterowalności (rys.3).

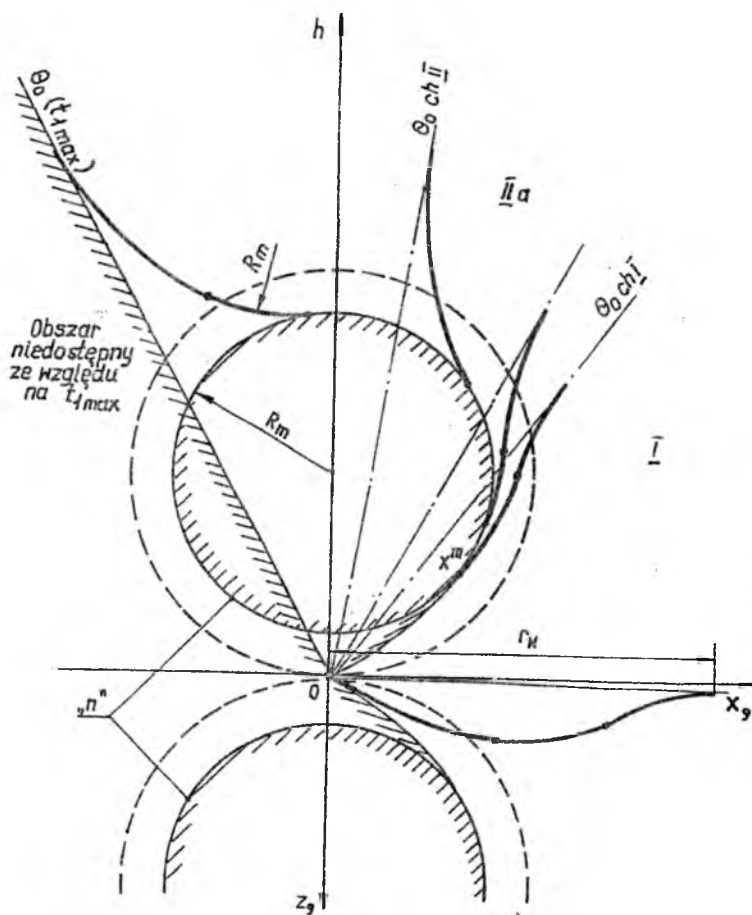
Podział obszaru wokół punktu startu na strefy I, IIa, IIb, charakteryzuje się tym, że osiągnięcie rozmaitości końcowej Θ^1 dla I strefy występuje przy nieprzerwanym rozpędzaniu się rakiety od prędkości V_0 do V_1 , natomiast dla stref IIa i IIb wykres prędkości lotu rakiety posiada kształt jak na rysunku 4b. Promień krzywizny toru zależy od przeciążeń normalnych dysponowanych jakie posiada rakietka w danym punkcie trajektorii ruchu.

Dla sterowań (4.9a) i (4.9c,d), a więc dla $t < t_m$ rakietka porusza się zgodnie z równaniami (4.20), a jej przyspieszenie normalne a_z i promień krzywizny toru R_{krz} opisują zależność:

$$a_z = V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\bar{A}}{m(t)} V(t)^2 \delta_{max}, \quad (4.24)$$

$$R_{krz} = \frac{V^2(t)}{a_z} = \frac{m(t)}{\bar{A} \delta_{max}}.$$

Stale wartości $\bar{A}$ i δ_{max} , oraz malejąca masa rakiety opisana zależnością (4.12) powodują, że w omawianym przedziale czasu $t \in (t_0, t_m)$ brzeg strefy niedostępnej n , oraz tory lotu rakiety stanowią krzywe o malejącym promieniu

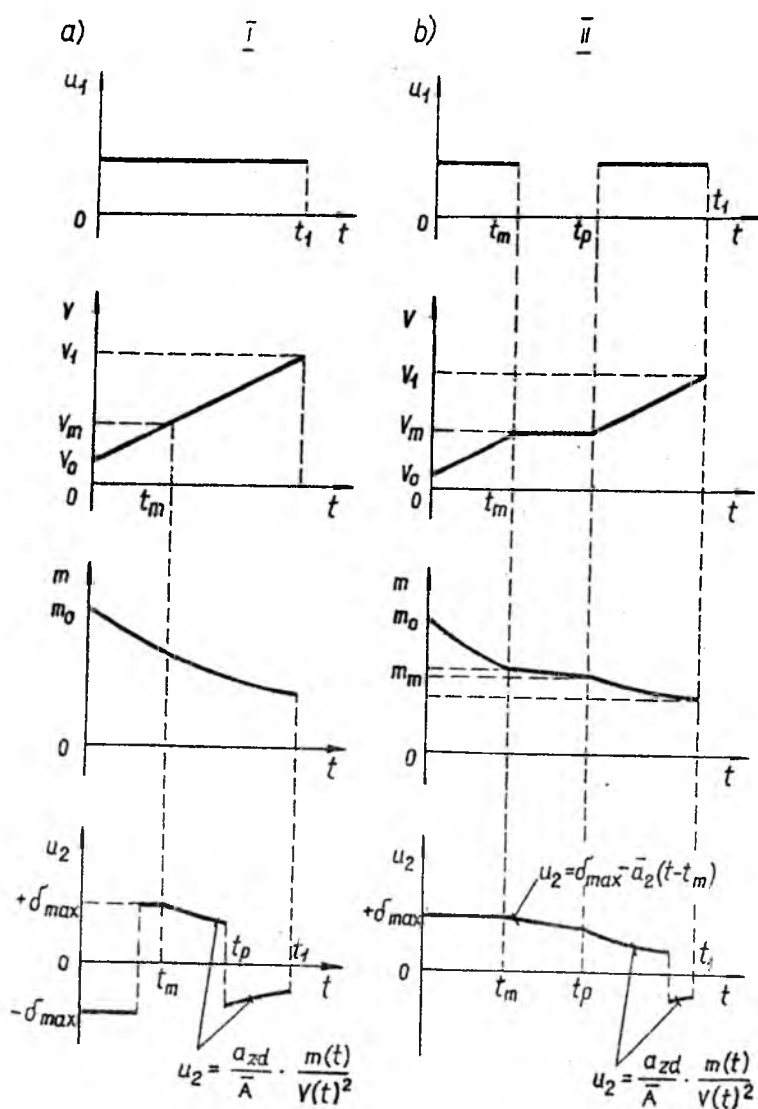


Rys. 3.

R_{krz} . Po osiągnięciu dopuszczalnych przyspieszeń normalnych równych a_{zd} , dla $t \in (t_m, t_1)$ torami rakiety są:

- 1) dla rozwiązań (4.9b) i (4.9c,d) okręgi o promieniu $R_m = m_m / (\bar{A}\delta_{max})$;
- 2) dla rozwiązań (4.9a) i (4.9e,f) konchoida – krzywa o rosnącym promieniu krzywizny.

Optymalne trajektorie ruchu rakiety składają się z dwóch do czterech odcinków gładkich ekstremali opisanych wzorami (4.20)÷(4.22) w zależności od wartości położenia linii obserwacji celu (kąta θ_0). Programy sterowania dla $u_1(t)$ i $u_2(t)$, zmiany prędkości oraz masy rakiety dla poszczególnych stref sterowalności przedstawia rys.4. Program sterowania $u_2(t)$ dla czasów $t > t_m$, a więc gdy



Rys. 4.

$\Phi_2 = 0$ jest zależny od charakteru zmiany masy rakiety. Dla strefy IIa (rys.4b) w przedziale czasu $t \in (t_m, t_p)$ przy stałej prędkości lotu równej V_m , masa rakiety (zal. (4.14) oraz program $u_2(t)$ (zal. (4.16) są liniowymi funkcjami czasu lotu rakiety t). Na podstawie zależności (4.23) możemy stwierdzić, że dla malejącej masy rakiety krzywizna jej toru lotu rośnie. Minimalizowana odległość do bliższej granicy strefy przechwycenia r_w z uwzględnieniem zmiany masy rakiety jest mniejsza niż dla przypadku gdy $m = \text{const}$. Kształt strefy niedostępnej "n" dla stałej masy rakiety przedstawiono na rys.3 linią przerywaną.

5. Zakończenie

W pracy rozważono problem minimalizacji bliższej granicy strefy przechwycenia zestawu przeciwnolotniczego w polu grawitacyjnym. Dla ilustracji wyników przyjęto model fizyczny małej rakiety o zmiennej masie sterowanej aerodynamicznie, naprowadzanej wiązką, startującej z wyrzutni o stałym kącie podniesienia prowadnic. Przyjęcie całkowitego przyspieszenia stycznego za sterowanie u_1 oraz ograniczeń technicznych na maksymalne wychylenie sterów i warunków bezpieczeństwa (ograniczenie przeciążeń normalnych) pozwoliło uzyskać rozwiązania graniczne. Problem optymalnego wprowadzenia rakiety w pole sterowania obejmuje program zmiany modułu prędkości lotu oraz program zmiany kierunku tejże prędkości. Przewiduje on sterowanie na odcinku rozpędzania się rakiety do wymaganej prędkości końcowej. Jego osobliwością jest ograniczenie procesu rozpędzania rakiety przy dużych różnicach kątowych położenia wiązki i prowadnic wyrzutni. Jest to konieczne dla wykonania "ciasnego" manewru zmniejszającego efektywnie odległość do bliższej granicy strefy przechwycenia, przy ograniczonych przeciążeniach normalnych. Stosowanie programu z $a_{xd} = 0$, dla $V = V_m$ znajduje uzasadnienie w przebiegu spalania paliwa rakietowego w istniejących zestawach. Podkreśla to wagę stosowania, programu sterowania przyspieszeniem stycznym (modułem wektora prędkości), dla skrócenia odległości do bliższej granicy strefy przechwycenia zestawów p.lot z programowym wprowadzaniem rakiet w pole sterowania.

Uzyskane rozwiązania zadania optymalnego wprowadzenia rakiety w wiązkę sterującą dla zmiennej masy rakiety różnią się od uzyskanych w pracy [6] tylko dla czasów t mniejszych od charakterystycznego czasu t_m . Dla pozostałych przypadków zmianie ulegają czasy przełączeń poszczególnych sterowań. Nie wpływa to na postać programów sterowania w sposób jakościowy.

Zaproponowana w pracy metoda określania warunków brzegowych optymalizowanego procesu, oraz wyznaczania sterowań optymalnych, mogą być zastosowane dla dowolnego układu aerodynamicznego rakiet sterowanych.

Przedstawione programy sterowania, wymagać będą pewnej korekcji wpływającej z analizy dynamiki rakiety jako ciała sztywnego. Istotne różnice między programami optymalnym i rzeczywistym, będą zależały od technicznego rozwiązania układu sterowania. Prowadzić to będzie do przesunięcia punktów przełączania poszczególnych sterowań. Wykorzystanie optymalnych programów wprowadzenia rakiety w pole sterowania, oraz zastosowanie rakiet manewrujących z przeciążeniami (30 – 40)g pozwala na eliminowanie (szczególnie w zestawach rakiet bliskiego zasięgu) wyrzutni ze zmiennym kątem startu rakiet.

W nowoczesnym francuskim zestawie SYRINX produkowanym w trzech odmianach, rakietą ASTER programowo wprowadzana w pole sterowania, startuje zawsze pionowo. Daje to możliwość ataku celu zbliżającego się z dowolnego kierunku.

Literatura

1. DUBIEL S., 1972, *Koncepcja ujęcia lotu sterowanego nieciągłym procesem jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi*, Biul.WAT nr.11, Warszawa
2. DUBIEL S., 1973, *Więzy uogólnione i ich zastosowanie do badania sterowalności obiektów latających*, Dodatek do Biul.WAT nr.12, Warszawa
3. DUBIEL S., *Problem minimalno-czasowy w nawigacji*, Biuletyn WSMW
4. HOMZIUK A., 1989, *Minimalno-czasowe strefy przechwycenia celu rakietą przeciwlotniczą*, Rozprawa doktorska, WAT Warszawa
5. LEITMAN G., 1971, *Wprowadzenie do teorii optymalnego sterowania*, Warszawa
6. DUBIEL S., KAMOLA J., 1990, *Minimalizacja bliższej granicy strefy przechwycenia celu*, Biuletyn WAT nr.11
7. KAMOLA J., 1991, *Minimalizacja bliższej granicy strefy przechwycenia rakietą przeciwlotniczą wprowadzaną programowo w pole sterowania*, Rozprawa doktorska, WAT Warszawa

MODELOWANIE I ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNYCH RAKIET PRZECIWPANCERNYCH¹

JÓZEF GACEK

BOGDAN MACHOWSKI

KONRAD SIENICKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Sformulowano model matematyczny procesu naprowadzania rakiety przeciwpancernej I i II generacji na cel ruchomy. W modelu matematycznym ruchu rakiety uwzględniono zbiór zakłóceń oraz parametrów ruchu celu uwarunkowany względami praktycznymi. Rozważania teoretyczne uzupełniono wynikami badań symulacyjnych, na podstawie których dokonano weryfikacji zaproponowanego modelu matematycznego.

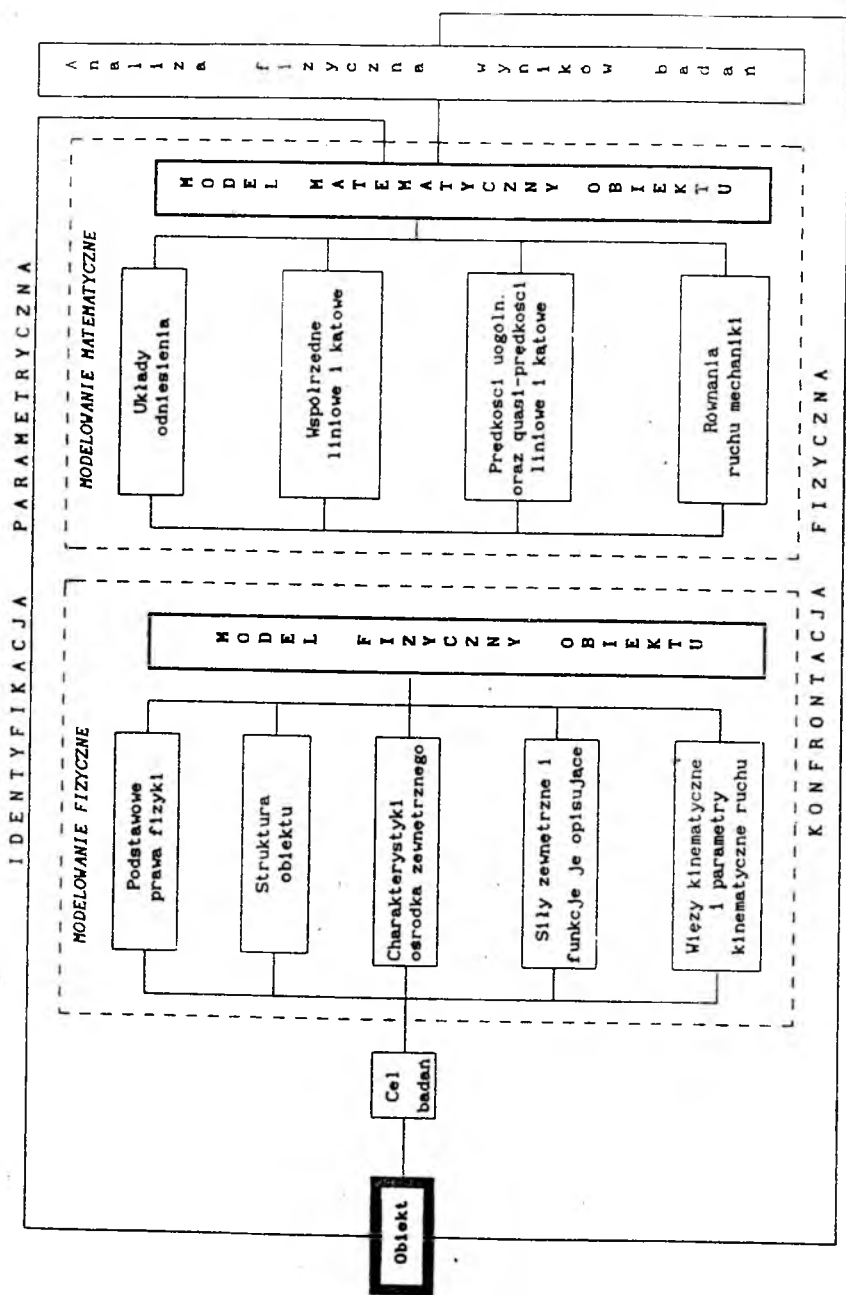
1. Wstęp

Intensywny rozwój automatyzacji we wszystkich dziedzinach techniki, w tym szczególnie w technice wojskowej wymaga nowego podejścia do wielu zagadnień oraz opracowywania coraz doskonalszych urządzeń umożliwiających wykonywanie złożonych czynności. Skomplikowane i złożone w eksploatacji urządzenia techniczne wymagają stosowania różnego rodzaju symulatorów i imitatorów. Technika uzbrojenia wymaga ponadto odpowiedniego przygotowania obsługi oraz sprzętu do użycia (szkolenie załóg, sprawdzenia techniczne, dane do startu rakiet, programy torów lotu, konstrukcja nowoczesnych środków walki itp.). Praktyczna realizacja większości tego typu zadań wymaga przeprowadzenia procesu modelowania występujących w nich zjawisk fizycznych. Proces modelowania odgrywa także główną rolę w badaniach dynamiki lotu obiektów.

Badania właściwości dynamicznych rakiet przeciwpancernych można przeprowadzać metodą [2]:

- badań doświadczalnych na obiektach rzeczywistych (np. badania poligony);

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Schemat blokowy modelowania fizycznego i matematycznego obiektu

- badań doświadczalnych na modelach materialnych obiektów (np. badania charakterystyk aerodynamicznych rakiet w tunelach aerodynamicznych);
- badań teoretycznych, w oparciu o zbudowane modele fizyczne i matematyczne obiektów.

W procesach badania dynamiki obiektów, badania teoretyczne są często stosowane z uwagi na wiele zalet w porównaniu z badaniami doświadczalnymi (np. niższy koszt, niezależność od warunków zewnętrznych, itp.). Algorytmy badań teoretycznych właściwości dynamicznych obiektów oparte są na odpowiednich modelach fizycznych i matematycznych badanych zjawisk fizycznych. Zastosowany schemat modelowania przedstawiono na rysunku 1.

Podstawowe oznaczenia i układy współrzędnych stosowane w pracy przyjęto według PN-83/L.

2. Modelowanie właściwości dynamicznych rakiety przeciwpancernej w ruchu przestrzennym

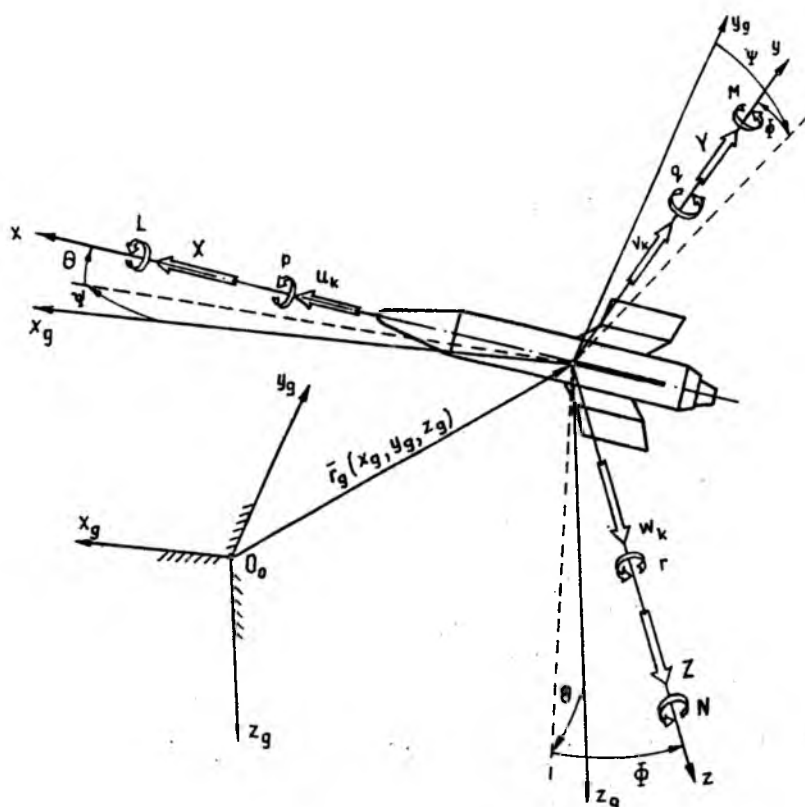
W procesie modelowania fizycznego i matematycznego rakiety uwzględniono uzasadnione względami praktycznymi założenia upraszczające dotyczące konstrukcji rakiety oraz warunków w jakich odbywa się jej ruch. Podstawowe z tych założeń formułuje się następująco:

- rakieta jest bryłą o sześciu stopniach swobody;
- normalne wartości parametrów charakteryzujących ośrodki ruchu przyjęto według Normalnej Atmosfery Artyleryjskiej;
- rakieta naprowadzana jest na cel ruchomy systemem przewodowym (ręcznie lub półautomatycznie);
- zmiany charakterystyk modelu fizycznego rakiety (konstrukcyjnych i ośrodka ruchu) określono na podstawie analizy warunków, w jakich zachodzą rzeczywiste procesy naprowadzania rakiet;
- ruch rakiety opisany jest parametrami przedstawionymi na rysunku 2.

Współrzędne liniowe x_g, y_g, z_g określają położenie środka masy rakiety O (początku układu odniesienia $Oxyz$ związanej poruszającą się rakieta) względem początku O_0 inercyjnego układu odniesienia związanego z Ziemią $O_0x_gy_gz_g$ (rys.2).

Współrzędne katowe $\Rightarrow$ kąty obrotu Ψ, Θ, Φ określają jednoznacznie konfigurację układu współrzędnych związanego z rakieta $Oxyz$ względem normalnego ziemskiego układu współrzędnych $Ox_gy_gz_g$ (rys.2).

Przyjęto, że ruch rakiety w atmosferze odbywa się pod wpływem wypadkowej F_w sił aerodynamicznych R^A , ciągu silnika F , siły ciężkości G , siły sterującej



Rys. 2. Przyjęte współrzędne liniowe x_g, y_g, z_g ; kątowne ψ, θ, ϕ ; prędkości ich zmian: u_k, v_k, w_k, p, q, r ; składowe wypadkowej siły F_w i jej momentu $\mathcal{M}$ w związanym układzie współrzędnych $0xyz$

P_s oraz wypadkowej siły wywołanej naciąganiem i zsuwaniem się przewodu ze szpuli T_{prz} :

$$\mathbf{F}_w = \mathbf{R}^A + \mathbf{F} + \mathbf{G} + \mathbf{P}_s + \mathbf{T}_{prz}. \quad (2.1)$$

Składowe X, Y, Z siły $\mathbf{F}_w$ oraz jej momentu $\mathcal{M}$ w układzie współrzędnych $0xyz$ przedstawiono na rysunku 2.

Siłę sterującą i jej moment w układzie $0xyz$ określono następująco:

$$\mathbf{P}_{sw} = \sum \mathbf{P}_{si} \mathbf{A}_{P_i} = \begin{bmatrix} P_{x0} \\ P_{y0} \\ P_{z0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_{sw} = \sum \mathcal{M}_{si} \mathbf{A}_{\mathcal{M}_{si}} = \begin{bmatrix} L^p \\ M^p \\ N^p \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

gdzie:

$$A_{P_{si}} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_{Pyi} \cos \Phi_{Pzi} \\ \sin \Phi_{Pzi} \\ -\sin \Phi_{Pyi} \cos \Phi_{Pzi} \end{bmatrix},$$

$$A_{M_{si}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \Theta \cos \Phi & -\sin \Phi_{Pzi} \\ -\cos \Theta_{Pyi} \cos \Phi_{Pzi} & 0 & \cos \Phi_{Pzi} \cos \Phi_{Pzi} \\ \sin \Phi_{Fzi} & -\cos \Phi_{Pyi} \sin \Theta_{Pzi} & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie:

Φ_{Pyi}, Φ_{Pzi} - mimośród działania sił sterujących.

Siłę wypadkową T_p wywołaną efektami naciągu ($T_{prz\acute{s}r}$) i zsuwania się przewodu (P_P) określono zależnością:

$$T_p = T_{prz\acute{s}r} + P_P,$$

$$T_{prz\acute{s}r} = 0.077V - 0.0009V^2 + 0.000015V^3 + (0.81 - 0.041V + 0.0019V^2)\Theta + (0.001 - 0.00026V + 0.0000065V^2)p, \quad (2.3)$$

$$P_P = -0.0048T_{P\acute{s}r}. \quad (2.4)$$

W dalszych rozważaniach uwzględniono następujące składowe siły i momentu T_P :

$$T_{Px} = -0.87(T_{P\acute{s}r} + P_P), \quad (2.5)$$

$$L_{Px} = 0.021(T_{P\acute{s}r} + P_P). \quad (2.6)$$

Zależności opisujące składowe sił: R^A, F, G i ich momentów w układzie $0xyz$ zawierają równania ruchu.

Dla przyjętego modelu fizycznego rakiety sformułowano model matematyczny ruchu przestrzennego rakiety przeciwpancernej, który stanowią poniższe układy równań.

• Dynamiczne równania ruchu postępowego środka masy rakiety w układzie współrzędnych $0xyz$ (rys.2):

$$m(t)\left(\frac{du_k}{dt} + w_k q - v_k r\right) - S_x(t)(q^2 + r^2) - S_y(t)\left(\frac{dr}{dt} - pq\right) + S_z(t)\left(\frac{dq}{dt} + pr\right) = F \cos \Phi_{Fy} \cos \Phi_{Fz} - m(t)g(B, h) \sin \Theta - \frac{\rho(h)V^2}{2} S(C_x \cos \alpha \cos \beta + C_y \cos \alpha \sin \beta - C_z \sin \alpha) + P_s \cos \Phi_{Py} \cos \Phi_{Pz} + X_q^* q + T_{Px},$$

$$m(t)\left(\frac{dv_k}{dt} + u_k q - w_k p\right) + S_x(t)\left(\frac{dr}{dt} + qp\right) - S_y(t)(p^2 + r^2) - S_z(t)\left(\frac{dp}{dt} - qr\right) = F \sin \Phi_{Fz} + m(t)g(B, h) \cos \Theta \sin \Phi + \frac{\rho(h)V^2}{2} S(-C_x \sin \beta + C_y \cos \beta) + P_s \sin \Phi_{Pz} + Y_r^* r + Y_p^M p, \quad (2.7)$$

$$m(t)\left(\frac{dw_k}{dt} + v_k p - u_k q\right) - S_x(t)\left(\frac{dq}{dt} - pr\right) + S_y(t)\left(\frac{dp}{dt} + qr\right) + S_z(t)(q^2 + p^2) = -F \sin \Phi_{Fy} \cos \Phi_{Fz} + m(t)g(B, h) \cos \Theta \cos \Phi - \frac{\rho(h)V^2}{2} S(C_x \sin \alpha \cdot \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta + C_z \cos \alpha) - P_s \sin \Phi_{Py} \cos \Phi_{Pz} + Z_q^M q + Z_p^M p.$$

• Dynamiczne równania ruchu obrotowego obiektu wokół środka masy zapisane w układzie związanym $Oxyz$ (rys.2):

$$\begin{aligned} I_x(t)\frac{dp}{dt} - [I_y(t) - I_z(t)]qr - I_{xy}(t)\left(\frac{dq}{dt} - pr\right) - I_{xz}(t)\left(\frac{dr}{dt} + pq\right) + \\ - I_{yz}(t)(q^2 - r^2) + S_y(t)\left(\frac{dw_k}{dt} - u_k q + v_k p\right) - S_z(t)\left(\frac{dv_k}{dt} - w_k p + u_k r\right) = \\ = F(y_F \sin \Phi_{Fy} \cos \Phi_{Fz} + z_F \sin \Phi_{Fz}) + m(t)g(B, h)(y_G \cos \Theta \cos \Phi + \\ - z_G \cos \Theta \sin \Phi) + \frac{\rho(h)V^2}{2} S[-y_A(C_x \sin \alpha \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta + C_z \cos \alpha) + \\ + z_A(C_x \sin \beta - C_y \cos \beta) - l(C_{la}^A \cos \alpha \cos \beta + C_{ma}^A \cos \alpha \sin \beta + \\ - C_{na}^A \sin \alpha)] + P_s(y_{Ps} \sin \Phi_{Py} \cos \Phi_{Pz} + z_{Ps} \sin \Phi_{Pz}) + L_p^* p + L_r^* r + L_{Px}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y(t)\frac{dq}{dt} - [I_x(t) - I_z(t)]rp - I_{xy}(t)\left(\frac{dp}{dt} + qr\right) - I_{yz}(t)\left(\frac{dr}{dt} - qp\right) + \\ - I_{xz}(t)(r^2 - p^2) - S_x(t)\left(\frac{dw_k}{dt} + v_k p - u_k q\right) + S_z(t)\left(\frac{du_k}{dt} - v_k r - w_k q\right) = \\ = F(z_F \cos \Phi_{Fy} \cos \Phi_{Fz} + x_F \sin \Phi_{Fy} \cos \Phi_{Fz}) - m(t)g(B, h)(z_G \sin \Theta + \\ + x_G \cos \Theta \cos \Phi) + \frac{\rho(h)V^2}{2} S[-z_A(C_x \cos \alpha \cos \beta + C_y \cos \alpha \sin \beta + \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& -C_z \sin \alpha) + x_A (C_x \sin \alpha \cos \beta + C_y \sin \alpha \sin \beta + C_z \cos \alpha) + b_A (-C_{la}^A \sin \beta + \\
& + C_{ma}^A \cos \beta) + P_s (x_{P_s} \sin \Phi_{P_y} \cos \Phi_{P_z} + z_{P_s} \cos \Phi_{P_y} \cos \Phi_{P_z}) + \\
& + M_q^* q + M_p^M p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_x(t) \frac{dr}{dt} - [I_x(t) - I_y(t)] pq - I_{xy}(t) \left(\frac{dq}{dt} + rp \right) - I_{xz}(t) \left(\frac{dp}{dt} - rq \right) + \\
& - I_{xy}(t) (p^2 - q^2) + S_x(t) \left(\frac{dv_k}{dt} - w_k p + u_k r \right) - S_y(t) \left(\frac{du_k}{dt} + v_k r + w_k q \right) = \\
& = F (x_F \sin \Phi_{F_z} - y_F \cos \Phi_{F_y} \cos \Phi_{F_z}) + m(t) g(B, h) (x_G \cos \Theta \sin \Phi + \\
& + y_G \sin \Theta) + \frac{\rho(h) V^2}{2} S [x_A (-C_x \sin \beta + C_y \cos \beta) + y_A (C_x \cos \alpha \cos \beta + \\
& + C_y \cos \alpha \sin \beta - C_z \sin \alpha) - b_A (C_{la}^A \sin \alpha \cos \beta + C_{ma}^A \sin \alpha \sin \beta + \\
& + C_{na}^A \cos \alpha) + P_s (x_{P_s} \sin \Phi_{P_z} - y_{P_s} \cos \Phi_{P_y} \cos \Phi_{P_z}) + N_r^* r + N_p^M p.
\end{aligned}$$

• Związki kinematyczne prędkości kątowych (przechylenia, pochylenia i odchylenia):

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta}{dt} &= q \cos \Phi - r \sin \Phi, \\
\frac{d\Psi}{dt} &= (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \sec \Theta, \\
\frac{d\Phi}{dt} &= p + q \sin \Phi \tan \Theta + r \cos \Phi \tan \Theta.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

• Związki kinematyczne prędkości liniowych (ruchu podłużnego, bocznego i wznoszenia) w układzie $0_0 x_g y_g z_g$ (rys.3):

$$\begin{aligned}
\frac{dx_g}{dt} &= u_k \cos \Theta \cos \Psi + v_k (\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\
& + w_k (\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi), \\
\frac{dy_g}{dt} &= u_k \cos \Theta \sin \Psi + v_k (\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) +
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$+w_k(\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi) ,$$

$$\frac{dz_g}{dt} = -u_k \sin \Theta + v_k \sin \Phi \cos \Theta + w_k \cos \Phi \cos \Theta .$$

Aby zastosować układ równań (2.7) ÷ (2.10) do analizy ruchu rozpatrywanych rakiet przeciwpancernych należy go uzupełnić:

- zależnościami do wyznaczania bieżących wartości charakterystyk określających strukturę obiektu: $m(t)$, $x_{sm}(t)$, $y_{sm}(t)$, $z_{sm}(t)$, $S_x(t)$, $S_y(t)$, $S_z(t)$, $I_x(t)$, $I_y(t)$, $I_z(t)$, $I_{xy}(t)$, $I_{yz}(t)$, $I_{xz}(t)$, $F(t)$;
- zależnościami do wyznaczenia wartości bieżących podstawowych parametrów ośrodka ruchu obiektu: $g(B, h)$, $\rho(h)$, $T(h)$, $a(h)$, $\mu(h)$, $\nu(h)$;
- zależnościami do określania sił zewnętrznych i funkcji je opisujących.

Przyjęto, że w przypadku rozpatrywanej rakiety siły sterujące realizowane są za pomocą składowej ciągu F_N normalnej do osi Ox układu. $Oxyz$. Formowanie sił sterujących w płaszczyźnie odchylenia i pochylania jest dokonywane przez dobór przerzutu siły normalnej F_N w czasie obrotu rakiety w kącie przechylenia Φ . W przypadku, gdy sygnał sterujący jest funkcją czasu przerzutu, wartość średnich za jeden okres obrotu sił sterujących, określonych w płaszczyźnie pochyleń (kąta elewacji) ϵ i odchylenia β wynosi:

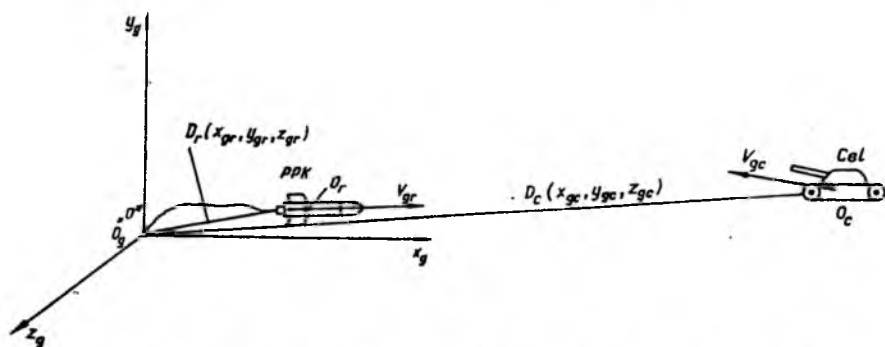
$$P_{yP} = - \frac{4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_N \cos \Phi d\Phi}{2\pi} k_y = 2\pi F_N k_y , \quad (2.11)$$

$$P_{zP} = - \frac{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_N \sin \Phi d\Phi}{2\pi} k_z = 2\pi F_N k_z ,$$

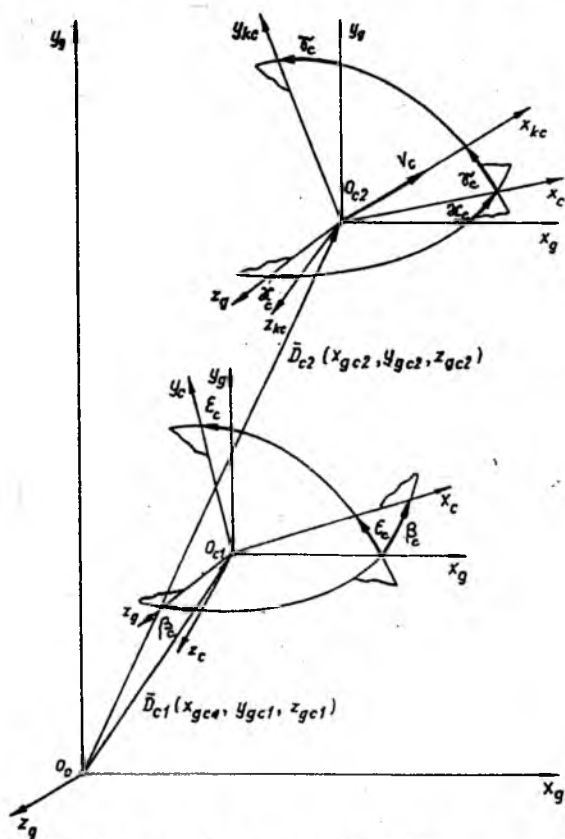
gdzie: k_y, k_z - sygnały sterujące $0 \leq k_y, k_z \leq 1$.

3. Symulacja komputerowa przyjętego procesu naprowadzania rakiety przeciwpancernej na cel ruchomy

Przyjęty schemat procesu naprowadzania rakiety na cel ruchomy przedstawiono na rysunkach 3 i 4.



Rys. 3. Przyjęty schemat naprowadzania rakiety przeciwpancernej na cel



Rys. 4. Schemat do wyznaczenia kątów: γ_c , κ_c , ϵ_c i β_c

Zgodnie ze schematem przedstawionym na rys.4 opis matematyczny ruchu celu sformułowano następująco:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{gc}}{dt} &= V_{xgc} = V_c \cos \gamma_c \cos \kappa_c, \\ \frac{dy_{gc}}{dt} &= V_{ygc} = -V_c \cos \gamma_c \sin \kappa_c, \\ \frac{dh_{gc}}{dt} &= -V_{zgc} = V_c \sin \gamma_c,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$D_c = \sqrt{x_{gc}^2 + y_{gc}^2 + h_c^2},$$

$$\sin \varepsilon_c = \frac{h_c}{D_c}, \quad \sin \beta_c = -\frac{y_{gc}}{D_c \cos \varepsilon_c}.$$

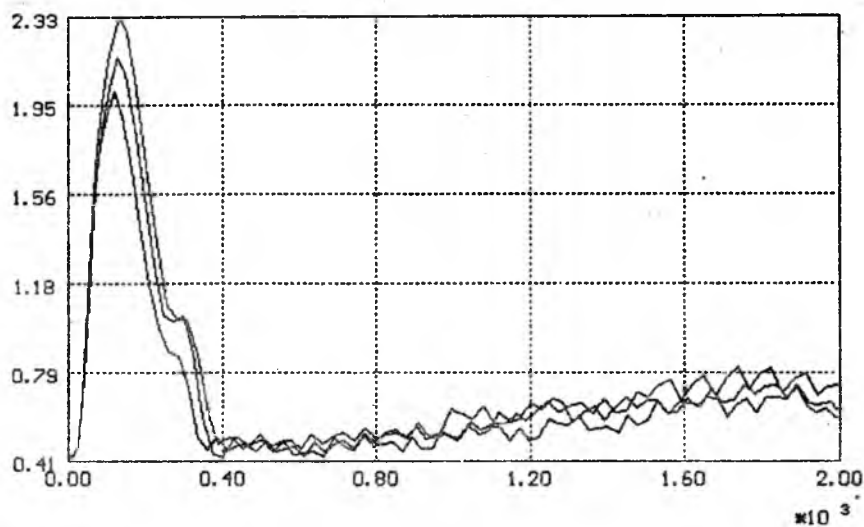
Układ równań opisujący proces naprowadzania rozwiązano metodą Rungego-Kutty przy wykorzystaniu komputera IBM PC/AT. Warunki początkowe oraz wartości liczbowe innych podstawowych wielkości wpływających na ruch rakiety przyjęto następujące:

- a) parametry początkowe startowe losowane są w algorytmie ze zbioru ich wartości uwarunkowanych praktyką artyleryjską;
- b) podstawowe charakterystyki konstrukcyjne
 - smukłość $\lambda_k = 8.45$;
 - rozpiętość stateczników $b = 0.75$ [m];
 - powierzchnia charakterystyczna $S = 0.145$ [m²];
- c) zakresy zmian parametrów atmosfery
 - temperatura $T = (-40 \div +50)$ [C°];
 - prędkość wiatru (w porywach) $W \leq 25$ [m/s];
 - azymut wiatru dowolny;
 - ciśnienie powietrza $p_{at} = (920 \div 1030)$ [hPa];
- d) parametry ruchu celu
 - prędkość ruchu celu $V_c \leq 17$ [m/s];
 - kierunek ruchu celu dowolny;
- e) prędkość maksymalna rakiety 200 [m/s].

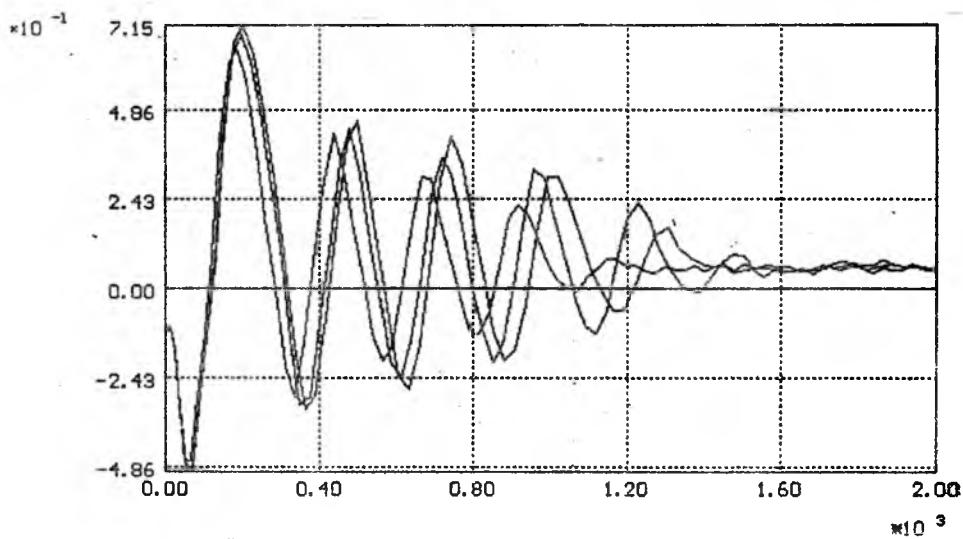
Niektóre wyniki badań symulacyjnych właściwości dynamicznych rakiety przeciwpancernej I generacji w systemie naprowadzania zestawiono na rysunkach 5 ÷ 8.

4. Wnioski końcowe

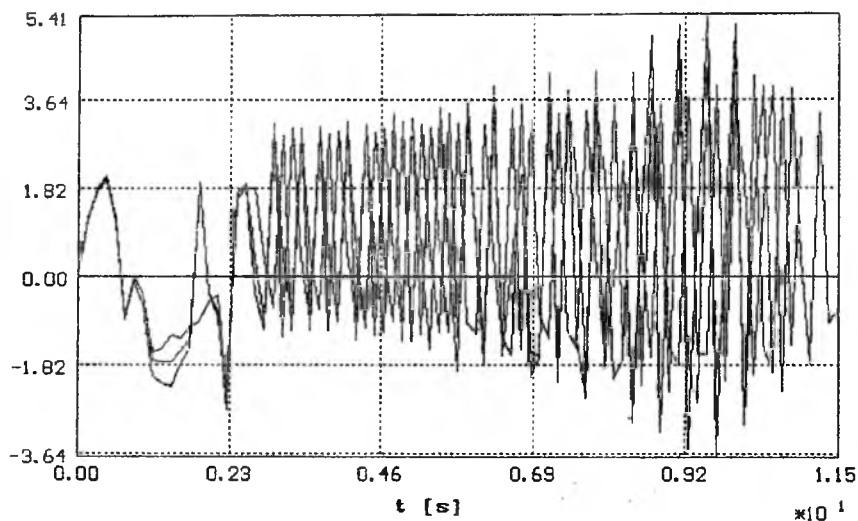
Na podstawie metod mechaniki i teorii sterowania sformułowano model mate-



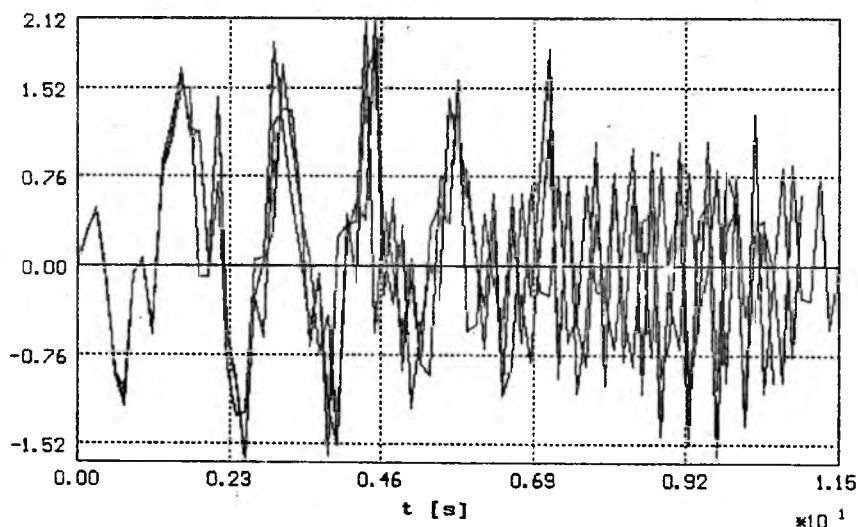
Rys. 5. Tor lotu PPK w płaszczyźnie elewacji



Rys. 6. Tor lotu PPK w płaszczyźnie azymutu



Rys. 7. Przeciążenie normalne w płaszczyźnie elewacji



Rys. 8. Przeciążenie normalne w płaszczyźnie azymutu

matyczny rakiety naprowadzanej w systemie ręcznym (półautomatycznym) na cel ruchomy. Uwzględniono przy tym wszystkie główne stopnie swobody rakiety jako układu mechanicznego.

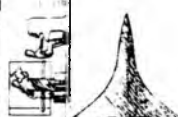
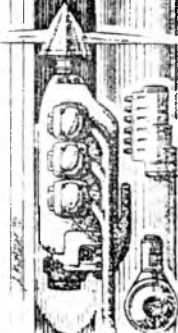
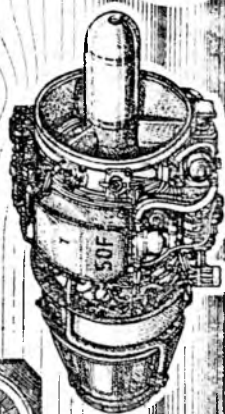
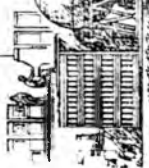
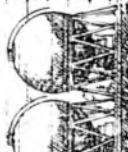
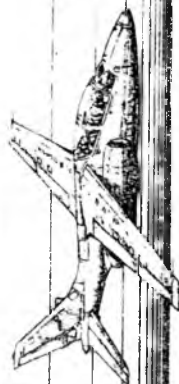
Sformułowany model matematyczny jest wygodny w badaniach komputerowych; może być wykorzystany w procesie rozwiązywania szeregu zagadnień badawczych, w których niezbędna jest znajomość właściwości dynamicznych rakiet przeciwpancernych, np: opracowanie procedur sprawdzeń technicznych, modernizacja rakiet, opracowanie nowych rozwiązań konstrukcyjnych (na wstępnym etapie projektowania). Poza tym zaproponowany model może stanowić podstawowy element nowoczesnego symulatora do efektywnego szkolenia obsługi zestawów rakiet przeciwpancernych.

Wyniki otrzymane na podstawie symulacji przy zastosowaniu przedstawionego modelu systemu naprowadzania, po konfrontacji z danymi określonymi innymi metodami (np. metodami eksperymentalnymi) potwierdziły poprawność opracowanego modelu.

Literatura

1. GACEK J., 1990, *Symulacyjna metoda identyfikacji lotu rakiet*, Biuletyn WAT, Nr 6 (454), Warszawa
2. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace PW, Nr 32, Mechanika, Warszawa
3. WIŚNIEWSKI S., 1979, *Model matematyczny ruchu pocisku wirującego o krzyżowym układzie aerodynamicznym*, Biuletyn WAT Nr 2 (318), Warszawa

Konstrukcja samolotów, silników i innych
 aparatury badawczej pomiarowej
 Badania aerodynamiczne i wytrzymałościowe
 Wykonanie funkcjonalne i niezawodnościowe
 Konstrukcja i montaż
 Materiałoznawstwo i technologia sprzętu
 Lotnictwo i silnikowe
 Projektowanie komputerowe metody
 obliczeniowe
 Badania w locie samolotów oraz
 silników i innych aparatów
 Projektowanie, badania i naprawy
 i podzespołów



INSTITUTE OF AVIATION

KONCEPCJA SYMULATORA PROCESU NAPROWADZANIA PPK¹

JÓZEF GACEK

BOGDAN MACHOWSKI

KONRAD SIENICKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wstęp

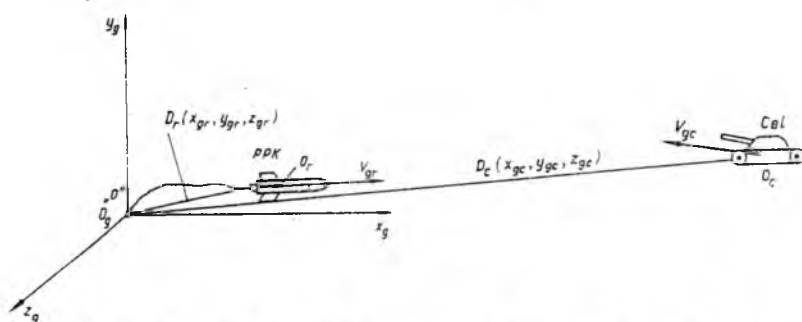
Rzeczywisty rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej jaką obserwujemy w ostatnich latach, pociągnął za sobą rozwój nowych metod szkolenia. Komputery znalazły zastosowanie w budowie symulatorów działających w czasie rzeczywistym. Szybka obróbka sygnałów umożliwia aktywny udział operatora w procesie symulacji.

2. Sformułowanie problemu

Należy opracować koncepcję budowy symulatora realizującego naprowadzanie małej rakiety na cel ruchomy w czasie rzeczywistym. Zadaniem operatora wyrzutni jest doprowadzenie do spotkania rakiety z celem. Kierowanie lotem rakiety odbywa się za pomocą komend zadawanych dźwignią drążka i przesyłanych na pokład rakiety linią przewodową. Na rys.1 przedstawiony jest schemat procesu zwalczania celu z użyciem rakiety. W nieruchomym ziemskim układzie współrzędnych $0_g X_g Y_g Z_g$ poruszają się:

- rakieta o prędkości wypadkowej V_{gr} , która znajduje się w odległości $D_r(X_{gr}, Y_{gr}, Z_{gr})$;
- cel poruszający się z prędkością V_{gc} , który znajduje się w odległości $D_c(X_{gc}, Y_{gc}, Z_{gc})$.

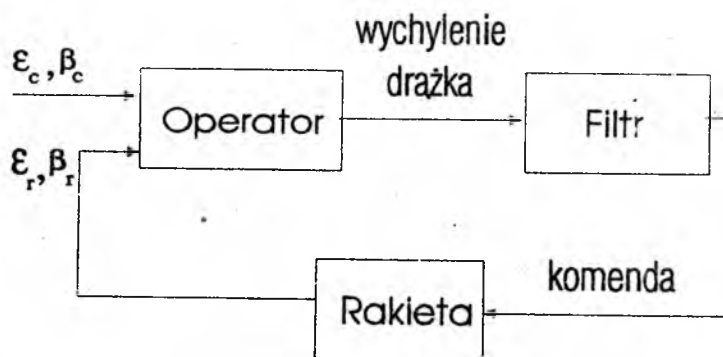
¹ Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Schemat procesu naprowadzania rakiety na cel ruchomy

3. Koncepcja komputerowego programu symulacji naprowadzania małej rakiety na cel ruchomy

Aby poprawnie zbudować model matematyczny układu należało zidentyfikować model fizyczny rakiety, oraz strukturę systemu, którego jest ona elementem. Schemat strukturalny obwodu naprowadzania przedstawiony jest na rys.2. Obwód składa się z następujących elementów: operatora, filtru oraz obiektu sterowania, którym jest przeciwpancerny pocisk kierowany (PPK).



Rys. 2. Struktura obwodu naprowadzania PPK

Zadaniem filtru jest zabezpieczenie układu naprowadzania przed gwałtowną zmianą komend sterujących, które wypracowuje operator przez zmianę wychYLENIA drążka sterującego. Wielkość wychYLENIA drążka zależy od rozbieżności kątowej rakiety i celu oraz od odległości rakiety od stanowiska operatora.

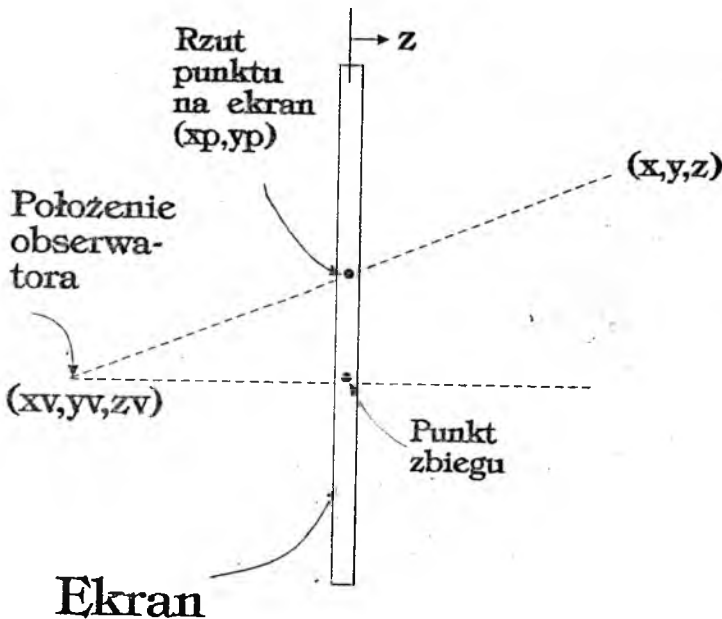
Do rozwiązania układu równań różniczkowych wykorzystano stałokrokową

czteropunktową metodę całkowania Rungego-Kutty. Na wybór metody miał wpływ sposób zobrazowania graficznego przemieszczającej się rakiety do ruchomego celu. Stałokrokowa metoda całkowania zapewnia, równomierne ze względu na rzeczywisty czas symulacji odświeżanie znacznika rakiety.

Ważnym elementem w procesie symulacji komputerowej jest stworzenie sytuacji taktycznej. Składają się na nią następujące elementy:

- zobrazowanie przemieszczającego się celu;
- zobrazowanie przemieszczającej się rakiety;
- zobrazowanie celownika;
- zobrazowanie urozmaiconego terenu;
- zobrazowanie zmiennych warunków atmosferycznych.

W celu osiągnięcia realizmu i głębi sceny sytuacji taktycznej znalazła zastosowanie projekcja obrazów na ekranie monitora w perspektywie (rys.3).



Rys. 3. Zobrazowanie perspektywy na ekranie monitora

Aby otrzymać rzut perspektywiczny zastosowano równania perspektywy. Dla każdego punktu (X, Y, Z) w scenie trójwymiarowej współrzędne punktu po trans-

formacji (XP, YP) na ekranie określa się jako:

$$XP = XV + (XV - X) \frac{ZV}{Z - ZV}, \quad (3.1)$$

$$YP = YV + (YV - Y) \frac{ZV}{Z - ZV}.$$

Przy czym punkt (XV, YV, ZV) jest *punktem patrzenia* (położeniem obserwatora) umieszczonym przed ekranem. Punkt (XV, YV) jest punktem zbiegu na ekranie. Rysunek ilustruje zależności między różnymi wartościami współrzędnych punktów przy bocznym widoku ekranu. Współrzędna ZV musi być zawsze ujemna, gdyż scenę oglądamy z przodu ekranu. Większe wartości ZV dają gorszą perspektywę (mniejszą zbieżność linii równoległych). Zbliżając punkt patrzenia do ekranu zwiększamy zniekształcenia perspektywiczne – zwiększa się zbieżność linii równoległych.

W proponowanej koncepcji opisu symulatora został zastosowany zmodyfikowany sposób uzyskania efektu perspektywy. Związane to było z faktem, iż urządzenia optyczne, przez które operator obserwuje przedpole mają ograniczony kąt widzenia (np. startująca rakietą w bliskim sąsiedztwie operatora jest przez niego "przechwycona wzrokowo" dopiero na pewnej odległości od wyrzutni). W proponowanej metodzie uzyskania perspektywy korzysta się z następujących zależności (rozpatrywana będzie płaszczyzna azymutu, ponieważ zależności dla płaszczyzny elewacji są analogiczne):

$$\text{baza} = 2 \cdot \text{odl} \cdot \text{tg} \beta, \quad (3.2)$$

$$\text{szer} = \frac{\text{RozEkr} \cdot \text{SzerOb}}{\text{baza}}$$

gdzie:

- odl – odległość obiektu od obserwatora,
- baza – szerokość przedpola widziana w odległości, odl od obserwatora przy kącie widzenia β ,
- β – kąt widzenia urządzenia optycznego,
- SzerOb – szerokość rzeczywista obserwowanego obiektu,
- szer – szerokość "ekranowa" obserwowanego obiektu,
- RozEkr – rozdzielczość ekranu w danej płaszczyźnie.

Do animacji wykorzystano transformację obrazów tj. skalowanie, obroty, przesunięcia. Animacja realizowana jest przez wielokrotne powtórzenie cyklu: wyświetlenie, wymazanie i ponowne wyświetlenie elementu obrazu po dokonanej transformacji. Płynność animacji dla złożonego obiektu jest trudna do uzyskania na komputerach o małej mocy obliczeniowej (małej ilości operacji zmiennopozycyjnych na sekundę). Problem ten został rozwiązany poprzez przeprowadzenie

dokładnej analizy numerycznej problemu i zrealizowany w wersjach na komputery klasy IBM PC XT i AT. W wersji na komputer klasy XT, wykorzystano model uproszczony rakiety, opisany różniczkowymi liniowymi równaniami stanu o stałych współczynnikach. Natomiast w wersji na komputer klasy AT, wykorzystano model matematyczny rakiety opisany nieliniowymi różniczkowymi równaniami stanu o zmiennych współczynnikach. Wyniki procesu symulacji wyprowadzane są do specjalnego pliku wynikowego. Na ich podstawie możemy analizować zmianę wszystkich zmiennych stanu, jak również sposób sterowania rakieta (zmianę komend sterujących). Ważnym elementem dla procesu dydaktycznego jest możliwość graficznego przedstawienia operatorowi wpływu wypracowanych przez niego komend (wychYLENIA drążka) na przeciążenia rakiety, a tym samym na tor lotu rakiety.

4. Uwagi i wnioski końcowe

W pracy omówiono ogólną koncepcję budowy symulatora naprowadzania małego pocisku raketowego naprowadzanego w czasie rzeczywistym na ruchomy cel. Symulator wykorzystujący przyjętą koncepcję umożliwia przyspieszenie procesu szkolenia operatorów i znaczne obniżenie kosztów. Wynika to z uniwersalności metody, bowiem:

- graficzne zobrazowanie procesu naprowadzania umożliwia głębsze zrozumienie zjawisk z jakimi operator spotyka się podczas naprowadzania rakiety (możliwe jest pełniejsze poznanie związku między wychYLENIEM drążka, a przemieszczeniem rakiety względem operatora);
- możemy ograniczyć liczbę różnych stanowisk szkoleniowych, wystarczy bowiem zmienić program oraz oprzyrządowanie komputera (aby zmienić wariant systemu naprowadzania rakiety), dzięki temu w jednym pomieszczeniu może być przeprowadzonych więcej szkoleń z różnorodnymi zestawami;
- istnieje możliwość analizy postępów szkolonego operatora, jego zdolności manualnych i predyspozycji psychicznych.

Podczas pracy nad symulatorem należy zwrócić uwagę na opis matematyczny modelu układu naprowadzania oraz samej rakiety. Od dokładności opisu zależy wiarygodność procesu symulacji, a tym samym możliwość zdobywania właściwych nawyków przez operatorów.

5. Literatura

1. ANGEL I.O., 1989, *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*, WNT Warszawa
2. DUBIEL S., 1990, *Naprowadzanie rakiet na cele ruchome jako nieswobodny ruch złożony*, Biuletyn WAT nr 10 (458)
3. GACEK J., MACHOWSKI B., SIENICKI K., 1992, *Modelowanie i analiza właściwości dynamicznych rakiet przeciwpacernych*, Mechanika w Lotnictwie, PTMTS Warszawa

ANALIZA DYNAMIKI RAKIETY METODĄ KOMPUTEROWEJ LINEARYZACJI RÓWNAŃ RUCHU¹

STANISŁAW DUBIEL

BOGDAN MACHOWSKI

KONRAD SIENICKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Celem pracy jest przedstawienie nowoczesnej metodyki, analizy dynamiki rakiety metodą *komputerowej linearyzacji równań ruchu*. Program komputerowej linearyzacji równań ruchu opracowany został na podstawie zidentyfikowanej rakiety oraz znajomości struktury toru naprowadzania. Wynikiem linearyzacji różniczkowych równań ruchu jest opis dynamiki rakiety w przestrzeni stanu. Na bazie nowoczesnej teorii sterowania wyznaczone zostały wartości własne macierzy stanu oraz współczynniki wzmocnienia. Na podstawie zidentyfikowanego liniowego modelu, dokonano syntezy optymalnego regulatora. W pracy przedstawiono zmianę wybranych, najbardziej interesujących parametrów opisujących dynamikę lotu rakiety przeciwpancernej. Przedstawiono też tory naprowadzania rakiety sterowanej automatycznie. Wykorzystanie opisanej metodyki umożliwia szybką ocenę poprawności modelu oraz ocenę ilościową i jakościową niestacjonarności obiektu. Daje również podstawę do syntezy optymalnych układów sterowania.

1. Wstęp

Rozwój ETO (elektronicznej techniki obliczeniowej) oraz KMN (komputerowych metod numerycznych) umożliwił nowe podejście do metod analizy dynamiki układów jedno- i wielowymiarowych. Mikrokomputery klasy PC znalazły zastosowanie w analizie dynamiki układów opisanych przez duże układy równań różniczkowych ($n \ll 2$). Realizacja procesów w czasie rzeczywistym umożliwiła budowę symulatorów realizujących naprowadzania rakiet przy aktywnym udziale operatora.

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

2. Sformułowanie problemu

Należy opracować *metodykę komputerowej linearyzacji* równań ruchu małej rakiety naprowadzanej na nieruchomy cel i wyznaczyć: wartości własne, częstości własne i tłumienia drgań kadłuba. Na podstawie zidentyfikowanych parametrów, dokonać syntezy optymalnego układu automatycznego naprowadzania rakiety. Kierowanie lotem rakiety odbywa się za pomocą komend zadawanych dźwignią drążka i przesyłanych na pokład rakiety linią przewodową. W procesie zwalczania celu z użyciem rakiety co Δt poprzez linearyzację równań wyznaczone są: macierz stanu A , wektor sterowań b i wektor wyjścia c . W nieruchomym ziemskim układzie współrzędnych $0_g X_g Y_g Z_g$:

- rakieta porusza się z prędkością wypadkową V w odległości $D_r(X_{gr}, Y_{gr}, Z_{gr})$,
- cel pozostaje nieruchomy w odległości $D_c(X_{gc}, Y_{gc}, Z_{gc})$.

3. Komputerowa linearyzacja równań ruchu

Układy sterowania różnego przeznaczenia najczęściej opisywane są nieliniowymi równaniami różniczkowymi. Jednak w praktyce przy analizie i projektowaniu takich układów szeroko wykorzystuje się równania linearyzowane. Ruch sterowany układu dynamicznego możemy opisać równaniem różniczkowym:

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(z, v, t), \quad z(0) = z_0, \quad (3.1)$$

gdzie:

- z - n -wymiarowy wektor współrzędnych stanu,
 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$,
- v - m -wymiarowy wektor funkcji sterujących,
 $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$.

Nieliniowa funkcja wektorowa $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ zawiera pochodne po z i v . Wyznamy wybrany tor ruchu układu nieliniowego (3.1) i umówimy się, że temu torowi odpowiadają wektory $z^*(t)$, $v^*(t)$ dla $t > 0$. Oznaczmy odchylenia

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t) - z^*(t), \\ u(t) &= v(t) - v^*(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jeśli $x(t) = 0$, $u(t) = 0$ dla każdego $t > 0$, to ruch układu nazywamy niewymuszonym (autonomicznym), w przeciwnym przypadku - wymuszonym (nieautonomicznym). Tor niewymuszonego ruchu (bazowego) opisujemy równaniem

różniczkowym:

$$\frac{dz^*(t)}{dt} = f(z^*, v^*, t), \quad z^*(0) = z_0^*. \quad (3.3)$$

Jeśli odchylenia (3.2) uznamy za małe, to otrzymamy przybliżone liniowe równanie dla $z(t)$. W tym celu przedstawimy funkcję wektorową $f(z, v, t)$ w postaci:

$$f(z, v, t) \simeq f(z^*, v^*, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_* z(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_* v(t). \quad (3.4)$$

Oznaczmy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_* = A, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_* = B. \quad (3.5)$$

Macierze **A** i **B** mające wymiary odpowiednio $n \times n$ i $n \times m$ nazywamy macierzami Jacobi. Symbol $*$ oznacza, że pochodne cząstkowe wyznaczone są w punkcie (z^*, v^*, t) .

Z udziałem (3.2) ÷ (3.4), z (3.1) wynika:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.6)$$

dla wartości początkowych $x_0 = z_0 - z_0^*$.

Liniowe równanie różniczkowe (3.6) określa wymuszony ruch układu (3.1) względem bazowego (niewymuszonego) toru określonego przez (3.3).

W ogólnym przypadku dla układu $A = A(t)$, $B = B(t)$ i mówimy, że układ (3.6) jest układem niestacjonarnym.

Jeśli funkcja $f(o)$ jawnie nie zależy od czasu t i w każdym punkcie o współrzędnych (z^*, v^*) macierze **A**, **B** są stałe, to układ (3.6) nazywamy stacjonarnym. Jak wynika z (3.5), formowanie równania liniowego ruchu wymuszonego (3.6) sprowadza się do wyznaczenia macierzy Jacobi.

Dla wyznaczenia elementów macierzy Jacobiego funkcji wektorowej wykorzystuje się wyrażenie określające przyrost:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \simeq \frac{f_i(x + \Delta x_j e_j) - f_i(x - \Delta x_j e_j)}{2\Delta x_j}, \quad (3.7)$$

gdzie:

Δx_j - przyrost po współrzędnej j ,

e_j - wektor jednostkowy skierowany wzdłuż współrzędnej j .

Błąd obliczeń według przedstawionej zależności wynika z metody i z niedokładności obliczeń maszynowych. Przy zmniejszaniu przyrostu składowa błędu metodycznego maleje, a składowa błędu maszynowego rośnie. Dla otrzymania prawidłowego wyniku należy wybrać taki przyrost aby błąd sumaryczny nie

przewyższał dopuszczalnego. Warunek ten łatwo spełnić jeśli funkcja jest dostatecznie gładka, a wymagania co do dokładności umiarkowane. Zalecana wartość przyrostu to $10^{-3} \dots 10^{-1}$ w stosunku do absolutnych wartości odpowiednich współrzędnych.

W podprogramie przeprowadzana jest ocena składowej błędu metodycznego. Podprogram zmniejsza przyrost jeśli ocena błędu przewyższa błąd dopuszczalny i zwiększa przyrost jeśli ocena błędu jest dostatecznie mała.

4. Komputerowa linearyzacja równań ruchu rakiety

Poprawnie zbudowany model matematyczny układu zawiera zidentyfikowany model fizyczny rakiety, oraz strukturę systemu, którego jest ona elementem. Obwód naprowadzania składa się z następujących elementów: operatora, filtru oraz obiektu sterowania, którym jest mała rakietka przeciwpancerzna.

W celu określenia bieżących współrzędnych rakiety względem wyrzutni w procesie obliczeń jako wyjściowe wykorzystano następujące równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m} \left[\left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) \cos \alpha \cos \beta - \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) \sin \alpha \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \sin \beta - X_a - Q \sin \theta \right], \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} \left[\left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) \sin \alpha + \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) \cos \alpha + Y_a - Q \cos \theta \right], \\ \dot{\psi} &= -\frac{1}{mV \cos \theta} \left[- \left(P_x - \sum_{j=1}^m X_{pj} \right) \cos \alpha \sin \beta + \left(P_y + \sum_{j=1}^m Y_{pj} \right) \sin \alpha \sin \beta + \right. \\ &\quad \left. + \left(P_z + \sum_{j=1}^m Z_{pj} \right) \cos \beta + Z_a \right], \\ I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x + M_{xp}, \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y + M_{yp}, \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z + M_{zp}, \\ \dot{\nu} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \\ \dot{\psi} &= \cos^{-1} \nu (\omega_y \cos \gamma + \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \nu (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_g = V \cos \Theta \cos \psi,$$

$$\dot{y}_g = V \sin \Theta,$$

$$\dot{z}_g = -V \cos \Theta \sin \psi,$$

$$r = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2},$$

$$\dot{m} = m_0 - \int_0^t |m| dy.$$

Do rozwiązania powyższego układu równań różniczkowych wykorzystano stałokrokową czteropunktową metodę całkowania Rungego-Kutty.

Co Δt (przy wykorzystaniu opisanej metody) dokonywana jest linearyzacja równań ruchu (4.1). Następnie na podstawie macierzy **A**, **B** określane są macierze:

- A** - macierz stanu,
- b** - macierz sterowań,
- c** - macierz wyjścia.

Wykorzystując metodykę przedstawioną między innymi w [3] wyznaczono wartości własne i dla zmiennych stanu opisujących ruch rakiety wyznaczono podstawowe parametry układu dynamicznego.

Na rys.1 ÷ 4¹ zilustrowano przebieg tych parametrów w funkcji czasu. Na podstawie uzyskanych rezultatów, przeprowadzono na podstawie [2,3] syntezy optymalnego automatycznego układu sterowania rakieta. W prawie sterowania uwzględniono wymagane przewyższenie toru nad ziemią w płaszczyźnie pionowej ruchu rakiety rys.5.

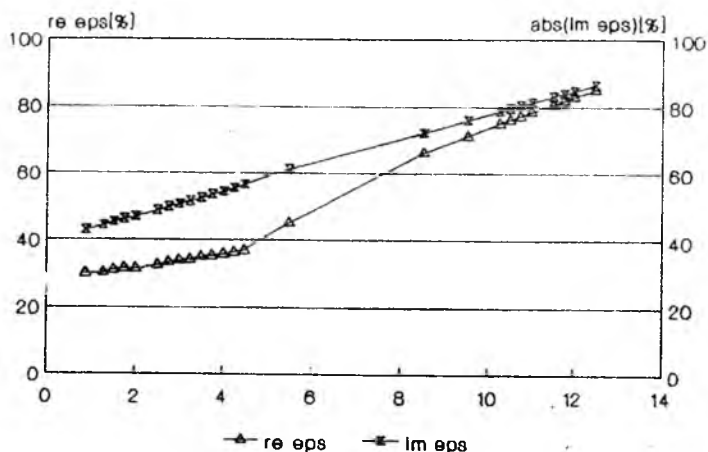
Tory naprowadzania, komendy sterujące, przeciążenia, dla rakiety z automatycznym układem sterowania, prowadzonej w wiązce przedstawiono na rys.6 ÷ 11. Symulację i obliczenia przeprowadzono na komputerze PC AT/386, wyniki wprowadzane były do specjalnego pliku wynikowego.

5. Literatura

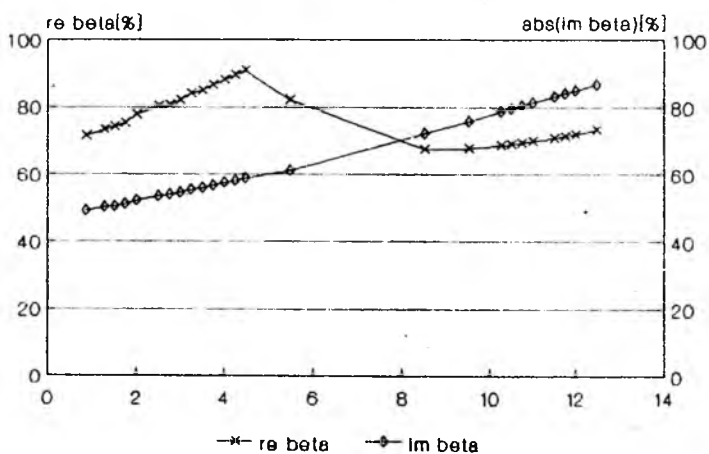
1. DUBIEL S., 1990, *Naprowadzanie rakiet na cele ruchome jako nieswobodny ruch złożony*, Biuletyn WAT nr 10 (458)
2. DUBIEL S., 1986, *Liniowe układy mechaniczne o najszybszym tłumieniu*, Mech. Teor. i Stos., 3, 24
3. MACHOWSKI B., 1989, *Identyfikacja i optymalizacja układu sterowania rakiety prowadzonej w wiązce*, Rozprawa doktorska, WAT, Warszawa
4. KRUTKO P.D., 1985, *Algoritmy i programy projektowania autonomicznych system*, Maszynostroene, Moskwa

¹Rysunki zamieszczono na końcu artykułu

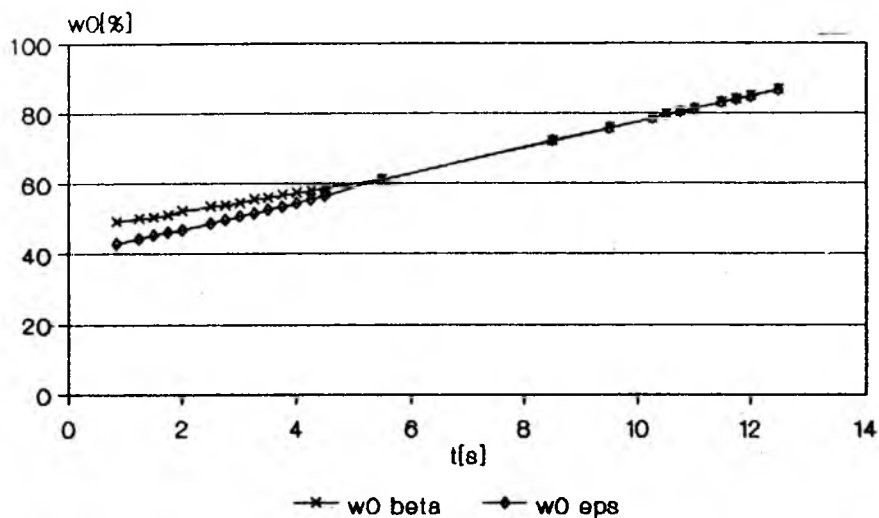
5. GACEK J., MACHOWSKI B., SIENICKI K., 1992, *Modelowanie i badanie właściwości dynamicznych ракет przeciwpancernych*, Mechanika w Lotnictwie, PTMTS, Warszawa



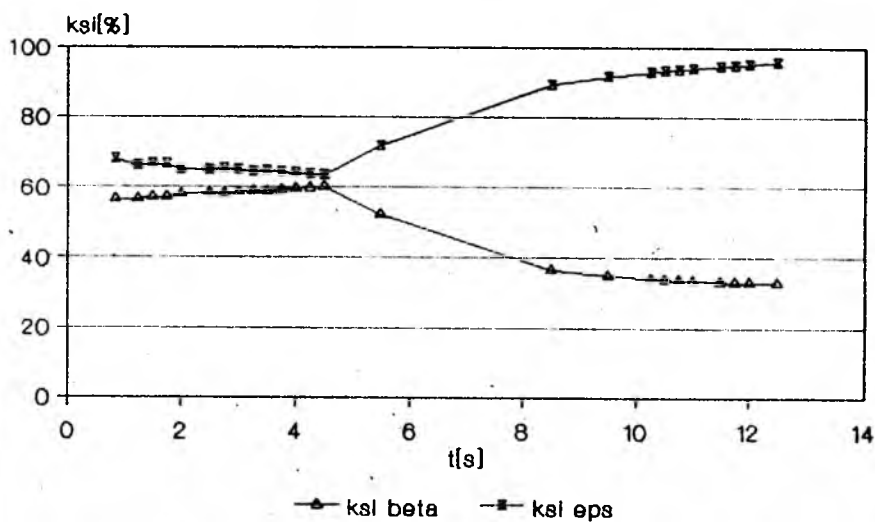
Rys. 1. Położenie zasadniczych biegunów częstości własnej PPK na torze



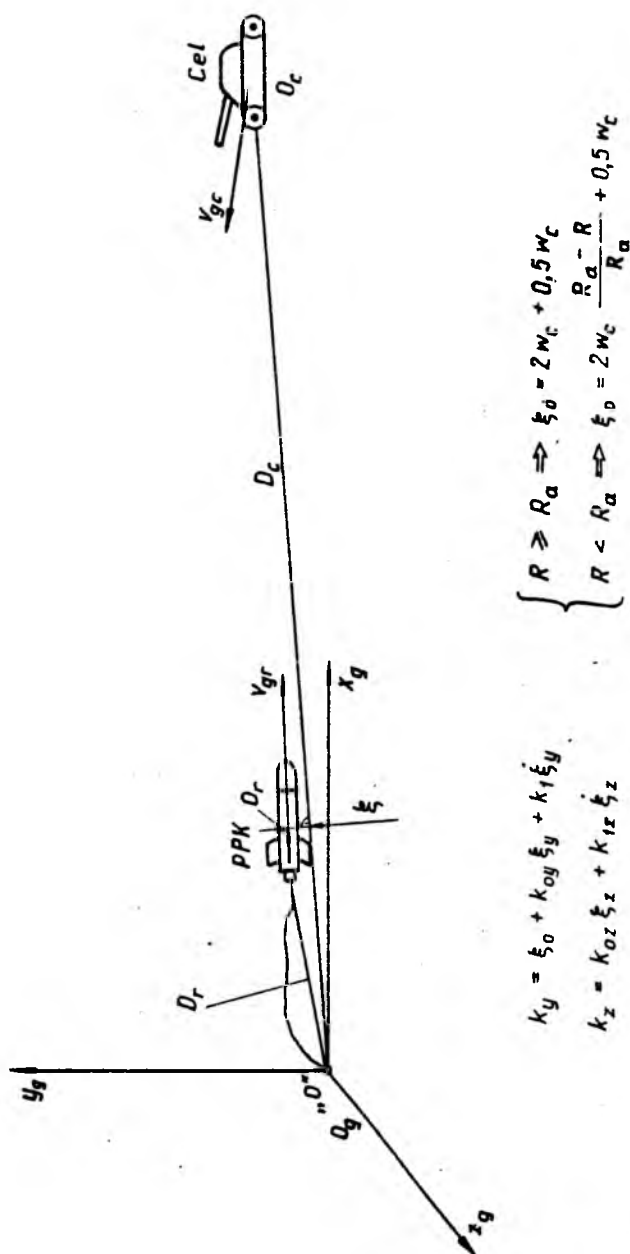
Rys. 2. Położenie zasadniczych biegunów częstości własnej PPK na torze



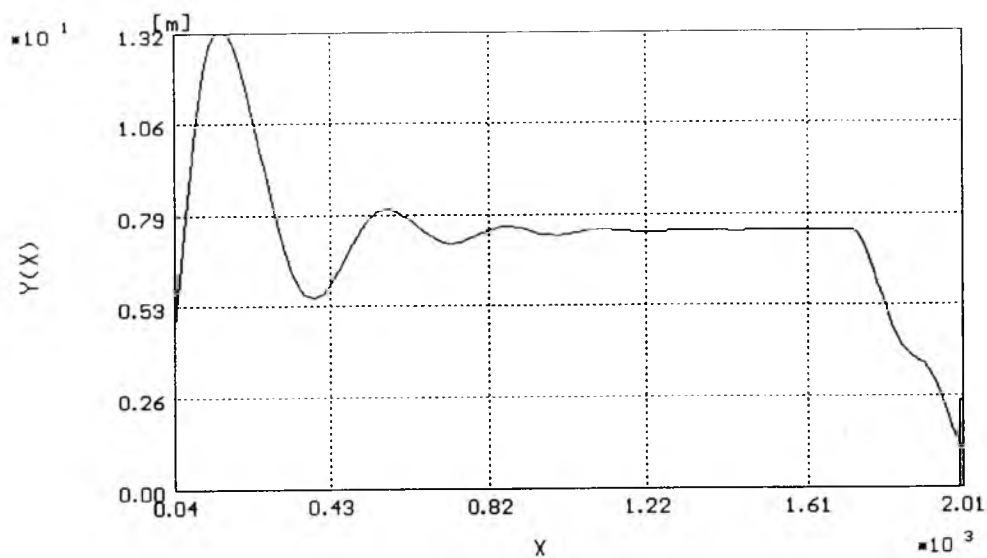
Rys. 3. Częstości własne PPK na torze



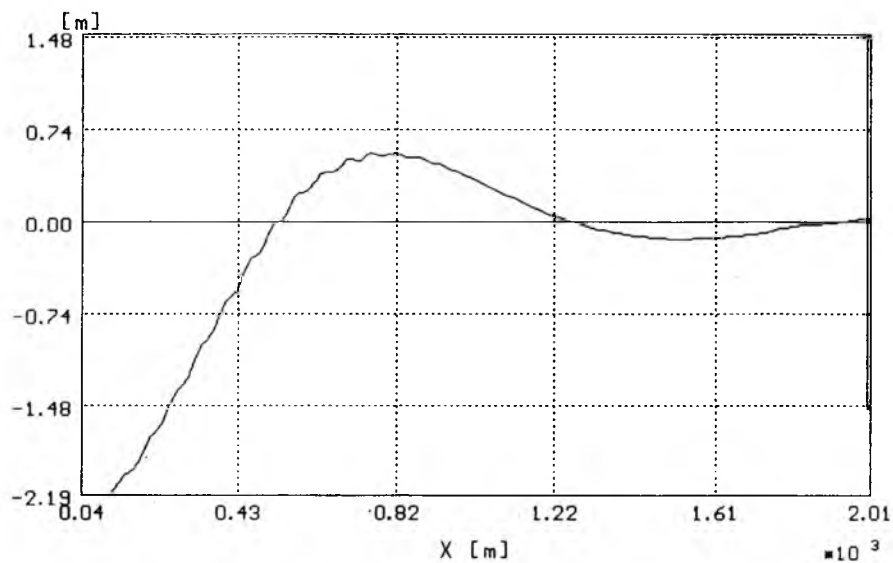
Rys. 4. Współczynniki tłumienia PPK na torze



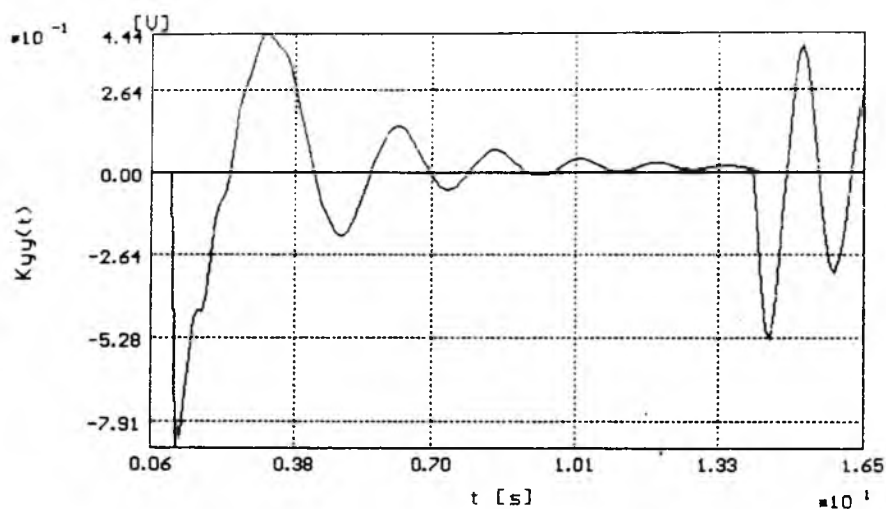
Rys. 5.



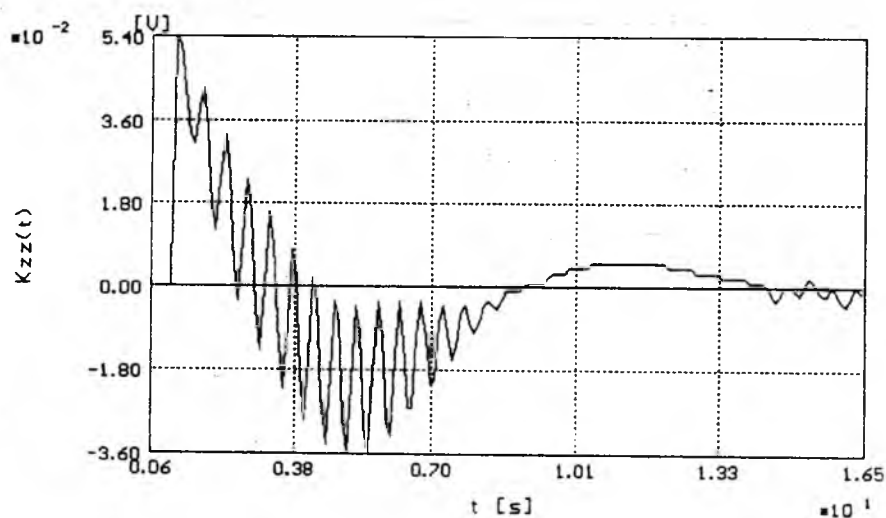
Rys. 6. Tor lotu pocisku w płaszczyźnie Epsilon



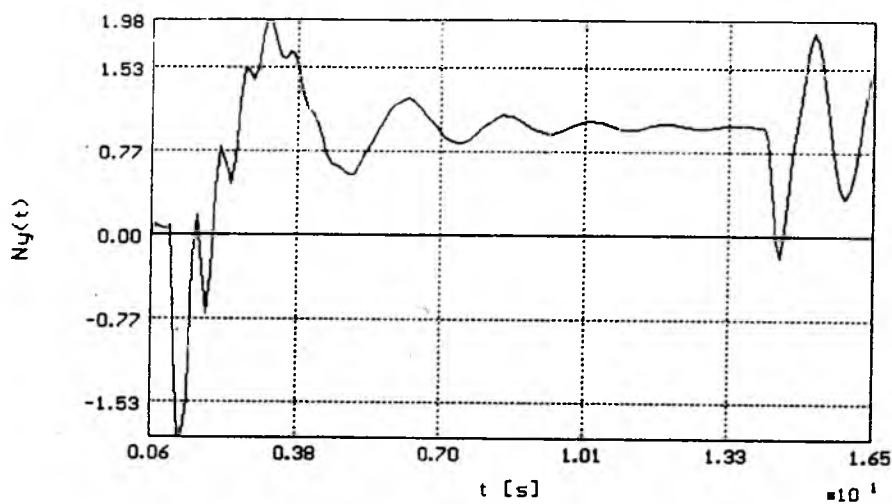
Rys. 7. Tor lotu pocisku w płaszczyźnie Beta



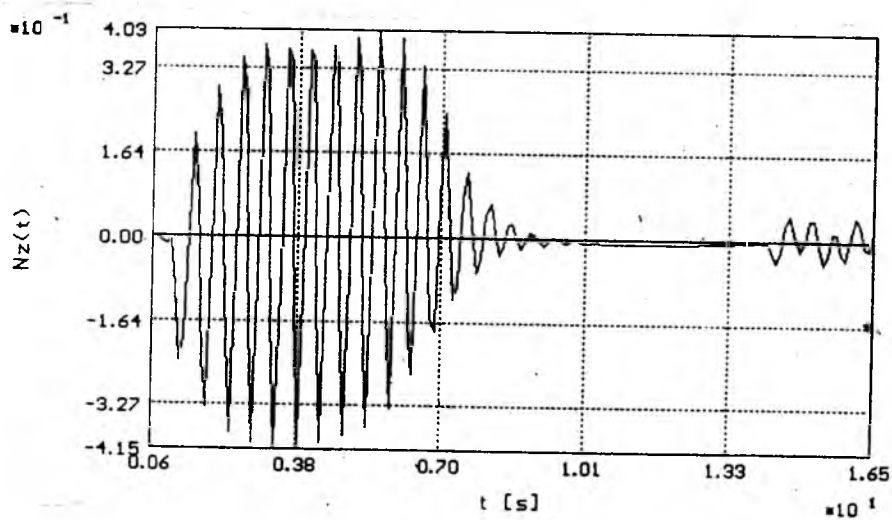
Rys. 8. Komenda w płaszczyźnie Epsilon



Rys. 9. Komenda w płaszczyźnie Beta



Rys. 10. Przeciążenia normalne w Epsilon



Rys. 11. Przeciążenia normalne w Beta



THE PZL-130 ORLIK TRAINING AIRCRAFT



A fully acrobatic turboprop tandem two-seat military trainer which, as a result of specific design, comprises jet like handling qualities, maintaining low training costs, characteristic for turboprop power. Due to these features, a wide training syllabus is possible, containing also the phases normally executed on costly jets only. The jet-pilot cues on a propeller driven plane are the result of the following:

- aircraft general geometry - low aspect ratio wing and high surface loading, maintaining low draw and power loading;

- cockpit interior design, general arrangement and instrumentation, similar to typical jet-plane cockpit.

A combined effect of the minimal overall dimensions, low weight and high power, result in:

- excellent performance - both, level speed and jet-like climb;

possibility to take significant underwing stores, giving a wide spectrum of training tasks.

The aircraft consists of a semimonocoque all metal low wing structure with retractable tricycle-type landing gear and is powered by the Czechoslovak Walter M.601T

engine rated 560 kW (i.e. 750 HP) or by 3 other kinds of Pratt & Whitney Canada engines of the PT6A family, rated from 405 to 700 kW (550 to 950 HP).

It comprises systems like the electric, hydraulic, pneumatic, air conditioning, oxygen supply and the escape (ejection seats) systems.

An audio integrating system controls the audio services from all the communication, navigation and interphone systems. On customer demand, single or dual VHF, UHF and/or HF systems may be installed. Both cockpits are to be fully instrumented and furnished according to customer's specification. The optional equipment pattern includes various avionic and flight instrumentation systems from simple ones, up to very sophisticated with GPS, LORAN, ILS, MLS, FMS, EFIS and HUD included. Also systems like the de-icing, emergency locator, anti-g etc. may be installed.

Any other requirement of the customer, will be investigated with great care. The manufacturer is ready to start talks concerning details of equipment any time. The deliveries can start in about one year after contract signing.

OCENA DOKŁADNOŚCI NAPROWADZENIA RAKIETY SAMONAPROWADZAJĄCEJ SIĘ NA CEL¹

ANDRZEJ SKOMRA

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

W artykule przedstawiono zarys metody wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa

bieżącego (chwilowego) uchybu spotkania rakiety samonaprowadzającej się z celem, realizującej metodę proporcjonalnej nawigacji.

Rozpatrzono proces samonaprowadzania rakiety klasy $p-p$ (w płaszczyźnie poziomej), której uogólniony współczynnik wzmocnienia systemu naprowadzania jest zmienną losową.

Zaproponowano analityczny sposób wyznaczenia gęstości prawdopodobieństwa prędkości kątowej linii obserwacji celu polegający na zastosowaniu funkcji charakterystycznej tej zmiennej.

Opracowana metoda pozwala ocenić dokładność naprowadzenia rakiety na cel w ujęciu stochastycznym przez wyznaczenie wartości oczekiwanej i wariancji uchybu spotkania rakiety z celem dla dowolnej chwili przerywania procesu samonaprowadzania.

1. Wprowadzenie

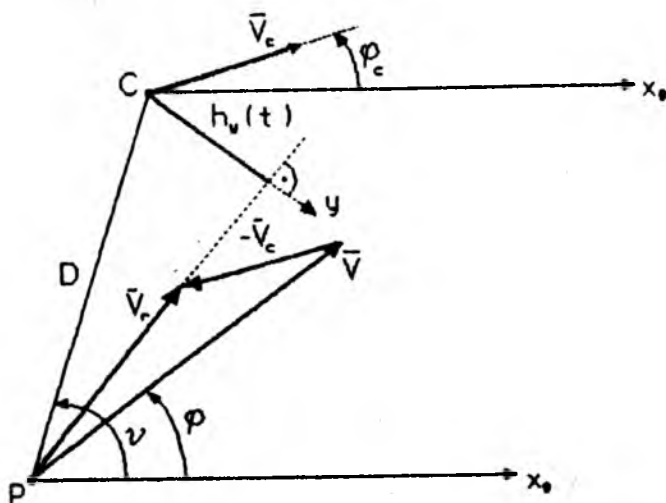
Dokładność naprowadzenia rakiety na cel jest ważnym wskaźnikiem jakości systemu sterowania jej lotem. Powszechnie charakteryzuje się ją uchybem tj. wielkością tzw promienia-wektora rakiety względem celu, w takiej chwili czasu, kiedy moduł tego wektora jest minimalny.

Uchyb ten wyznacza się w pewnej płaszczyźnie rozrzutu, (prostopadłej do wektora względnej prędkości rakiety V_r oraz przechodzącej przez cel C), zwykle w postaci dwóch składowych h_y i h_z określonych w prostokątnym układzie współrzędnych Cyz .

Większość rakiet klasy $p-p$ wyposażonych jest w dwa identyczne kanały sterowania, zatem (w pierwszym przybliżeniu) rozważania można ograniczyć do jednej płaszczyzny, na przykład poziomej (rys.1).

Składowa h_y bieżącego (chwilowego) uchybu spotkania samonaprowadzającej się rakiety z celem jest funkcją bieżącej odległości między rakieta i celem D ,

¹ Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Schemat położenia rakiety względem celu w końcowym etapie samonaprowadzania

względnej prędkości V_r , bieżącej wartości prędkości kątowej linii obserwacji celu $\dot{\nu}$ i ma wartość wyrażoną wzorem:

$$h_v(t) = \frac{D^2}{V_r} \dot{\nu}. \quad (1.1)$$

W pracy rozpatrzono proces samonaprowadzania rakiety klasy $p-p$ w płaszczyźnie poziomej, realizującej metodę proporcjonalnej nawigacji i wyposażonej w dwa niezależne układy sterowania (zapewniające sterowanie w dwóch płaszczyznach wzajemnie prostopadłych) i idealnie pracujący układ stabilizacji kąta przechylenia. W rozważaniach przyjęto, że rakieta i cel poruszają się ze stałymi prędkościami. Dla tak sformułowanych założeń równanie opisujące zmianę w czasie podstawowego parametru $\dot{\nu}(t)$ charakteryzującego proces samonaprowadzania ma postać [2]:

$$\tau(t_n - t) \ddot{\nu} + (t_n - t - 3\tau) \dot{\nu} + (B - 2)\dot{\nu} = \frac{V_{cl}}{V_r} \dot{\varphi}_c, \quad (1.2)$$

gdzie:

- B – uogólniony współczynnik wzmocnienia układu samonaprowadzania;
- τ – stała czasowa rakiety, określająca opóźnienie w powstawaniu siły sterującej jej lotem;
- $\dot{\varphi}_c$ – prędkość kątowa wektora prędkości celu;

- V_c - prędkość celu, $V_{c1} = V_c \cos(\nu - \varphi_c)$;
 V_r - względna prędkość rakiety;
 D_0 - początkowa odległość strzelania;
 t_n - całkowity czas naprowadzania rakiety,
 $t_n = D_0/V_r$.

W niniejszej pracy podjęto próbę opracowania zarysu modelu oceny dokładności naprowadzania rakiety samonaprowadzającej się na cel, uwzględniającego losową zmianę prędkości kątowej linii obserwacji celu $\dot{\nu}(t)$, z wykorzystaniem metody polegającej na zastosowaniu funkcji charakterystycznej.

W rozważaniach przyjęto, że jedynym czynnikiem powodującym samonaprowadzanie procesem stochastycznym jest uogólniony współczynnik wzmocnienia układu samonaprowadzania B , traktowany jako zmienna losowa.

Jeśli we wzorze (1.1) na bieżący uchyb przyjąć wielkości D i V_r jako parametry zmienne w czasie, a prędkość kątową linii obserwacji celu $\dot{\nu}$ jako zmienną losową $\dot{N}$ o gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$ to również uchyb bieżący $h_y(t)$ będzie zmienną losową H_y o gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $g_{H_y}(h_y, t)$.

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $g_{H_y}(h_y, t)$ jest rozkładem związanym ze zmienną losową $\dot{N}$ o funkcji gęstości $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$, zatem:

$$g_{H_y}(h_y, t) = \frac{V_r}{D^2} g_{\dot{N}} \left[\frac{V_r}{D^2} h_y(t) \right] = \frac{V_r}{D^2} g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t). \quad (1.3)$$

Ze wzoru (1.3) wynika, że do wyznaczenia funkcji gęstości uchybu $g_{H_y}(h_y, t)$ wystarczy znać funkcję gęstości prędkości kątowej linii obserwacji celu $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$.

Do otrzymania funkcji gęstości "uchybu końcowego" spotkania rakiety z celem należy do wzoru (1.3) podstawić wartości parametrów D i V_r oraz funkcję gęstości $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$ odpowiadające chwili wyłączenia (przerwania) samonaprowadzania ($t = t_k$). Ponieważ chwila wyłączenia samonaprowadzania (wielkość tzw. martwej strefy samonaprowadzania) nie jest zwykle ściśle określona, zatem z praktycznego punktu widzenia interesującym wydaje się znalezienie rozkładu gęstości $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$, pozwalającej wyznaczyć funkcję gęstości uchybu końcowego spotkania rakiety z celem dla dowolnej wartości t_k .

2. Zarys modelu oceny dokładności samonaprowadzania

Istota proponowanego modelu oceny dokładności samonaprowadzania polega na wyznaczeniu funkcji gęstości $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$ z wykorzystaniem funkcji charakterystycznej.

Dla rozpatrywanego procesu samonaprowadzania funkcja charakterystyczna przyjmie postać:

$$\varphi(\lambda, t) = E[e^{i\lambda\dot{\nu}(t)}]. \quad (2.1)$$

Równaniem wyjściowym do otrzymania funkcji charakterystycznej jest równanie (2.2), które otrzymano rozwiązując równanie (1.2) przy założeniu, że $\tau = 0$.

$$\frac{d\dot{\nu}}{dt} = a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3}, \quad (2.2)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{V_{c1}\dot{\varphi}_c + 2V_r\dot{\nu}_0}{V_r t_n},$$

$$a_2 = \frac{\dot{\nu}_0}{t_n},$$

$\dot{\nu}_0$ - prędkość kątowna linii obserwacji celu w chwili rozpoczęcia samonaprowadzania tj. dla $t = t_0$.

Ponieważ w przedziale czasu Δt następuje przyrost prędkości kątowej $\dot{\nu}(t)$, zatem słuszna jest zależność:

$$\varphi(\lambda, t + \Delta t) - \varphi(\lambda, t) = E\left\{[e^{i\lambda(\dot{\nu}(t+\Delta t) - \dot{\nu}(t))} - 1]e^{i\lambda\dot{\nu}(t)}\right\}. \quad (2.3)$$

Korzystając z równania (2.2) przyrost prędkości kątowej linii obserwacji celu w przedziale czasu o długości Δt można wyrazić zależnością:

$$\dot{\nu}(t + \Delta t) - \dot{\nu}(t) = \Delta t \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3} \right]. \quad (2.4)$$

Dokonując rozwinięcia w szereg potęgowy wyrażenia znajdującego się w nawiasie kwadratowym w zależności (2.3) zgodnie ze wzorem:

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad (2.5)$$

i ograniczając się w pierwszym przybliżeniu do pierwszego wyrazu oraz uwzględniając zależność (2.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, t + \Delta t) - \varphi(\lambda, t) &\approx \\ &\approx E\left\{i\lambda\Delta t \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3} \right] e^{i\lambda\dot{\nu}(t)}\right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dzieląc równanie (2.6) przez Δt i przechodząc do granicy otrzymujemy:

$$\frac{d\varphi(\lambda, t)}{dt} \approx \varphi(\lambda, t) i\lambda E\left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^{B-3} \right]. \quad (2.7)$$

Rozwiązując równanie (2.7) otrzymujemy zależność na funkcję charakterystyczną:

$$\varphi(\lambda, t) \approx e^{i\lambda \int_{t_0}^t E \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right] dt + i\lambda \dot{\nu}_0} , \quad (2.8)$$

gdzie:

t_0 – chwila rozpoczęcia samonaprowadzania.

Wprowadzając oznaczenie:

$$m_1(t) = \int_{t_0}^t E \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right] dt + \dot{\nu}_0 , \quad (2.9)$$

można zależność (2.8) przepisać w postaci:

$$\varphi(\lambda, t) \approx e^{i\lambda m_1(t)} = \frac{1}{e^{-i\lambda m_1(t)}} . \quad (2.10)$$

Dokonując rozwinięcia w szereg potęgowy wyrażenia $e^{-i\lambda m_1(t)}$ i ograniczając się do dwóch wyrazów otrzymujemy:

$$\varphi(\lambda, t) \approx \frac{1}{1 - i\lambda m_1(t)} = \frac{\frac{1}{m_1(t)}}{\frac{1}{m_1(t)} - i\lambda} . \quad (2.11)$$

Otrzymana postać funkcji charakterystycznej (2.11) jest funkcją charakterystyczną rozkładu wykładniczego, zatem funkcja gęstości $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$ ma postać:

$$g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t) = \frac{1}{m_1(t)} e^{-\frac{1}{m_1(t)} \dot{\nu}(t)} , \quad (2.12)$$

dla:

$$\dot{\nu}(t) > 0 , \quad \frac{1}{m_1(t)} > 0 .$$

Z zależności (2.12) wynika, że zmienna losowa $\dot{N}$ ma wartość przeciętną $m_1(t)$ i wariancję $m_1^2(t)$.

Postać wykładniczą (2.12) funkcji gęstości $g_{\dot{N}}(\dot{\nu}, t)$ wyprowadzono przy przyjęciu w zależności (2.3) przybliżenia składającego się tylko z pierwszego wyrazu. Uproszczenie to nie zawsze będzie możliwe do przyjęcia. Stąd wskazane jest rozpatrzyć przypadek, gdy w rozwinięciu $(e^x - 1)$ w szereg potęgowy przyjmiemy dwa pierwsze wyrazy.

W tym przypadku zależność (2.6) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, t + \Delta t) - \varphi(\lambda, t) &\approx \\ &\approx E \left\{ i\lambda \Delta t \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right] e^{i\lambda \dot{\nu}(t)} \right\} + \\ &+ E \left\{ \frac{i^2 \lambda^2 \Delta t^2}{2} \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right]^2 e^{i\lambda \dot{\nu}(t)} \right\} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dzieląc równanie (2.13) przez Δt i przechodząc do granicy otrzymujemy:

$$\frac{d\varphi(\lambda, t)}{dt} \approx \varphi(\lambda, t) \left[i\lambda A_1(B, t) - \frac{1}{2}\lambda^2 A_2(B, t) \right], \quad (2.14)$$

gdzie:

$$A_1(B, t) = E \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right], \quad (2.15)$$

jest wartością oczekiwaną przyspieszenia kątownego linii obserwacji celu, natomiast:

$$A_2(B, t) = E \left\{ \frac{\Delta t^2 \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right]^2}{\Delta t} \right\}, \quad (2.16)$$

jest wartością oczekiwaną z kwadratu przyrostu przyspieszenia linii obserwacji celu na jednostkę czasu.

Rozwiązując równanie (2.14) otrzymujemy zależność na funkcję charakterystyczną:

$$\varphi(\lambda, t) \approx e^{i\lambda \int_{t_0}^t A_1(B, t) dt - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_{t_0}^t A_2(B, t) dt + i\lambda \dot{\nu}_0}, \quad (2.17)$$

gdzie:

t_0 – chwila rozpoczęcia samonaprowadzania;

$\dot{\nu}_0$ – prędkość kątowna linii obserwacji celu w chwili rozpoczęcia samonaprowadzania.

Zależność (2.17) można zapisać w postaci:

$$\varphi(\lambda, t) \approx e^{i\lambda m_1(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2(t)}, \quad (2.18)$$

gdzie:

$$m_1(t) = \int_{t_0}^t E \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right] dt + \dot{\nu}_0, \quad (2.19)$$

oznacza wartość średnią prędkości kątownej linii obserwacji celu w chwili t ;

$$\sigma^2(t) = \int_{t_0}^t E \left\{ \frac{\Delta t^2 \left[a_1 \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} - a_2 B \left(1 - \frac{t}{t_n} \right)^{B-3} \right]^2}{\Delta t} \right\}, \quad (2.20)$$

oznacza wariancję prędkości kątownej linii obserwacji celu w chwili t .

Otrzymana postać funkcji charakterystycznej (2.18) jest funkcją charakterystyczną rozkładu normalnego, zatem funkcja gęstości $g_N(\dot{\nu}, t)$ ma postać:

$$g_N(\dot{\nu}, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\nu}(t) - m_1(t)}{\sigma(t)} \right)^2}. \quad (2.21)$$

Wyrażenia określające parametry opisowe otrzymanych rozkładów prędkości kątowej linii obserwacji celu są funkcjami czasu, parametrów układu samonaprowadzania i warunków początkowych strzelania.

3. Uwagi końcowe

Zaproponowana metoda pozwala ocenić dokładność naprowadzenia rakiety na cel w ujęciu stochastycznym przez wyznaczenie wariancji uchybu spotkania rakiety z celem dla dowolnej chwili przerwania samonaprowadzania.

Równanie (2.8) na funkcję charakterystyczną zostało wyprowadzone przy przyjęciu w zależności (2.3) przybliżenia składającego się tylko z pierwszego wyrazu.

Rozpatrzono modyfikację funkcji charakterystycznej, gdy w zależności (2.3) za przybliżenie rozwinięcia $(e^x - 1)$ przyjęto dwa pierwsze wyrazy. Otrzymana przy przyjęciu tego przybliżenia funkcja charakterystyczna określa rozkład normalny.

W dalszych badaniach celowym byłoby określenie funkcji gęstości uchybu spotkania z celem przy założeniu, że zmienną losową jest nie tylko współczynnik wzmocnienia układu samonaprowadzania B ale i czas wyłączania samonaprowadzania t_k .

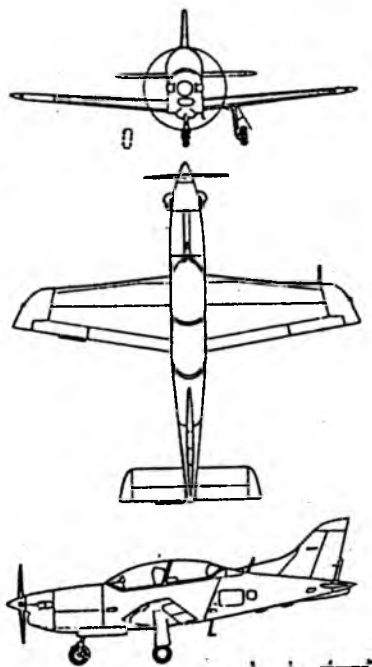
Równanie (2.2), będące równaniem wyjściowym do wyznaczenia funkcji charakterystycznej rozpatrywanego procesu, opisuje zmianę w czasie przyspieszenia kątowej linii obserwacji celu przy założeniu, że stała czasowa rakiety $\tau = 0$. Celowym byłoby zbadanie wpływu stałej czasowej τ na kształt rozkładu $g_N(\dot{\nu}, t)$.

Literatura

1. KAMKE E., 1976, *Sprawocznik po obykowniennym differencjalnym urawnieniam*, Nauka, Moskwa
2. KAZAKOW J.E., GLADKOW D.I., KRIKSUNOW L.Z., HARITONOW A.P., 1973, *Sistemy uprawlenija i dinamika nawedenija raket*, BBIA, Moskwa
3. KRINECKIJ E.I., 1970, *Sistemy samonawedenija*, Maszynostroenie, Moskwa
4. SOBCZYK K., 1973, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa



THE PZL-130 ORLIK TRAINING AIRCRAFT



Technical data

Seating tandem

Length

9.0m

Span

9.0 m

Wing area

13.0 m²

Internal fuel

560 l

Performances

Engine rating

950 HP

750 HP

Maximum level speed

560 km/h

500 km/h

Stalling speed

112 km/h

112 km/h

Initial climb

20.6 m/s

13.3 m/s

Ceiling

10000m

10000 m

Take-off run

172 m

220 m

Landing run

184 m

184 m

Range (without stores)

930 km

1000 km

Masses:

Empty with M.601T

1600 kg

Empty with PT6A-62

1450 kg

Maximum take-off

2700 kg

Maximum underwing stores

800 kg



Produced by:
PAŃSTWOWE ZAKŁADY LOTNICTWA WARSZAWA AL
Inżynieria 110/114
Phone: 022/462701
Fax: 022/462701; 114 817725



Exported:
PT 7E7EL
Przedsiębiorstwo Handlowo-Usługowe
Spółka z o.o.
Al. Józefa Stalina 2, 01-641 Warszawa 80
Tel./fax: (0 22) 462 01
Telefax: 01 462 01, 81 26 15
Telefax: (0 22) 13 25 58

CHARAKTERYSTYKI BAZOWE SYSTEMU PROCESÓW SPADKU ZASOBNIKA LOTNICZEGO¹

JAN NICZYPORUK

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Zaproponowano koncepcję charakterystyk procesów spadku zasobnika lotniczego w ujęciu systemowym i celowościowym w postaci spełnienia zależności między obszarami dopuszczalnych warunków początkowych – zrzutu Ω_{b0} i docelowych – upadku Ω_{bc} , którą określa operator kinetyczny $\mathcal{L}$. Wskazano metodę badań struktury zbioru rozwiązań procesów i własności ewolucji względem warunków początkowych i parametrów układu. Rozwiązano zagadnienie dla przypadku zrzutu obiektu z lotu poziomego i nurkowego w zakresie małych i średnich kątów nurkowania. Charakterystyki przedstawiają struktury przydatne do konstruktywnego opisu w ujęciu celowościowym klasy złożonych układów dynamicznych z bazą zasobnika.

1. Wstęp

Zainteresowania badaniami własności dynamicznych ruchu obiektów balistycznych klasy zasobników lotniczych (np. bomb lotniczych) są ciągle aktualne. Potwierdzeniem tego spostrzeżenia są między innymi opracowania [3,4,8,9,10,11], które dotyczą badań realizowanych metodą teoretyczną, zorientowaną na analizę numeryczną podstawowych własności ruchu zasobników klasycznych [8], zasobników z wiotkimi i sztywnymi urządzeniami hamującymi [3,4], zasobników z napędem rakietowym hamująco-przyspieszającym [9]. W opracowaniach [8,9] badania uzupełniono analizą stateczności ruchu metodą pośrednią Lapunowa, zastosowaną do układu liniowego o współczynnikach uśrednionych względem zmiennej czasu, reprezentującego pierwsze przybliżenie układu wyjściowego. Druga grupa zagadnień dotyczy badań układu nosiciel-zasobnik w procesie zrzutu [10,11] i wpływu zaburzeń wnoszonych przez nosiciela na parametry upadku [11]. Wnikliwa interpretacja fizyczna i adekwatność modeli aplikacyjnych w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych, dostosowanych do zagadnień Cauchy'ego w ujęciu płaskim [3,4] i przestrzennym [8], stanowią wzorcowe aspekty przedmiotu badań.

W referacie [14] i opracowaniu [13] Autor przedstawia sformułowanie zagadnień kinetycznych układu obiektów NBZ: nosiciela (N) klasy samolotu szturmowego,

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

zasobnika – klasycznej bomby lotniczej (B) odłamkowo-burzącej z fragmentacją wymuszoną, wyposażoną w zapalnik (Z) z czujnikiem odległościowym i kontaktowym oraz mechanizmem odległościowego odbezpieczania. Zagadnienia układu dotyczą formalizmu badań w ujęciu kompleksowym (systemowym, w uwarunkowaniach dynamicznych funkcjonowania) i metody celowościowej zobrazowania wyników – dopuszczalnych procesów zrzutu, uwarunkowanych wymogiem bezpieczeństwa nosiciela przed porażeniem odłamkami zrzuconej bomby, realizacji programu uzbrajania zapalnika, inicjacji procesu rozlotu odłamków w zakresie wymaganych parametrów określonych zbiorem docelowym otoczenia celu. Uzasadnione jest założenie o tym, że interesuje nas zbiór wszystkich dopuszczalnych procesów zrzutu. Zaproponowano, aby sformułowane zagadnienie [14] "obszarów dopuszczalnych warunków procesów bombardowania" (w skrócie ODWPB), uznać za reprezentatywne dla klasy złożonych wieloagregatowych układów z zasobnikiem lotniczym jako bazą-nosicielem.

Potrzeba konstruktywnego opisu w ujęciu celowościowym tej klasy zagadnień stanowi genezę koncepcji charakterystyk ruchu zasobnika lotniczego, adekwatnie objaśniających system procesów φ_{pb} , w ujęciu celowościowym w postaci spełnienia zależności, którą określa operator kinetyczny $\mathcal{L}$, między obszarami Ω_{b0} dopuszczalnych warunków zrzutu i Ω_{bc} pożądaných realizacji docelowych zadania, uwarunkowanego zbiorem docelowym Ω_b ($\Omega_{bc} \subseteq \Omega_b$).

Charakterystykami bazowymi systemu nominalnych procesów spadku zasobnika φ_{pb} , o własności praktycznej realizowalności w uwarunkowaniach procesów bombardowania (PB) – nazwano rozmaitości: początkową – zrzutu $\langle \Omega_{b0}, \kappa_{b0}(\Omega_{b0}) \rangle$ i docelową – upadku $\langle \Omega_{bc}, \kappa_{bc}(\Omega_{bc}) \rangle$, gdzie $\kappa_{b0}(\Omega_{b0})$, $\kappa_{bc}(\Omega_{bc})$ – rodziny podzbiorów określające własności lokalne i globalne procesów.

W niniejszej pracy przedstawia się modele aksjomatyczny w ujęciu topologiczno-mnogociściowym i aplikacyjny w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami granicznymi i ograniczeniami, dostosowane do złożonych zagadnień wielogranicznych, które prowadzą do zbadania systemu procesów i konstruktywnego opisu wyników badań w ujęciu celowościowym w postaci charakterystyk bazowych zasobnika.

Proponowaną metodę badań zastosowano do analizy charakterystyk przyjętej koncepcji zestawu zasobnika, w wyniku której uzyskano:

- rozmaitość początkową Ω_{b0} o konfiguracji prostopadłościąnu w przestrzeni standaryzowanych warunków początkowych, określoną zakresem parametrów początkowych: wysokości zrzutu H_0 od $H_{0d} = 400$ m do $H_{0g} = 11200$ m, prędkości zrzutu V_0 od $V_{0d} = 200$ km/h do $V_{0g} = 2400$ km/h, kątów zrzutu λ od $\lambda_d = -30^\circ$ do $\lambda_g = 0^\circ$;
- zbiór zagadnień częściowych $\langle \Omega_{b0i}, \Omega_{bci}; \mathcal{L}_i \rangle$, $i = 0, \dots, 3$ – w wyniku deskrytyzacji przedziału $-30^\circ \leq \lambda \leq 0^\circ$ parametrów λ do reprezentatywnego zbioru $\{\lambda_i\}$: $\lambda_0 = 0^\circ$, $\lambda_1 = -10^\circ$, $\lambda_2 = -20^\circ$, $\lambda_3 = -30^\circ$;

- rozwiązania zagadnień częściowych dla zbioru wyżej wyróżnionych parametrów zrzutu λ : z lotu poziomego $\lambda_0 = 0$, dla granicznej dolnej wartości zakresu małych kątów nurkowania $\lambda_1 = -10^\circ$, dla granicznej dolnej wartości zakresu średnich kątów nurkowania $\lambda_3 = -30^\circ$ i dla $\lambda_2 = -20^\circ$;

oraz zbadano:

- własności zbioru operatorów ewolucji $\mathcal{L}_{0i}$; obszarów początkowych zagadnień częściowych Ω_{b0i} na Ω_{b0j} i ewolucji $\mathcal{L}_{ci}$; obszarów docelowych zagadnień częściowych Ω_{bci} na Ω_{bcj} , dla $i, j = 0, \dots, 3$, sprzężonych z przekształceniami parametru λ_i na λ_j .

Stwierdzono, iż są to przekształcenia gładkie, wzajemnie jednoznaczne, zachowujące orientację obszarów. Omawiane własności są wyrazem spełnienia koniecznych warunków agregacji rozwiązań częściowych Ω_{b0i} , Ω_{bci} do globalnych rozmaitości Ω_{b0} , Ω_{bc} za pomocą odpowiedniej procedury interpolacyjnej.

Reasumując zauważamy, iż w wyniku badań uzyskano rozmaitość Ω_{b0} warunków początkowych procesów spadku zasobnika o globalnej jednoznaczności i stateczności oraz rozmaitość docelową Ω_{bc} spójną i ograniczoną. Rozmaitości te charakteryzują własności dynamiczne zasobnika pod względem ilościowym i jakościowym, przedstawiają struktury bazowe do opisanego złożonych zagadnień układu *NBZ*.

Zwróćmy uwagę, iż sformułowania odpowiednich wymagań w problemie syntezy zestawu zasobnika, dotyczące charakterystyk geometrycznych, aerodynamicznych, masowych, własności i właściwości dynamicznych ruchu – determinują pożądane własności (jednoznaczność, ciągłość, zwartość) operatora kinetycznego $\mathcal{L}$, konfiguracji oraz własności topologicznych rozmaitości Ω_{b0} , Ω_{bc} . Zauważmy również, iż proponowana metoda charakterystyk bazowych przydatna jest do opisu własności dynamicznych wyszczególnionych klas zasobników [3,4,8,9] i identyfikacji porównawczej ich własności.

2. Sformułowania dynamicznych zagadnień procesów spadku zasobnika

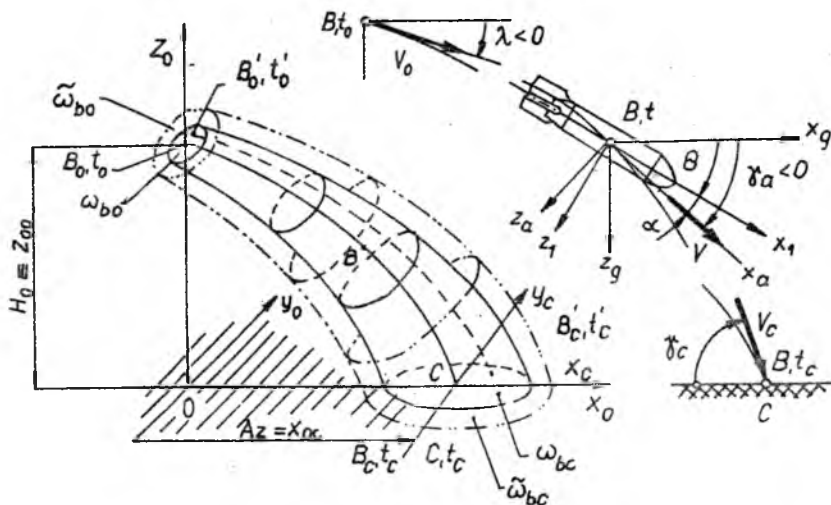
Przedstawimy krótki opis wybranych aspektów modelu funkcjonowania lotniczego bombardierskiego systemu broni (*LBSB*), wzorując się na metodyce przedstawionej w pracy [12], dotyczącej lotniczego raketowego systemu broni (*LRSB*). Rozpatrzmy końcowy etap ataku nosiciela (*N*) na obiekt celu (*C*) położony na powierzchni ziemi. Wyróżniamy procesy: ataku nosiciela, obejmujący fazy – wprowadzania, celowania, zdarzenia zrzutu zasobnika i fazę wyprowadzania oraz proces

spadku zasobnika z wyróżnionymi granicznymi zdarzeniami – początkowym zrzutu i docelowym upadku.

Odwołując się do analogii badanych zagadnień w pracach autora [12,13] uważamy, iż zaliczyć je można do klasy zagadnień funkcjonowania złożonych układów celowego działania, o hierarchicznej czasowej strukturze, w którym finalną rolę spełniają podsystemy ogniowe, obejmujące podukłady przenoszenia i rażenia. Metoda rozwiązania tej klasy zagadnień, zaproponowana w pracy [12], polega na:

- Wyróżnieniu sytuacji początkowej (zdarzenia bazowego), którą warunkują bezpośrednio działania wcześniejsze i kolejne wszystkich podukładów. W rozpatrywanym problemie jest to zdarzenie zrzutu zasobnika.
- Wyodrębnieniu podukładów, dla których formułuje się częściowe zagadnienia ich funkcjonowania w oparciu o zasadę części i względnej całości [7]. Rozwiązania częściowych zagadnień stanowią "środowisko" dla analizy globalnej.

Uwagi te stanowią punkt wyjścia do sformułowania szczegółowego przedmiotu niniejszych badań, który dotyczy funkcjonowania podukładu bomby lotniczej, jako środka przenoszenia zespołu rażenia w uwarunkowaniach lotniczego bombardierskiego systemu broni (LBSB).



Rys. 1.

Na rys.1 przedstawiono ilustrację do sformułowania dynamicznych zagadnień spadku bomby w uwarunkowaniach PB. Wyróżniono:

- układy współrzędnych związane z ziemią $0x_0y_0z_0$ i z obiektem celu $Cx_cy_cz_c$;

- układy współrzędnych o początku ustalonym w punkcie środka masy obiektu B : $B_{x_g y_g z_g}$ – normalny związany z ziemią, $B_{x_1 y_1 z_1}$ – związany z obiektem, $B_{x_a y_a z_a}$ – związany z przepływem;
- charakterystyczne konfiguracje bomby w procesie spadku: początkową (B, t_0) , określoną parametrami zrzutu H_0, V_0, λ – wysokością, prędkością, kątem nurkowania; dowolną (B, t) ; upadku (B, t_c) w punkcie C płaszczyzny ziemi o współrzędnych – zasięgu $Az = x_{0c}$, wysokości $z_{0c} = 0$, odchylenia $y_{0c} = 0$ i parametrach upadku $V_c, \gamma_{ca}, \theta_c$;
- realizację nominalną (pożądaną, idealną) procesu spadku $x(t, x_0)$, z warunkiem początkowym standaryzowanym $\tilde{x}_0$ i docelowym $x(t_c, x_0) = x_c$ zobrazowanym punktem upadku C . Zauważamy, iż nominalny proces spadku, ze względu na przyjęte założenia, odbywa się ściśle w płaszczyźnie pionowej $0x_0z_0$. Na rys.1 realizacja nominalna jest zobrazowana trajektorią B_0BB_c ;
- rozmaitość:

$$\begin{aligned} \varphi_{pbz} &= \langle \omega_{b0}, \omega_{bz}, \omega_{bp}, \omega_{bcrz}, r_{pbz} \rangle, \\ \omega_{bcrz} &\subseteq \omega_{bc}, \\ \tilde{\omega}_{b0} &\subseteq \omega_{b0}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

zaburzonych realizacji procesu nominalnego $p[B_0BC]$, gdzie:

- ω_{b0} – obszar dopuszczalnych początkowych zaburzeń;
- ω_{bz} – zaburzenia działające w procesie spadku;
- ω_{bcrz} – zbiór zdarzeń upadku zaburzonych realizacji;
- ω_{bc} – obszar dopuszczalnych odchyień upadku, wynikający z warunków niszczenia celu;
- $\tilde{\omega}_{b0}$ – obszar początkowych zaburzeń wnoszonych przez układ nosiciela.

Związki (2.1) przedstawiają sformułowanie w relacyjnej postaci systemu zaburzonych realizacji procesu nominalnego. Warunki (2.1)₂, (2.1)₃ łącznie przedstawiają kryteria praktycznej realizowalności wyodrębnionego procesu nominalnego spadku z uwzględnieniem uwarunkowań wnoszonych przez nadrzędny podukład – nosiciela.

Zauważamy, iż na rys.1 przedstawiono szczególną sytuację, gdy nosiciel generuje zaburzenia $\tilde{\omega}_{b0}$ intensywniejsze od dopuszczalnych ω_{b0} , uwarunkowanych obszarem docelowym ω_{bc} .

Uwzględnia się następujące czynniki zaburzające: wpływ odchylenia charakterystyk rzeczywistych obiektu od nominalnych, odchylenia parametrów atmosfery

rzeczywistej od wzorcowej, zaburzenia działające w procesie spadku w ograniczonym przedziale czasowym realizacji procesu. Na etapie badań charakterystyk wyodrębnionych podukładów, spotykamy się najczęściej z potrzebą apriorycznej gwarantowanej oceny obszaru zaburzeń wnoszonych przez nosiciela.

Na bazie objaśnionych pojęć sformułujemy zagadnienia proponowanej teorii.

1. Zagadnienie procesów nominalnych (idealnych, bazowych, pożądanych) spadku zasobnika formułuje się dla: nominalnych charakterystyk obiektu, ruchu obiektu w warunkach atmosfery wzorcowej dla warunków granicznych (początkowych i docelowych) w postaci standaryzowanej i ograniczeń parametrów ruchu uwarunkowanych dopuszczalnym zakresem zmienności parametrów charakterystyk obiektu. Klasę procesów bazowych wyznaczają przyjęte założenia dotyczące charakterystyk nominalnych i zasady określania warunków granicznych standardowych.

Zakłada się, iż model matematyczny procesów bazowych winien spełniać zasadę stateczności [5]. Na rys.1 przebieg idealny procesu reprezentuje trajektoria B_0BB_c .

2. Zagadnienie warunków praktycznej realizowalności zadanego idealnego procesu spadku, przy zadanym obszarze odchyień ω_{bc} parametrów spadku względem punktu C , dla rzeczywistych charakterystyk obiektu (zasobnika) i ruchu w warunkach atmosfery rzeczywistej, z uwzględnieniem zaburzeń początkowych ω_{b0} , w tym zaburzeń początkowych wnoszonych przez nosiciela $\tilde{\omega}_{b0}$ oraz zaburzeń działających w procesie spadku ω_{bz} .

Rozwiązanie zagadnienia istnieje, jeśli dla danych wejściowych zbadano rozmaitość $(2.1)_1$ spełniającą kryteria $(2.1)_2$, $(2.1)_3$.

3. Zagadnienie systemu (rodziny, zbioru) φ_{bp} nominalnych, bazowych procesów spadku obiektu, spełniających założenia p.1 i p.2, formułuje się jako zbiór wszystkich rozwiązań zagadnienia dwugranicznego dla zadanego warunku docelowego Ω_b i wszystkich poszukiwanych, dopuszczalnych warunków początkowych $x_0 \in \Omega_{b0}$.

4. Metoda charakterystyk bazowych systemu procesów nominalnych φ_{pb} dotyczy opisanie systemu procesów w ujęciu celowościowym w postaci spełnienia zależności między obszarami dopuszczalnych warunków początkowych Ω_{b0} i docelowych Ω_{bc} , którą określa operator kinetyczny $\mathcal{L}$, badania własności struktury rozwiązań, własności ewolucji względem warunków początkowych i parametrów układu.

Łączne rozpatrzenie logiczne usystematyzowanych zagadnień $(p.1) \div (p.4)$, począwszy od elementarnego pojęcia przedstawionej teorii – procesu nominalnego

(p.1), wymagań praktycznej realizowalności procesu nominalnego (p.2) w uwarunkowaniu nadrzędnego układu, poprzez pojęcie – systemu procesów nominalnych o własności praktycznej realizowalności (p.3) – doprowadza do sformułowania finalnego zagadnienia (p.4) – charakterystyk bazowych systemu procesów w ujęciu celowościowym, które w założeniu winny być przydatne do formułowania złożonych zagadnień procesów bombardowania.

3. Formalizm zagadnienia systemu procesów i charakterystyk bazowych

Celem objaśnienia podstawowego pojęcia "systemu procesów ruchu zasobnika" posłużymy się formalizmem teoriomnogościowym [12]. Weźmy pod uwagę dowolną realizację procesu idealnego $x(t, x_0)$, z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, wyznaczoną zgodnie z wymaganiami (p.1), (p.2). Z zasady stateczności procesu (p.1), gwarantującą jednoznaczność i ciągłość rozwiązania względem parametrów, wyprowadzamy: warunki przedłużalności rozwiązań względem zmiennej niezależnej t , aż do osiągnięcia stanu docelowego $x(t_c) = x_c$ obszaru Ω_b , a następnie badamy przedłużalność rozwiązań względem zmiennej x_0 , aż do osiągnięcia punktów brzegowych obszarów Ω_{b0} i Ω_{bc} .

Powyższą procedurę utożsamiamy z badaniem przestrzeni wszystkich rozwiązań warunkowych zagadnień Cauchy'ego, w której wydzielamy rozmierność rozwiązań zagadnień dwugranicznych. Każde rozwiązanie zagadnienia wyznacza proces spadku obiektu, który jest rozmiernością inwariantową jednowymiarową. Zbiór wszystkich rozwiązań zagadnień dwugranicznych stanowi rozmierność, którą nazwano systemem procesów φ_{pb} i w sformalizowanej postaci opisano wyrażeniem:

$$\varphi_{pb} = \langle \Omega_{b0}, \Omega_{pb}, \Omega_{bc}, r_b \rangle, \quad (3.1)$$

$$\Omega_{bc} \subseteq \Omega_b,$$

gdzie:

- Ω_{b0} – zbiór dopuszczalnych warunków początkowych procesów spadku;
- Ω_{pb} – zbiór procesów spadku;
- Ω_{bc} – zbiór stanów docelowych realizacji zadania, spełniający kryterium (3.1)₁;
- r_b – relacja funkcjonowania układu o dziedzinach Ω_{b0} , Ω_{bc} i zbiorze wartości Ω_{pb} .

Zgodnie z sformułowanym zagadnieniem (p.4) podjęto koncepcję zobrazowania φ_{pb} w ujęciu celowościowym, w postaci spełnienia zależności między obszarami

Ω_{b0} i Ω_{bc} . W formalizmie operatorowym treść powyższego założenia przyjmuje postać:

$$\Omega_{b0} = \mathcal{L}(\Omega_{b0}), \quad (3.2)$$

$$\Omega_{bc} \subseteq \Omega_b,$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest operatorem kinetycznym, przedstawiającym regułę przekształcania Ω_{b0} na Ω_{bc} . Sensowność takiego ujęcia charakterystyk procesów spadku zasobnika staje się zrozumiała, jeśli uwzględni się założenie, iż mają być przydatne do rozwiązywania złożonych, wielogranicznych zagadnień (ODWPB), a to nakłada szczegółowe wymagania odnośnie własności operatora $\mathcal{L}$ i obszarów Ω_{b0} i Ω_{pb} , spełniających warunek (3.2)₂.

- Obszary Ω_{b0} , Ω_{bc} winny być różnicami ograniczonymi i spójnymi, sparametryzowanymi odpowiednim zbiorem pól $\kappa_{b0}(\Omega_{b0})$, $\kappa_{bc}(\Omega_{bc})$, które winny obrazować lokalne i globalne własności systemu procesów.
- Operator $\mathcal{L}$ winien zapewniać globalną jednoznaczność i ciągłość odwzorowania (3.2)

Wobec powyższych własności, system procesów (3.1) można adekwatnie zobrazić różnicami dopuszczalnych warunków początkowych:

$$\langle \Omega_{b0}, \kappa_{b0}(\Omega_{b0}) \rangle, \quad (3.3)$$

i różnicami osiągalnych stanów docelowych (stanów realizacji zadania):

$$\langle \Omega_{bc}, \kappa_{bc}(\Omega_{bc}) \rangle, \quad (3.4)$$

Zobrazowanie systemu procesów ruchu zasobnika w postaci (3.3), (3.4) nazwano charakterystykami bazowymi systemu procesów.

Związek (3.2.1) zapiszemy również w postaci relacyjnej abstrakcyjnego systemu:

$$\langle \Omega_{b0}, \Omega_{bc}, \mathcal{L} \rangle. \quad (3.5)$$

3.1. Sformułowanie zagadnień dwugranicznych

Punktem wyjściowym do formułowania zagadnienia analizy złożonego układu (3.1) i (3.2) jest założenie, iż metoda rozwiązania wymaga zastosowania procedur numerycznych. W związku z tym wprowadza się pojęcie obszaru wstępnego przeszukania $\tilde{\Omega}_{b0}$. Aprioryczne ograniczenia obszaru $\Omega_{b0} \subseteq \tilde{\Omega}_{b0}$, które wynikają z praktycznych uwarunkowań funkcjonowania (zastosowania) *LBSB* i spełniają rolę

wstępnego oszacowania dziedziny (3.3), mają również uzasadnienie racjonalnego planowania obliczeń i wykorzystania *EMC*.

Sformułowanie zagadnienia dwugranicznego wyrazimy w sformalizowanej postaci związków:

$$\begin{aligned}\Omega_{bc} &= \mathcal{L}(\Omega_{b0}), \\ \Omega_{b0} &\subseteq \tilde{\Omega}_{b0}, \\ \Omega_{bc} &\subseteq \Omega_b,\end{aligned}\tag{3.6}$$

które mają poniższą interpretację słowną.

Dla zadanych rozmaitości: wymaganych warunków docelowych Ω_b realizacji procesów spadku obiektu i wstępnego przeszukania $\tilde{\Omega}_{b0}$ – należy wyznaczyć rozmaitości początkową (zrzutu) Ω_{b0} i docelową realizacji zadania Ω_{bc} , spełniające warunki (3.6)₁ i (3.6)₂ oraz zbadać własności operatora $\mathcal{L}$ tranzycji stanów.

Zakłada się, iż zagadnienie (3.6) jest wzbogacone procedurą badania zbioru pól $\kappa_{b0}(\Omega_{b0})$, $\kappa_{bc}(\Omega_{bc})$, które parametryzują obszary Ω_{b0} , Ω_{bc} . Wyróżnia się parametryzacje naturalne (własne *w*) i transformowane (przeniesione *p*) w operacjach przekształcenia za pomocą operatora $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned}\kappa_{b0}(\Omega_{b0}) &= [\mathcal{R}_{b0w}, \mathcal{R}_{b0p}], \\ \kappa_{bc}(\Omega_{bc}) &= [\mathcal{R}_{bcw}, \mathcal{R}_{bcp}].\end{aligned}\tag{3.7}$$

Rozwiązanie zagadnienia (3.6) przedstawia się w relacyjnej postaci systemu (3.5) i w pojęciach charakterystyk bazowych obiektu – wejściowej (3.3), docelowej (3.4).

3.2. Formalizm aksjomatyczny metody przybliżonej

Modyfikacja zagadnienia (3.6), ukierunkowana na formułowanie zagadnień obliczeniowych uzasadnia celowość wyróżniania zmiennej λ (kąt pochylenia wektora prędkości w chwili zrzutu, kąt nurkowania), jako "parametru głównego" i wydzielenie interesującego podprzedziału $[\lambda_d, \lambda_g]$ zawartego w przedziale dopuszczalnym $[\lambda_{gd}, \lambda_{gg}]$:

$$[\lambda_d, \lambda_g] \subseteq [\lambda_{gd}, \lambda_{gg}] \subset \Lambda,\tag{3.8}$$

gdzie:

$\lambda_{gd}, \lambda_{gg}$ – graniczne dopuszczalne dolne i górne parametry λ ,

$$\lambda_{gd} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lambda_{gg} = \frac{\pi}{2}.$$

Sformułowanie zagadnienia (3.6) w podprzedziale (3.8) zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} < \Omega_{b0}, \Omega_{bc}, \mathcal{L} > | [\lambda_d, \lambda_g], \\ \Omega_{b0} \subseteq \tilde{\Omega}_{b0} | [\lambda_d, \lambda_g], \\ \Omega_{bc} \subseteq \Omega_b. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Z uwagi na złożoność zagadnienia (3.9) i założenie, iż procedura rozwiązania będzie przybliżoną numeryczną z wykorzystaniem *EMC*, która winna spełniać wymogi racjonalnego przedstawienia modelu charakterystyk bazowych zasobnika w pamięci komputera i dostosowania do rozwiązania zagadnień klasy (*ODWBP*) – zaproponowano metodę, która obejmuje:

- Dyskretyzację przedziału (3.8) parametrów λ do zbioru:

$$\{\lambda_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.10)$$

gdzie:

$$i = 1 \leftrightarrow \lambda_1 \equiv \lambda_d, \quad i = n \leftrightarrow \lambda_n \equiv \lambda_g.$$

- Dyskretyzację rozmaitości $\tilde{\Omega}_{b0}$ względem parametru λ do zbioru częściowych obszarów przeszukania:

$$\{\tilde{\Omega}_{b0i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

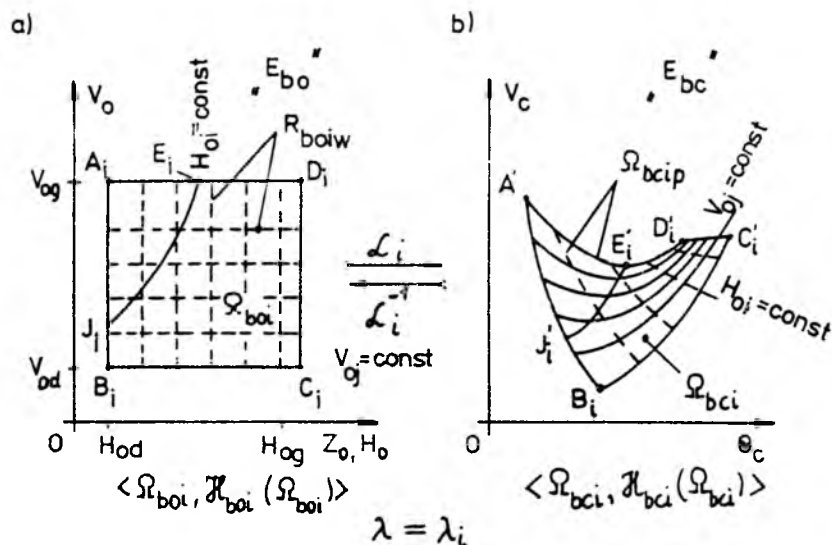
- Sformułowanie zbioru zagadnień częściowych:

$$\begin{aligned} \Omega_{bci} &= \mathcal{L}_i(\Omega_{b0i}), \\ \Omega_{b0i} &\subseteq \tilde{\Omega}_{b0}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

- Rozwiązanie zagadnień częściowych (3.12) metodą zaproponowaną w pracy [12], prowadzącą do zbioru dziedzin funkcjonowania:

$$\begin{aligned} < \Omega_{b0i}, \kappa_{b0i}(\Omega_i) >, \\ < \Omega_{bci}, \kappa_{bci}(\Omega_i) >, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Na rys.2 przedstawiono ilustrację zagadnienia częściowego (3.12) i jego rozwiązania (3.13), z wyróżnieniem pożądaných własności operatora kinetycznego $\mathcal{L}_i$; przekształcenia rozmaitości bazowych: wejściowej (3.13)₁ Ω_{b0i} (rys.2a) na docelową (3.13)₂ Ω_{bci} (rys.2b).



Rys. 2.

- Analiza struktury rozwiązań (3.13), (3.14) w aspekcie wyników ilościowych i jakościowych rozwiązań częściowych, która umożliwi zbadanie własności operatorów $\mathcal{L}_i$ transycji obszarów Ω_{oi} na Ω_{bci} oraz operatorów ewolucji $\mathcal{L}_{oij}$, $\mathcal{L}_{cij}$ obszarów początkowych Ω_{boi} na Ω_{boj} i obszarów Ω_{bci} na Ω_{bcj} , sprzężonych z przekształceniem λ_i na λ_j .

Pożądaną relację w zbiorze przekształceń:

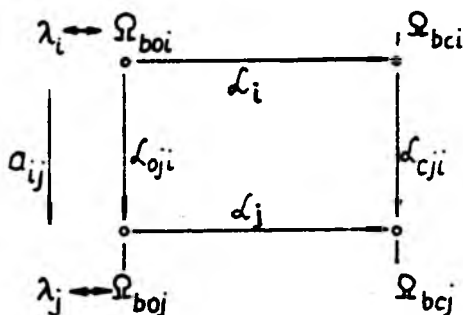
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i, \mathcal{L}_{oij}, \mathcal{L}_{cij}, \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_j, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.14)$$

pokazano na rys.3. Zakłada się, iż operatory przekształceń mają własność jednoznaczności, ciągłości i przemienności, które stanowią zespół warunków koniecznych dla finalnej operacji – agregacji rozwiązań częściowych.

- Agregacja rozmaitości Ω_{bo} , Ω_{bc} za pomocą procedury interpolacyjnej rozwiązań częściowych (3.13):

$$\begin{aligned} \Omega_{bo} &\cong \text{interpol. } \{\Omega_{boi}\}, \\ \Omega_{bc} &\cong \text{interpol. } \{\Omega_{bci}\}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.15)$$

rozumianej w uogólnionym ujęciu interpolacji rozmaitości.



Rys. 3.

Zakłada się, iż będzie to procedura numeryczna z wykorzystaniem *EMC*. Zastosowanie procedury interpolacyjnej (3.15) umożliwia, w zależności od potrzeby, wyznaczenie charakterystyk procesów spadku obiektu dla dowolnego parametru λ należącego do dziedziny $[\lambda_{0d}, \lambda_{0g}]$.

- Analiza topologiczna rozmaitości bazowych Ω_{b0} , Ω_{bc} wg procedury przedstawionej w pracy [12].

3.3. Formalizm aplikacyjny zagadnienia nominalnych procesów spadku zasobnika

W modelu nominalnym (idealnym) zasobnik potraktowano jako układ bryły sztywnej zorientowanej zespołem stabilizatorów, o stałej masie i układzie głównych centralnych osi bezwładności, pokrywających się z osiami geometrycznej symetrii. Zaproponowano również następującą klasę warunków granicznych w postaci standaryzowanej. W warunkach początkowych przyjąć zerowe wartości kąta natarcia, ślizgu i prędkości obrotowej, zerowe zaburzenia warunków początkowych. Warunek docelowy Ω_b ograniczyć do wymogu spadku bomby na powierzchnię ziemi w punkcie C apriorycznie wyznaczonym.

3.3.1. Dane wejściowe do formułowania zagadnień prostych i odwrotnych

Modelowanie własności dynamicznych zasobnika obejmuje klasę zagadnień prostych i odwrotnych, które prowadzą do uzyskania modelu matematycznego obiektu:

$$L^*[x, y, z, p] = 0, \quad (3.16)$$

gdzie:

- L^* - operator modelu;
 x - wektor stanu;
 y - wektor wyjść;
 z - wektor zakłóceń;
 p - wektor parametrów.

Uwzględnienie założeń upraszczających, które wynikają z treści zadania (p.1), prowadzą (3.16) do postaci:

$$L^*[x, y, p] = 0. \quad (3.17)$$

W celu sformułowania zagadnień dynamicznych, do równania (3.17) obejmującego równania ruchu i więzów kinematycznych należy dołączyć warunki graniczne:

- początkowe

$$x(t_0) = x_0 \in \Omega_{b0}, \quad (3.18)$$

- docelowe

$$x(t_c) = x_c \in \Omega_{bc} \subseteq \Omega_b, \quad (3.19)$$

- ograniczenia

$$x_{gd} \leq x(t) \leq x_{gg}, \quad (3.20)$$

gdzie:

(x_0, t_0) - zdarzenie początkowe zrzutu;

(x_c, t_c) - zdarzenie docelowe (upadku);

x_{gd}, x_{gg} - dolne i górne ograniczenie zmiennych stanu;

- i procedur analizy własności dynamicznych procesów nominalnych: zasady stateczności [5], (p.1):

$$P_{z.stat}, \quad (3.21)$$

i warunków praktycznej realizowalności (technicznej stateczności) [1,7,16] (p.2)

$$P_{t.stat}. \quad (3.22)$$

W przestrzeni stanu $x \in R^n$ równania (3.17) można zapisać w postaci:

$$\dot{x} = f(x, p), \quad g(x, p) = 0, \quad (3.23)$$

układu równań różniczkowo-algebraicznych, gdzie $x = \text{col}[x_1, \dots, x_n]$,
 $p = \text{col}[p_1, \dots, p_n]$, zaś:

$$f: T_b \times X \times P, \quad (3.24)$$

jest operatorem ograniczonym, nieliniowym, ciągłym.

Relacje (3.16)÷(3.24) stanowią zamknięty układ "danych wyjściowych" do formułowania zagadnień prostych systemu procesów nominalnych spadku zasobnika, spełniających zasadę stateczności i warunki praktycznej realizowalności.

Zauważmy, iż:

- skutek przyjętych założeń w (p.1), definiujących szczególną klasę procesów – nominalnych spadku zasobnika, procesy $x(t; t_0, t_c)$ realizują się w płaszczyźnie pionowej Ox_0z_0 zanurzonej w przestrzeni podstawowej $Ox_0y_0z_0$;
- procedury (3.21), (3.22) opracowano wykorzystując modele (3.16) i (3.17).

Ze względu na ograniczenia redakcyjne podaje się szczegółowej postaci związków (3.16), (3.17), (3.21), (3.22).

4. Zbiór rozwiązań zagadnień częściowych

W (p.1) sformułowano zadanie opisanie systemu procesów spadku zasobnika w ujęciu celowościowym, w postaci zależności (3.2) między obszarami Ω_{b0} i Ω_{bc} . Uwzględniając założenia (p.3.1) powyższe zadanie sformułujemy w postaci zagadnienia:

$$\Omega_{bc} = \mathcal{L}(\Omega_{b0}), \quad \Omega_{bc} \subseteq \Omega_b, \quad \Omega_{b0} \subseteq \tilde{\Omega}_{b0}, \quad (4.1)$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest operatorem kinetycznym, przedstawiającym regułę przekształcenia Ω_{b0} na Ω_{bc} ; Ω_b – zbiór celu, określający warunki pozytywnej realizacji procesu; Ω_{b0} – apriorycznie przyjęty obszar przeszukania.

Zauważmy, iż w podejmowanych badaniach operator $\mathcal{L}$ nie jest określony analitycznie, lecz za pomocą układu danych wyjściowych (p.3.1.1) zagadnienia dwugranicznego i procedury analizy dziedzin operatora Ω_{b0} , Ω_{bc} , którą stanowią metody rozwiązania zagadnienia [12], (p.3.1), badania struktury zbioru rozwiązań i własności operatora kinetycznego.

W niniejszym rozdziale przedstawia się wyniki zagadnień częściowych:

$$\{ \langle \Omega_{b0i}, \Omega_{bci}, \mathcal{L}_i \rangle \}, \quad i = 0, \dots, 3, \quad (4.2)$$

problemu globalnego (3.6), w wyodrębnionym przedziale parametrów λ :

$$[\lambda_d, \lambda_g] \in [\lambda_{gd}, \lambda_{gg}], \quad (4.3)$$

dla $\lambda_d = -30^\circ$, $\lambda_g = 0^\circ$.

Przedział $[\lambda_d, \lambda_g]$ parametrów λ zdyskretyzowano do zbioru:

$$\{\lambda_i\}, \quad i = 0, \dots, 3, \quad (4.4)$$

gdzie:

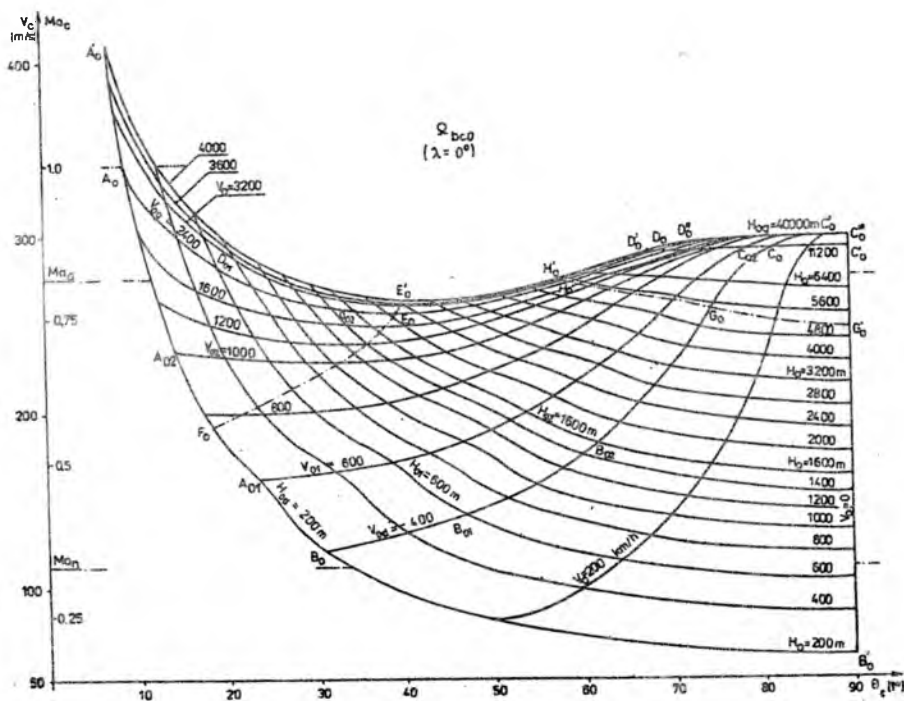
$$\begin{aligned} i = 0 &\sim \lambda_0 = 0^\circ, & i = 1 &\sim \lambda_1 = -10^\circ, \\ i = 2 &\sim \lambda_2 = -20^\circ, & i = 3 &\sim \lambda_3 = -30^\circ. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, iż w (p.1) objaśniono reprezentatywność zbioru (4.4) kątów zrzutu λ_i .

Zgodnie z przyjętą definicją rozmaiłości realizacji docelowych Ω_{bc} i metody geometryczno-topologicznej analizy jej własności wyznaczono:

- Konfiguracje rozmaiłości Ω_{bci} w przestrzeni warunków docelowych E_{bc} , sparametryzowanej układem współrzędnych $C\theta_c V_c \lambda$ dla $\lambda = \lambda_i, i = 0, \dots, 3$.
- Zbiór pól $\kappa_i(\Omega_{bci})$, które określają lokalne i globalne własności systemu procesów (parametryzując obszar Ω_{bci} rodzinami zbiorów $\mathcal{R}_{bciw}, \mathcal{R}_{bci p}$.

Badania wykazały, iż przekroje $\Omega_{bci}, i = 0, \dots, 3$ zagadnienia (4.2), (4.3) są rozmaiłościami ograniczonymi, spójnymi (rys.4). Brzegi obszarów stanowią krzywe zamknięte skierowane bez punktów wielokrotnych, o skończonej liczbie punktów wierzchołkowych. Każdy łuk krzywej brzegowej składa się z punktów o wyróżniającej własności, przeniesionej w procesie transformacji z odpowiednich obszarów $\Omega_{b0i}, i = 0, \dots, 3$.



Rys. 4.

4.1. Obszar docelowy Ω_{bc0} procesów zrzutu z lotu poziomego (obszar podstawowy)

Rozwiązanie zagadnienia $\langle \Omega_{bc0}, \kappa_{bc0}(\Omega_0) \rangle$ zilustrowano na rys.4. Przedstawimy opis geometryczny rozmaitości Ω_{bc0} . Brzeg obszaru stanowi krzywa zamknięta $A_0F_0B_0G_0C_0D_0H_0E_0A_0$, bez punktów wielokrotnych, dodatnio skierowana, złożona z łuków regularnych: $A_0F_0B_0$ o własności $H_{0d} = \text{const.}$ (w skrócie zapiszemy $A_0F_0B_0|H_{0d}$), $B_0G_0C_0|V_{0d}$, $C_0D_0|H_{0g}$, $C_0J_0V_0|V_{0g}$. Punkty wierzchołkowe A_0, B_0, C_0, D_0 rozmaitości Ω_{bc0} stanowią odpowiednie obrazy przekształcenia (4.1) punktów wierzchołkowych $A = [H_{0d}, V_{0g}]$, $B = [H_{0d}, V_{0d}]$, $C = [H_{0g}, V_{0d}]$, $D = [H_{0g}, V_{0g}]$ obszaru początkowego Ω_{b0} . W związku z tym posiadają odpowiednie własności, które zapisujemy w postaci: $A_0|(H_{0d}, V_{0g})$, $B_0|(H_{0d}, V_{0d})$, $C_0|(H_{0g}, V_{0d})$, $D_0|(H_{0g}, V_{0g})$. Wycinki krzywej brzegowej $A_0F_0B_0$, B_0G_0 , C_0D_0 , D_0H_0 mają własność wypukłości względem wnętrza obszaru.

Zauważmy, iż na rys.4 wykreślono rozwiązanie zagadnienia dla rozszerzonego zakresu parametrów początkowych względem podanych w (p.1). Zmiana dotyczy zakresu prędkości zrzutu i wysokości górnej zrzutu:

$$V'_{0d} = 0, \quad V'_{0g} = 4000 \text{ km/h}, \quad H'_{0g} = 40000 \text{ km}. \quad (4.5)$$

4.1.1. Parametryzacje $\kappa_0(\Omega_{bc0})$ obszaru Ω_{bc0}

Parametryzacje naturalne $\mathcal{R}_{bcow}$ są indukowane:

- układem współrzędnych $C\Theta_c V_c$ - wyznaczają equilinie $\Theta_c = \text{const.}$, $V_c = \text{const.}$;
- układem współrzędnych $C\Theta_c Ma_c$ - wyznaczają equilinie $Ma_c = \text{const.}$, w szczególności: linie stałych wartości charakterystycznych liczb Macha opływu zasobnika w chwili upadku na cel C ($Ma_n = 0.31$ - górna zakresu nieściśliwego; $Ma_d = 0.82$, $Ma_g = 2.43$ - dolna i górna krytyczna zakresu transdźwiękowego) separujące podobszary przepływu: nieściśliwego $Ma < Ma_n$, poddźwiękowego $Ma_n \leq Ma < Ma_d$, transdźwiękowego $Ma_d \leq Ma < Ma_g$.

Parametryzacje transformowane $\mathcal{R}_{bcop}$, uzyskane w wyniku przekształcenia za pomocą operatora kinetycznego $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}|\lambda = 0$ parametryzacji naturalnych obszaru Ω_{bc0} , są indukowane:

- układem współrzędnych $0H_0V_0|\lambda = 0$, wyznaczają equilinie $H_0 = \text{const.}$, $V_0 = \text{const.}$;
- wyróżnionymi zbiorami charakterystycznych wysokości zrzutu i prędkości zrzutu:

$$[H_{0d}, H_{01}, H_{02}, H_{0g}] = [200, 600, 1600, 11200][m], \quad (4.6)$$

$$[V_{0d}, V_{01}, V_{02}, V_{0g}] = [400, 600, 1000, 2400][km/h],$$

które umożliwiają wydzielenie: małych, średnich i dużych zakresów wysokości zrzutu i prędkości zrzutu, oraz odpowiadających im 9-ciu klas podobszarów, jak np. podobszar $(\Omega_{b0})_{00}$ małych wysokości i małych prędkości zrzutu.

4.1.2. Własności obszaru Ω_{bc0}

W celu identyfikacji własności ekstremalnych i granicznych pola

$$\{\Theta_{c0}(H_0, V_0), V_{c0}(H_0, V_0)\} \in \Omega_{bc0}, \quad (4.7)$$

wyznaczono: parametryzacje (p.4.1.1), linie $E'_0 E_0 F_0$ i $H'_0 H_0 G_0 G_0$ (rys.4).

Z rys.4 wynikają wnioski:

- ekstremalne własności pola (4.7) występują w punktach wierzchołkowych krzywej brzegowej: $[\Theta_{c0d}, V_{c0g}]$ w punkcie A_0 , V_{c0d} w punkcie B_0 , Θ_{c0g} w punkcie C_0 ;
- linia $E'_0 E_0 F_0$ miejsc geometrycznych globalnych ekstremum minimum funkcji:

$$V_{c0} = V_{c0}[\Theta_{c0}(H_0); V_0], \quad (4.8)$$

jest krzywą separującą obszar Ω_{bc0} na podobszary:

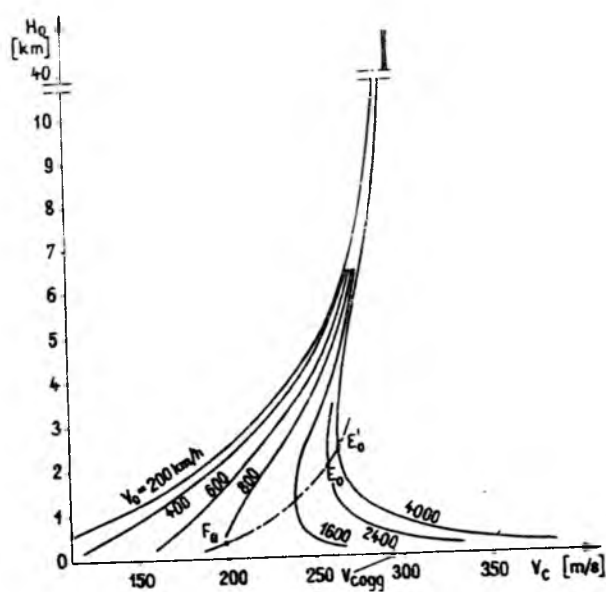
$$\Omega_{bc0}|a \leq 0, \quad \Omega_{bc0}|a > 0, \quad (4.9)$$

gdzie:

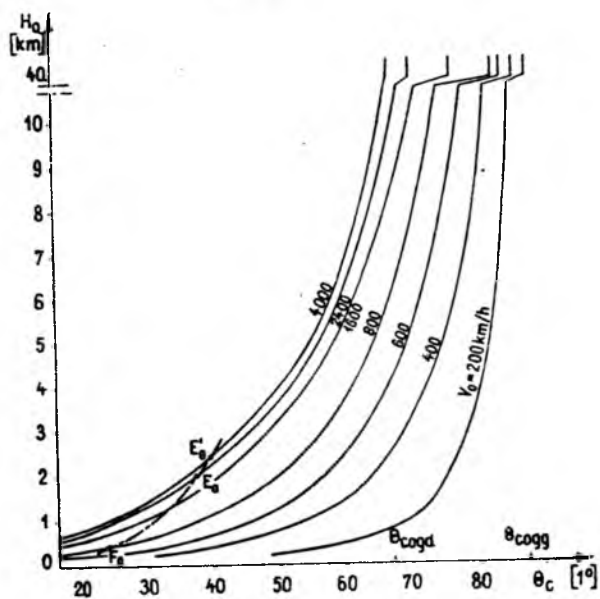
$$a = \frac{dV_{c0}}{dH_0},$$

ograniczone odpowiednio krzywą brzegową $A'_0 F_0 E_0 E'_0 A'_0$ i $F_0 B_0 G_0 C_0 C'_0 D'_0 H'_0 E'_0 E_0 F_0$;

- prędkość upadku $V_c(H_0; V_0)$ zasobnika (rys.5) dla $H_0 \rightarrow H'_{0g}$ dąży do ustalonej wartości granicznej górnej $V_{cgg} \approx 296$ m/s, niezależnie od prędkości początkowej zrzutu $V_0 \in [V_{0d}, V_{0g}]$;
- prędkość upadku $\Theta_c(H_0; V_0)$ (rys.6), dla granicznych przypadków prędkości zrzutu V_{0d}, V_{0g} i wysokości zrzutu H_{0g} istotnie zależą od prędkości początkowej zrzutu, mimo, iż wysokość zrzutu wynosi $H_0 \approx H'_{0g} = 40$ km.



Rys. 5.

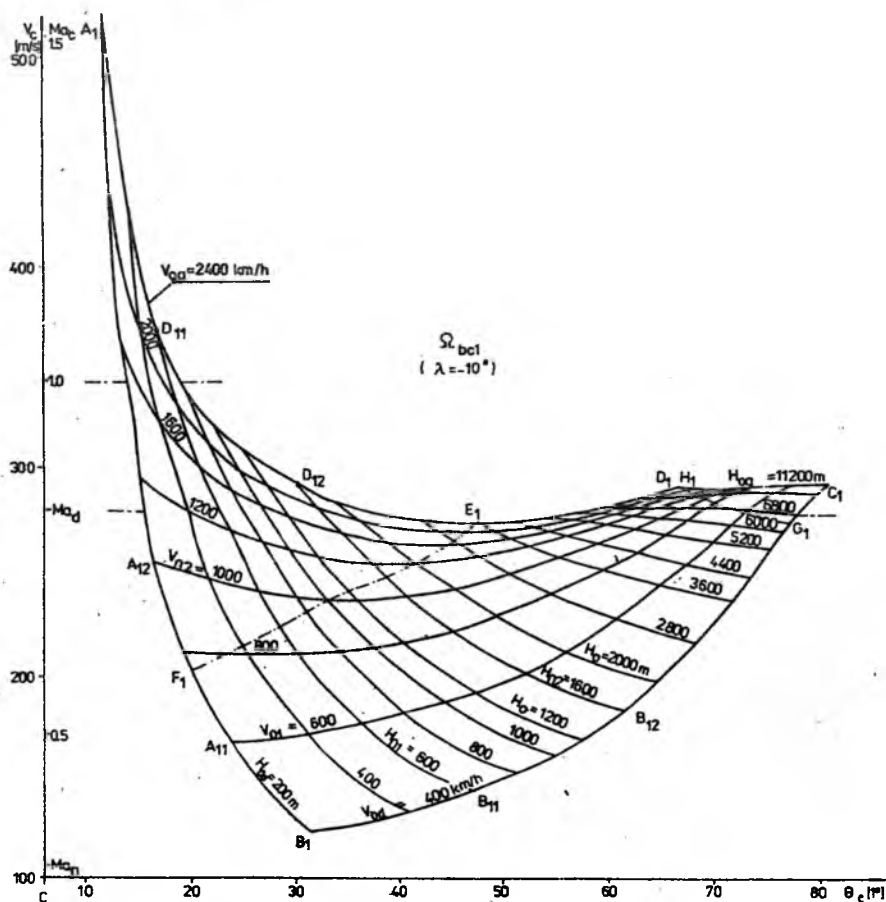


Rys. 6.

4.2. Obszary docelowe Ω_{bci} procesów zrzutu z lotu nurkowego

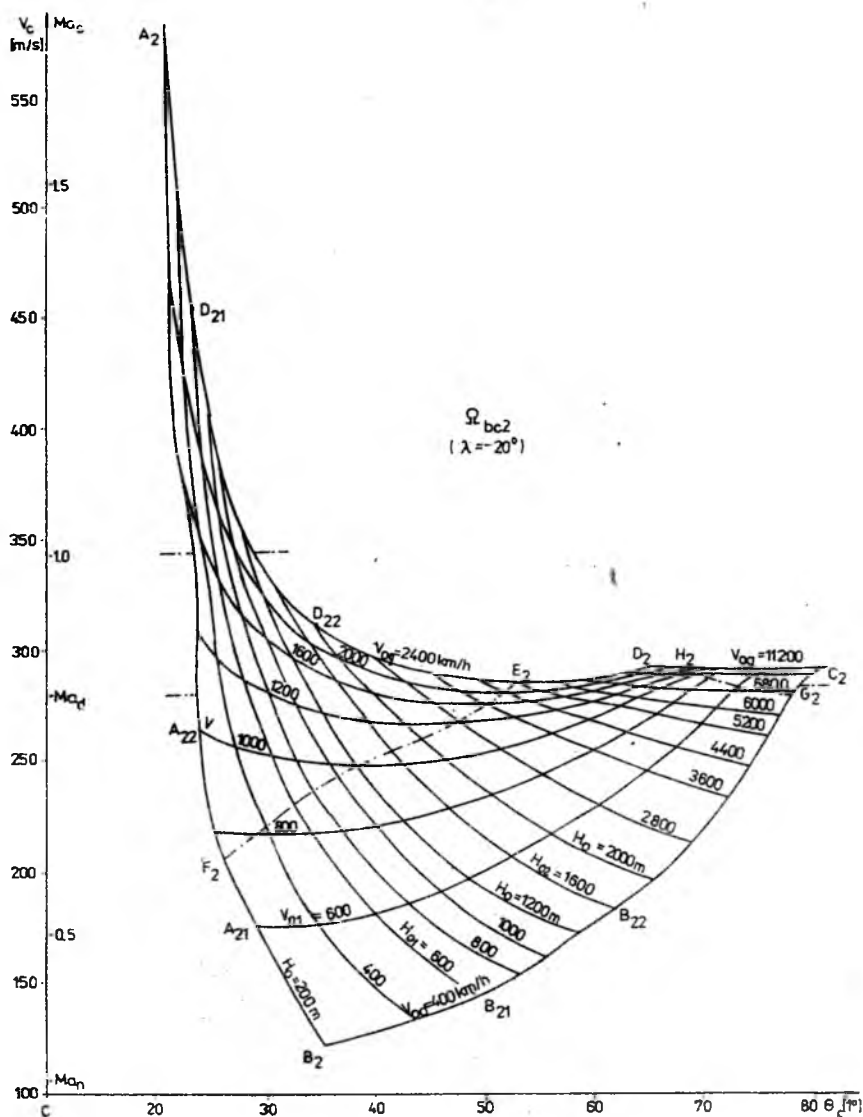
Do rozważań przyjęto (p.1) zakres kątów nurkowania $-30^\circ \leq \lambda < 0^\circ$, w którym wyróżnia się przedziały: małych $-10^\circ \leq \lambda < 0$ i średnich $-30^\circ < \lambda < -10^\circ$ kątów nurkowania.

Wspomniany zakres kątów nurkowania zdyskretyzowano do zbioru $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$, gdzie: $\lambda_1 = -10^\circ$ – separujący przedziały małych i średnich kątów, $\lambda_2 = -20^\circ$ – reprezentatywny kąt przedziału średnich kątów, zaś $\lambda_3 = -30^\circ$ jest granicznym dolnym zakresem średnich kątów nurkowania. Rozwiązania zagadnień częściowych $\langle \Omega_{bci}, \kappa(\Omega_{bci}) \rangle$ dla $i = 1, 2, 3$ przedstawiono na rys.7,8,9.

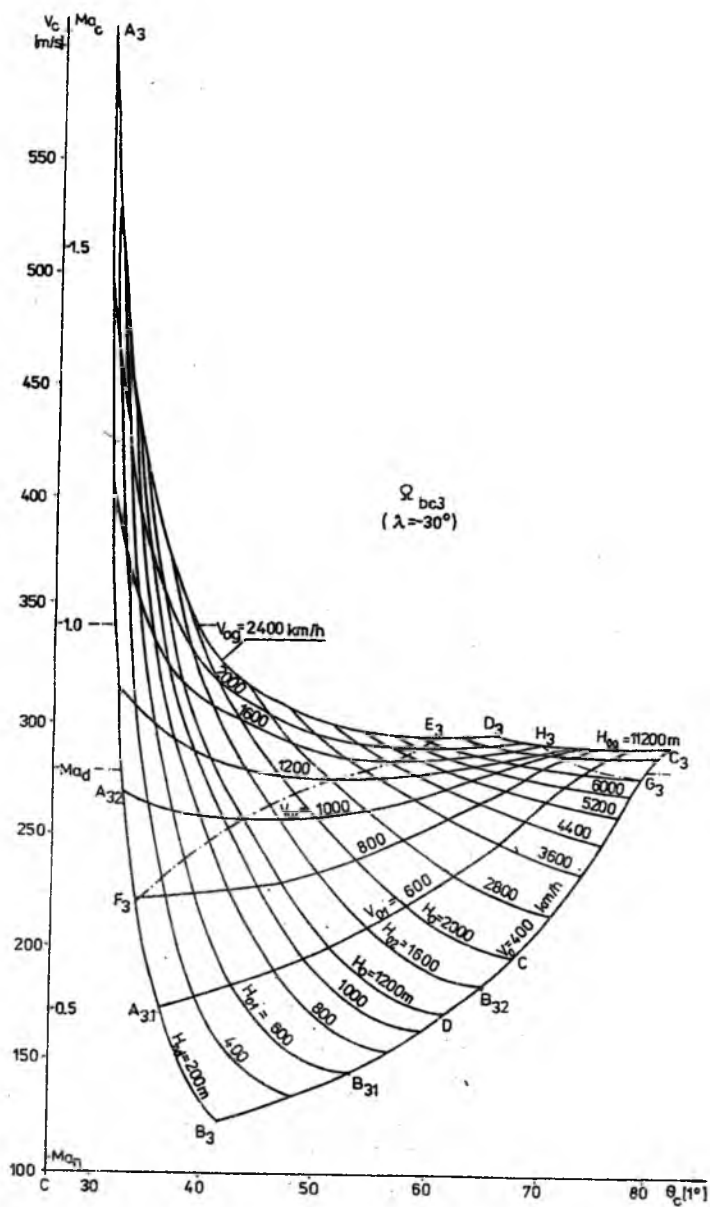


Rys. 7.

Opis geometryczny rozmaitości docelowych Ω_{bci} , $i = 1, 2, 3$ w aspekcie jako-



Rys. 8.



Rys. 9.

ściowym jest analogiczny do przedstawionego w (p.4.1).

Własność analogii jest konsekwencją równoważności topologicznej rozważanych obszarów Ω_{bci} , $i = 0 \div 3$. Szczegółową analizę porównawczą struktury rozwiązań zagadnień częściowych przedstawia się w p.5.

5. Badania struktury rozwiązań

W rozdziale 4-tym przedstawiono rozwiązania częściowe Ω_{bci} , $i = 0, \dots, 3$ zagadnienia obszaru docelowego Ω_{bc} dla przyjętej apriorycznie rozmaitości początkowej $\bar{\Omega}_{b0}$. Kontynuacja rozważań dotyczy analizy porównawczej ilościowej i jakościowej rozwiązań częściowych, która umożliwi zbadanie własności operatorów kinetycznych $\mathcal{L}_i$ tranzycji obszarów Ω_{b0i} na Ω_{bci} oraz operatorów ewolucji $\mathcal{L}_{0ij}$, $\mathcal{L}_{cij}$ obszarów początkowych Ω_{b0i} na Ω_{b0j} i obszarów docelowych Ω_{bci} na Ω_{bcj} , sprzężonych z przekształceniami λ_i na λ_j .

5.1. Własności ewolucji obszarów częściowych

Własności ewolucji obszarów Ω_{bci} , $i = 0, \dots, 3$ względem parametru λ dla przyjętego zakresu $\lambda \in [-30^\circ, 0^\circ]$, uzyskamy na podstawie odwzorowania zbiorów punktów: $A = \{A_i\}$, $B = \{B_i\}$, ..., $E = \{E_i\}$, $F = \{F_i\}$ - wierzchołkowych $\{A_i, B_i, C_i, D_i\}$ i charakterystycznych $\{E_i, F_i\}$, dla $i = 0, \dots, 3$ - pokazanych na rysunkach 4÷7, przedstawiających wyniki badań zagadnień częściowych (3.24).

Wyniki obliczeń względnych zmian intensywności prędkości upadku ΔV_{ci} i kątów upadku $\Delta \Theta_{ci}$

$$\Delta V_{ci} = \frac{V_{ci} - V_{c0}}{V_{c0}}, \quad \Delta \Theta_{ci} = \frac{\Theta_{ci} - \Theta_{c0}}{\Theta_{c0}}, \quad (5.1)$$

w zależności od parametru λ_i , dla ciągu $\langle \lambda_i \rangle$, $i = 0, \dots, 3$, świadczą o następujących własnościach odwzorowania poszczególnych klas punktów:

- punkty $\{A_i\}$ zwiększają intensywnie prędkość upadku (ok. 83%) i kąty upadku (ok. 220%);
- punkty $\{B_i\}$ mają prawie stałą prędkość upadku (z dokładnością do 3%), zaś kąty upadku rosną (do 35%);
- punkty $\{C_i\}$ są prawie stałe (z dokładnością ok. 1%);
- punkty $\{D_i\}$ minimalnie zwiększają prędkość upadku (1,9%) i nieznacznie maleją kąty upadku (ok. 6%).

Powyższe wyniki świadczą o własnościach lokalnych operatorów ewolucji $\mathcal{L}_{ij}$:

- operator przekształcenia $(\mathcal{L}_{ij})_C$ zbioru punktów C jest prawie stały;
- operatory przekształcenia $(\mathcal{L}_{ij})_B, (\mathcal{L}_{ij})_D$ zbioru punktów B, D są prawie stałe względem współrzędnej prędkości upadku.

Uzasadniono, iż operatory tranzykcji $\mathcal{L}_i$ (p.4) i ewolucji $\mathcal{L}_{ij}$ (p.5.1) charakteryzują się pożądanymi własnościami (3.14), które stanowią zespół warunków koniecznych dla finalnej operacji - agregacji rozwiązań częściowych (3.15).

5.2. Rozmaitość docelowa

Syntezę podjętych badań, wobec zbadanych własności (3.14) operatorów kinetycznych $\mathcal{L}_i$ (p.4) i ewolucji (p.5.1), stanowi operacja agregacji (p.3.2.6) rozwiązań częściowych Ω_{bc_i} , $i = 0, \dots, 3$ (p.4), prowadząca do rozmaitości docelowej Ω_{bc} (rys.10) systemu procesów spadku bomby, określonej w przestrzeni docelowej E_{bc} , w przedziale $[-30^\circ, 0^\circ]$ parametrów λ . Rozmaitość ta jest dualna do rozmaitości początkowej Ω_{b0} (p.1) o konfiguracji prostopadłościanu w przestrzeni E_{b0} .

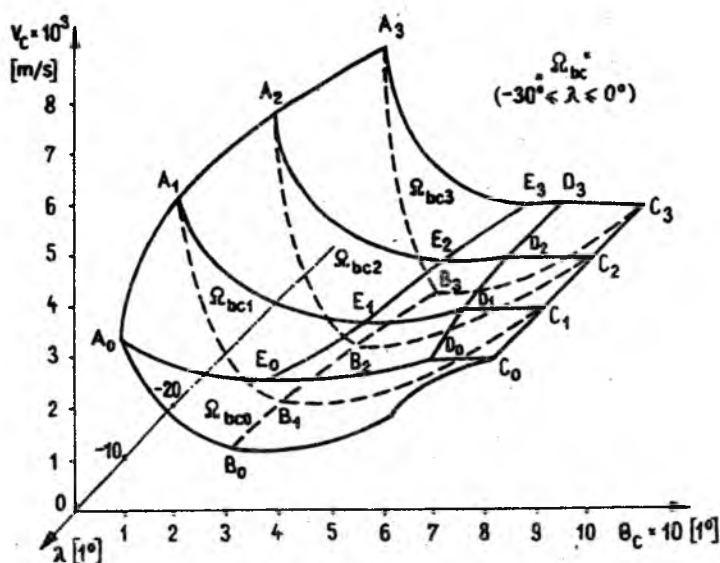
Na rys.10 przedstawiono konfigurację rozmaitości Ω_{bc} w przestrzeni:

$$E_{bc} = \Theta_c \times V_c \times A \subset R^3,$$

sparametryzowanej układem współrzędnych $C\Theta_c V_c \lambda$. Obszar Ω_{bc} jest rozmaitością jednospójną z brzegiem, niewypukłą, o konfiguracji ciała wydłużonego względem osi $C\lambda$ o ograniczonej rozpiętości i konfiguracji przekrojów poprzecznych klasy rozwiązań częściowych (rys.4,7,8,9). Ograniczony jest powierzchnią brzegową zamkniętą, składającą się ze skończonej liczby płatów regularnych, tak, że liczba krzywych wierzchołkowych jest ograniczona. Topologię rozmaitości indukują funkcje $\kappa_{bc}(\Omega_{bc})$.

6. Wnioski

1. Sformułowano zespół zagadnień logicznie usystematyzowanych, które objaśniają podstawowe pojęcia proponowanej teorii: procesu nominalnego spadku bomby, spełniającego warunki zasady stateczności; wymogu praktycznej realizowalności procesu nominalnego w uwarunkowaniach nadrzędnego układu i zaburzeń działających w procesie ruchu; systemu procesów nominalnych o własnościach praktycznej realizowalności (stateczności technicznej); charakterystyk bazowych systemu procesów.



Rys. 10.

2. Zaproponowano koncepcję charakterystyk bazowych procesów ruchu bomby lotniczej w ujęciu celowościowym i kompleksowym (systemu procesów), których celowość wynika z przydatności do formułowania i konstruktywnego opisu złożonych zagadnień układów wieloskładnikowych z bombą jako zespołem bazowym. Podstawowymi elementami tej klasy charakterystyk są rozmaiwości bazowe: początkowa Ω_{b0} i docelowa Ω_{bc} oraz operator kinetyczny $\mathcal{L}$ przekształcenia tych rozmaiwości. Zakłada się, iż łączne własności wymienionych elementów adekwatnie charakteryzują obiekt w aspekcie globalnym pod względem ilościowym i jakościowym.
3. Rozmaiwości Ω_{b0}, Ω_{bc} wraz z rodzinami podzbiorów $\kappa_{b0}(\Omega_{b0}), \kappa_{bc}(\Omega_{bc})$ wyznaczają charakterystyki bazowe zasobnika: wejściową i realizacji zadania. Przedstawiają układy dualne o jednoznacznej odpowiedności podobszarów – co umożliwia bezpośrednie rozwiązanie odpowiednich zagadnień dwugranicznych.
4. Zaproponowano metodę badań systemu procesów spadku bomby, dostosowaną do analizy numerycznej, która polega na apriorycznym przyjęciu rozmaiwości przeszukania Ω_{b0} i jej odpowiedniej dyskretyzacji względem głównego parametru λ , co prowadzi do zbioru prostych zagadnień częściowych $\langle \Omega_{b0i}, \Omega_{bci}, \mathcal{L}_i \rangle, i = 0, \dots, n$. Analiza zbioru rozwiązań częściowych, której wynikami są przede wszystkim własności operatora kinetycz-

nego $\mathcal{L}$, umożliwia opracowanie odpowiedniej operacji agregacji rozwiązań częściowych do globalnych rozmaiłości $\langle \Omega_{b0}, \Omega_{bc}, \mathcal{L} \rangle$.

5. Metodologia badań zagadnienia charakterystyk bazowych systemu procesów spadku bomby i charakterystyk procesów rozlotu odłamków bomby lotniczej [13] jest ukierunkowana na sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia [14] "Obszarów dopuszczalnych procesów bombardowania".

Literatura

1. BOGUSZ W., 1972, *Stateczność techniczna*, IPPT, Warszawa
2. DIETRICH I., 1985, *System i konstrukcja*, WNT, Warszawa
3. DŻYGADŁO Z., KRZYŻANOWSKI A., PIOTROWSKI E., 1973, *Dynamika lotu osiowo-symetrycznego ciała ze sztywnym urządzeniem hamującym, zrzuconego z samolotu*, Biul.WAT, XXII, 11(255)
4. DŻYGADŁO Z., KRZYŻANOWSKI A., PIOTROWSKI E., 1974, *Dynamika lotu osiowo-symetrycznego ciała ze wiotkim urządzeniem hamującym, zrzuconego z samolotu*, Biul.WAT, 1(257), XXIII
5. GUTOWSKI R., 1978, *Wprowadzenie do stateczności ruchu układów ciągłych*, Praca zbiorowa: Stateczność i wrażliwość w układach mechanicznych, IPPT PAN, Warszawa
6. KLIR G., 1969, *An approach to general systems theory*, Van Nostrand Reinhold, New York
7. MARTYNJUK A.A., 1983, *Praktičeskaja ustojčivost' dviženija*, Kiev, Naukova Dumka
8. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, PW Prace Naukowe, Mechanika 32, Warszawa
9. MARYNIAK J., MICHAŁEWICZ K., WINCZURA Z., 1976, *Wpływ silników hamujących-przyspieszających na własności dynamiczne bomb lotniczych*, Informator ITWL, 50, Warszawa
10. MARYNIAK J., MICHAŁEWICZ K., WINCZURA Z., 1984, *Wpływ warunków zrzutu na ruch zasobnika w pobliżu nosiciela i parametry upadku*, MTiS, 22, 3-4, PWN Warszawa
11. MARYNIAK J., TARKA B., 1980, *Wpływ interferencji aerodynamicznej na parametry ruchu zasobnika lotniczego po zrzucie z samolotu*, MTiS, 3-4, 28, PWN Warszawa
12. NICZYPORUK J., 1987, *Obszary proporcjonalnego samonaprowadzania rakiet klasy powietrze-powietrze*, WAT, Warszawa
13. NICZYPORUK J., 1991, *Charakterystyki procesów rozlotu odłamków bomby lotniczej*, Biul.WAT, Warszawa
14. NICZYPORUK J., 1988, Referat: *Obszary dopuszczalnych warunków bombardowania*, III Ogólnopolska Konferencja "Mechanika w lotnictwie", PW, Warszawa
15. PELCZAR A., SZARSKI J., 1989, *Wstęp do teorii równań różniczkowych; cz.II, Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych*, PWN, Warszawa

16. REZVAN V., 1983, *Abсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием*, Nauka, Glavnaja Redakcija Fiziko-Matemat. Literatury
17. SKOWROŃSKI M., 1972, *Elementy dynamiki geometrycznej*, WNT, Warszawa

ZASTOSOWANIE METODY "PUDELEK MACHA" DO WYZNACZANIA OBCIĄŻEŃ I POCHODNYCH AERODYNAMICZNYCH SAMOŁOTU W ZAKRESIE NADDŹWIEKOWYM¹

TOMASZ GOETZENDORF-GRABOWSKI

Politechnika Warszawska

Praca dotyczy numerycznego wyznaczania rozkładu ciśnień i pochodnych aerodynamicznych dla samolotu będącego w ustalonym cplywie naddźwiękowym. Zaprezentowano metodę obliczeniową nazwaną metodą Pudelek Macha (ang. Mach Box Method lub Characteristic Box Method) oraz jej modyfikację i zastosowanie do praktycznych obliczeń. Uzyskane wyniki porównano z wynikami eksperymentalnymi. Uzyskano dobrą zgodność (błąd nie przekraczający 20%).

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a - prędkość dźwięku,
- a_∞ - prędkość dźwięku przepływu niezaburzonego,
- C_l - współczynnik momentu przechylającego,
- C_m - współczynnik momentu pochyłającego,
- C_p - bezwymiarowy współczynnik ciśnienia,
- C_z - współczynnik siły nośnej
- h - krok podziału siatki,
- M_x - moment przechylający (względem osi x),
- M_y - moment pochyłający (względem osi y),
- Ma_∞ - liczba Macha przepływu niezaburzonego
($Ma_\infty = V_\infty/a_\infty$),
- p - ciśnienie całkowite,
- p_∞ - ciśnienie całkowite w przepływie niezaburzonym,
- Δp - różnica ciśnień między górną, a dolną powierzchnią,
- P_z - siła nośna,

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

q	- ciśnienie dynamiczne ($q = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 / 2$),
Q	- prędkość kątowna pochylenia,
S	- powierzchnia nośna (odniesienia),
r, s	- współrzędne charakterystyczne,
t	- czas,
V_{∞}	- prędkość przepływu niezaburzonego,
V	- wektor prędkości,
u, v, w	- składowe prędkości zaburzeń odpowiednio wzdłuż osi x, y, z ,
x, y, z	- współrzędne kartezjańskie,
α	- kąt natarcia,
β	- współczynnik Prandtla-Glauerta ($\beta = \sqrt{Ma_{\infty}^2 - 1}$),
$\varphi(x, y, z)$	- potencjał prędkości zaburzeń,
$\phi(x, y, z)$	- pełny potencjał prędkości,
κ	- wykładnik izentropy,
μ_{∞}	- kąt Macha ($\sin \mu_{\infty} = Ma_{\infty}^{-1}$),
ρ	- gęstość powietrza,
ρ_{∞}	- gęstość powietrza w przepływie niezaburzonym,
ξ, η, ζ	- współrzędne kartezjańskie.

1. Wstęp

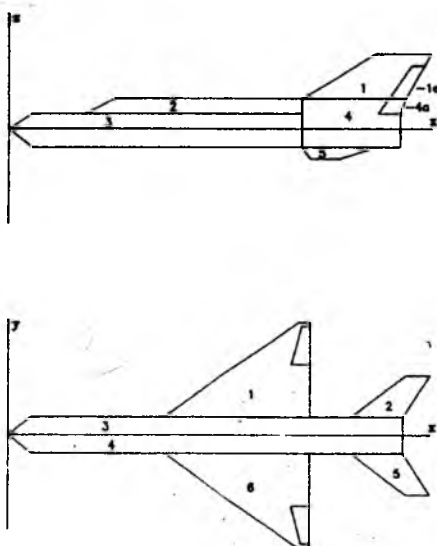
Model przepływu potencjalnego jest obecnie chyba najpowszechniej stosowanym modelem do opisu opływu ciał. Pomimo wielu uproszczeń w porównaniu z modelem płynu lepkiego jest bardzo atrakcyjnym narzędziem [1,2]. W wielu zagadnieniach bowiem, wyniki uzyskane przy zastosowaniu modelu płynu lepkiego nie odbiegają znacząco od wyników otrzymanych przy wykorzystaniu metod bazujących na modelu potencjalnym, przy znacznie większym koszcie obliczeń.

Stosując model przepływu potencjalnego do wstępnych obliczeń, można się posłużyć metodami uproszczonymi takimi jak METODA LINII MACHA [3]. Metoda ta narzuca jednak duże ograniczenia na obrys opływającego obiektu. W projektowaniu aerodynamicznym istotne jest opracowanie i wdrożenie metod uwzględniających opływ brył o skomplikowanych kształtach. Istnieje wiele takich metod obliczeniowych dla przepływu naddźwiękowego różniących się głównie sposobem generacji siatki (podziału na elementy). Generalnie można wyróżnić dwa

sposoby: pierwszy – podział bazuje na obrysie opływającego obiektu [4,5], drugi – siatka jest budowana na stożku Macha [6,7]. Niniejsza praca przedstawia metodę nazwaną roboczo metodą PUDELEK MACHA [8] (ang. Mach Box lub Characteristic Box).

2. Model fizyczny

Przyjmując, zgodnie z [9], że "model fizyczny to znak graficzny plus przyczyna sprawcza" zbudowano model fizyczny samolotu dla potrzeb metody obliczeniowej. Bryłę samolotu zastąpiono jego rzutem na płaszczyznę odpowiednią dla szukanych charakterystyk. Dodatkowo dokonano podziału logicznego powstałej powierzchni tak aby można było uwzględnić różnice położenia kątownego elementów samolotu (np. wychylenie powierzchni sterowych, kąt zaklinowania usterzenia względem płata głównego itp.). Przykładowy podział został pokazany na rys.1.



Rys. 1.

Konfiguracja samolotu jest zdefiniowana przez współrzędne naroży elementów i wzajemne położenia kątowe między elementami podziału logicznego.

Przyjęto następujące założenia dotyczące opływu:

- jest spełniony warunek Kutty-Żukowskiego,

- ślad wirowy leży w płaszczyźnie skrzydła,
- wiry swobodne są równoległe do prędkości przepływu niezaburzonego,
- płyn jest nielepki,
- opływ jest bezwirowy (z wyjątkiem śladu wirowego za płatem) i bez oderwania,
- występują słabe fale uderzeniowe,
- zaniedbuje się siły masowe,
- płyn nie przewodzi ciepła,
- zachodzi równowaga termodynamiczna.

3. Model matematyczny

Model matematyczny stanowią następujące równania:

– równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \quad (3.1)$$

– równanie Eulera

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \operatorname{grad})V = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (3.2)$$

– równanie stanu

$$p = p_{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_{\infty}} \right)^{\kappa}. \quad (3.3)$$

Wykorzystujemy dodatkowo warunek bezwirowości:

$$\operatorname{rot} V = 0, \quad (3.4)$$

skąd wynika, że istnieje funkcja skalarna, zwana potencjałem prędkości taka, że:

$$\operatorname{grad} \phi(x, y, z, t) = V. \quad (3.5)$$

Po uwzględnieniu założeń poczynionych przy modelowaniu fizycznym [10] otrzymano:

$$\frac{1}{a_{\infty}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi = \nabla^2 \phi. \quad (3.6)$$

Przyjmując dodatkowo, że przepływ jest ustalony, tzn:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0, \quad (3.7)$$

oraz fakt, iż mamy do czynienia z przepływem naddźwiękowym otrzymano równanie:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.8)$$

Równanie to stanowi już wygodny model matematyczny opływu naddźwiękowego na potrzeby prezentowanej metody. Po zdefiniowaniu warunków brzegowych:

– na powierzchni nośnej

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -V_{\infty} \sin \alpha,$$

– na krawędzi splywu

$$\Delta p(x, y)_{TE} = 0,$$

– w śladzie wirowym

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0,$$

– poza powierzchnią i śladem wirowym

$$\varphi(x, y) = 0,$$

można znaleźć rozwiązanie równania (3.8). Rozwiązanie to przybiera postać:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{\Pi} \iint_{S(x, y, z)} \frac{w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R}, \quad (3.9)$$

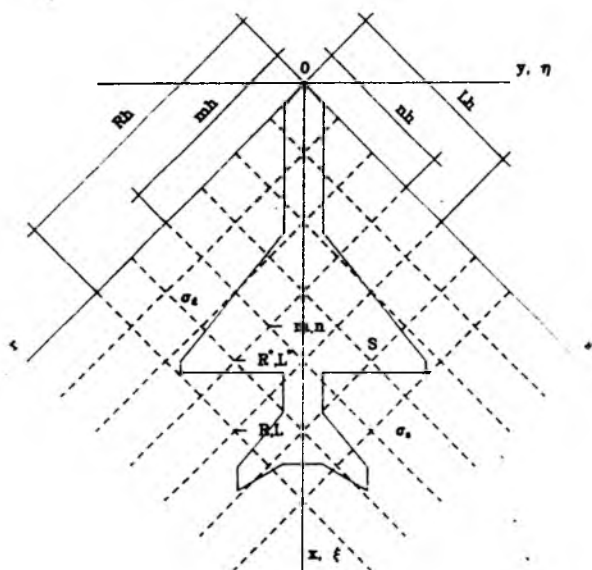
gdzie:

$$w = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2[(y - \eta)^2 + z^2]}.$$

4. Metoda pudełek Macha

Metoda obliczeniowa sprowadza się do wyznaczenia całki (3.9) przy znanym $w(\xi, \eta)$. W tym celu wprowadzono nowy układ współrzędnych związany z tworzącymi stożka Macha (rys.2):

$$r = \frac{x - \beta y}{\beta}, \quad s = \frac{x + \beta y}{\beta}. \quad (4.1)$$



Rys. 2.

Całka (3.9) w nowych współrzędnych przybiera postać:

$$\varphi(r, s) = -\frac{1}{\Pi} \iint_{S(r, s)} \frac{w(\xi^*, \eta^*) d\xi^* d\eta^*}{R^*}, \quad (4.2)$$

gdzie:

$$R^* = \sqrt{(r - r^*)(s - s^*)}.$$

Teraz można już dokonać podziału powierzchni całkowania na elementarne kawałki – PUDELKA MACHA prowadząc linie równoległe do tworzących stożka Macha. Obszar, na którym dokonujemy takiego podziału powstaje poprzez ograniczenie tworzącymi stożka Macha (układ $0rs$ na rys.2) oraz tworzącymi odwrotnego stożka Macha poprowadzonymi tak, aby cały opływany obiekt znajdował się "wewnątrz". Po przekształceniach dostosowywujących zagadnienie do takiego podziału [11] i ubezwymiarowaniu, (4.2) przybiera postać:

$$\varphi(Lh, Rh) = -\frac{2h}{\Pi} \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^R w(nh, mh) B(n, m, L, R), \quad (4.3)$$

gdzie:

$$B(n, m, L, R) = \frac{1}{(\sqrt{L - n + 1} + \sqrt{L - n})(\sqrt{R - m + 1} + \sqrt{R - m})}.$$

Niewiadoma pozostaje funkcja $w(nh, mh)$, którą wyznacza się w oparciu o warunki brzegowe. Funkcja ta przybiera następującą postać:

- dla obszaru powierzchni nośnej - oznaczonej S na rys.2:

$$w_s(nh, mh) = -\sin \alpha(x, y), \quad (4.4)$$

- dla obszaru poza powierzchnią nośną i śladem wirowym, oznaczonego δ_d , na lewo od osi OX :

$$w_{dl}(Lh, Rh) = -\sum_{n=1}^{L-1} w(nh, mh)B(n, L), \quad (4.5)$$

na prawo od osi OX :

$$w_{dr}(Lh, Rh) = -\sum_{m=1}^{R-1} w(nh, mh)B(m, R), \quad (4.6)$$

gdzie:

$$B(n, L) = \frac{1}{\sqrt{L-n+1} + \sqrt{L-n}},$$

$$B(m, R) = \frac{1}{\sqrt{R-m+1} + \sqrt{R-m}},$$

- dla śladu wirowego - oznaczonego δ_s :

$$w_s(Lh, Rh) = -\frac{2h}{\Pi} \varphi(L_*h, R_*h) - \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^{R'} w(nh, mh)B(n, m, L, R), \quad (4.7)$$

gdzie (L_*h, R_*h) oznacza element (pudełko) znajdujące się na krawędzi splywu takie, że $L - R = L_* - R_*$, natomiast symbol $\sum \sum'$ oznacza sumę bez elementu (L, R) .

5. Wyznaczanie obciążeń i pochodnych aerodynamicznych

W rozdziale tym pokazano wyznaczanie obciążeń (sił i momentów) aerodynamicznych oraz niektórych pochodnych dla przypadku z rys.1B. Definiujemy następujące siły:

$$P_z = \iint_S \Delta p(x, y) dx dy, \quad (5.1)$$

$$M_y = \iint_S \Delta p(x, y) x dx dy, \quad (5.2)$$

$$M_x = \iint_S \Delta p(x, y) y dx dy. \quad (5.3)$$

Wyrażenie Δp oznacza różnicę ciśnień między górną i dolną powierzchnią skrzydła, czyli $\Delta p = p_l - p_u$. Dla cienkiej powierzchni ciśnienia te mają tę samą wartość bezwzględną, czyli $\Delta p = 2p$. Ciśnienie p możemy wyznaczyć ze wzoru $C_p = (p - p_\infty)/q$. Dla przepływu ustalonego mamy:

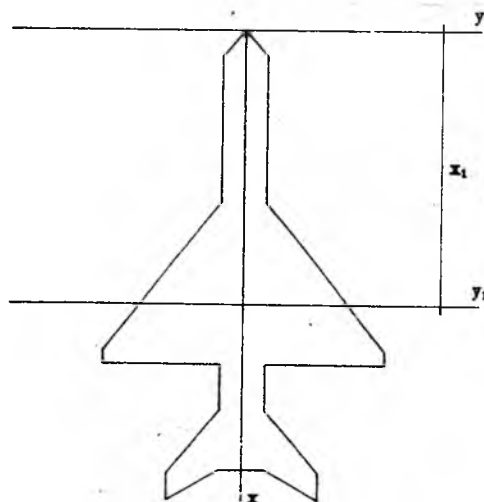
$$C_p = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Obliczając pochodną potencjału z (5.4) otrzymanego metodą pokazaną w rozdz.4 możemy uzyskać rozkład ciśnień, a co za tym idzie obciążenia aerodynamiczne.

Aby otrzymać konkretne pochodne aerodynamiczne wystarczy wyznaczyć rozkład prędkości normalnej na powierzchni nośnej, a więc jak widać z (4.4) lokalny kąt natarcia. Dalej zostanie pokazane wyznaczanie prędkości normalnej dla kilku przykładowych pochodnych aerodynamicznych.

Pochodne $\partial C_z / \partial \alpha$, $\partial C_m / \partial \alpha$:

- w tym przypadku zakłada się, że kąt natarcia (globalny) jest stały $\alpha(x, y) = \text{const}$, a więc $w_s(nh, mh) = -\sin(\alpha + \alpha_{z(i)})$ gdzie: $\alpha_{z(i)}$ - kąt zaklinowania i -tej powierzchni względem powierzchni odniesienia.



Rys. 3.

Pochodne $\partial C_z / \partial Q$, $\partial C_m / \partial Q$:

- w tym przypadku należy zdefiniować położenie osi obrotu (bieguna) y_1

(rys.3), a następnie wyznaczyć rozkład prędkości ze wzoru:

$$w_s(x, y) = (x - x_1)Q/V_\infty.$$

Pochodna $\partial C_l / \partial P$:

– prędkość normalną wyznaczamy w tym przypadku następująco:

$$w_s(x, y) = \frac{P_y}{V_\infty}.$$

Podobnie można wyznaczyć pochodne boczne dokonując obliczeń dla przypadku z rys.1B.

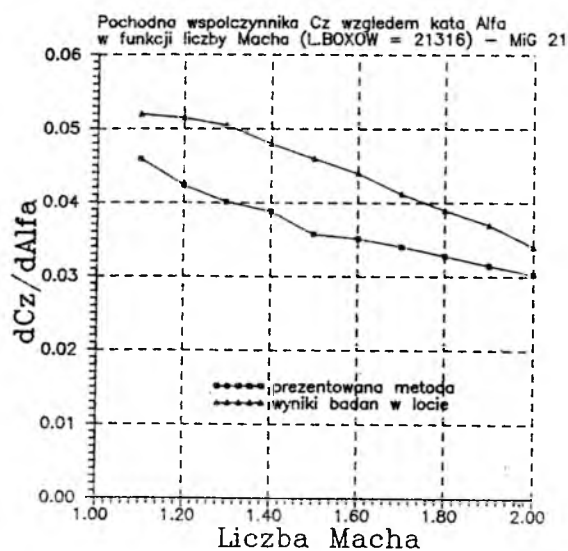
6. Wyniki obliczeń

Wyniki obliczeń numerycznych wykazują dobrą zgodność metody z wynikami eksperymentalnymi. Różnice między wynikami obliczeń a danymi z badań eksperymentalnych nie przekroczyły 20% w najgorszym przypadku, średnia błędu nie przekracza $10 \div 12\%$.

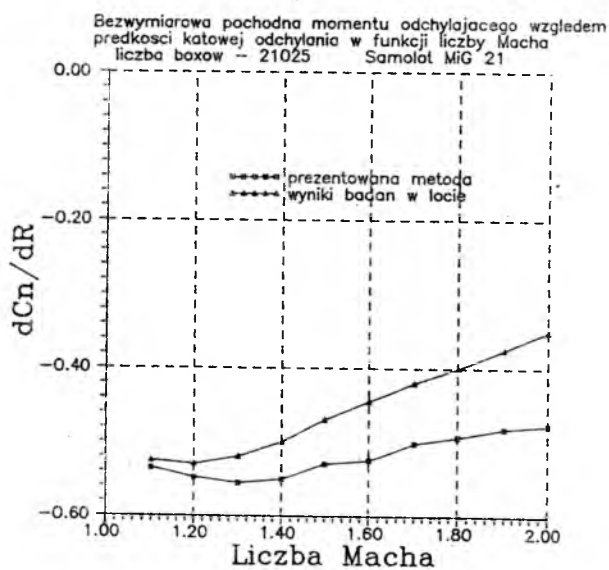
Na rys.4 pokazano pochodną $\partial C_z / \partial \alpha$ (siły nośnej względem kąta natarcia) zaś na rys.5 pochodną $\partial C_n / \partial R$ (momentu odchyłającego względem prędkości kątowej odchyłania) dla samolotu MiG-21 obliczone powyższą metodą oraz dla porównania wyniki badań w locie przeprowadzonych w Instytucie Technicznym Wojsk Lotniczych.

Przeprowadzono również analizę zbieżności metody, wyniki przedstawione są na rys.6 i 7. Pierwszy z nich pokazuje zmianę wartości współczynnika siły nośnej w funkcji ilości elementów (boxów) dla samolotu MiG-21 ($Ma = 2.0$, $\alpha = 5^\circ$), drugi dla płata trójkątnego (Delta) o wydłużeniu $AR = 1$ ($Ma = 1.96$, $\alpha = 10^\circ$). W pierwszym dla prównania pokazano wartość z badań w locie, w drugim wartość z badań tunelowych [12].

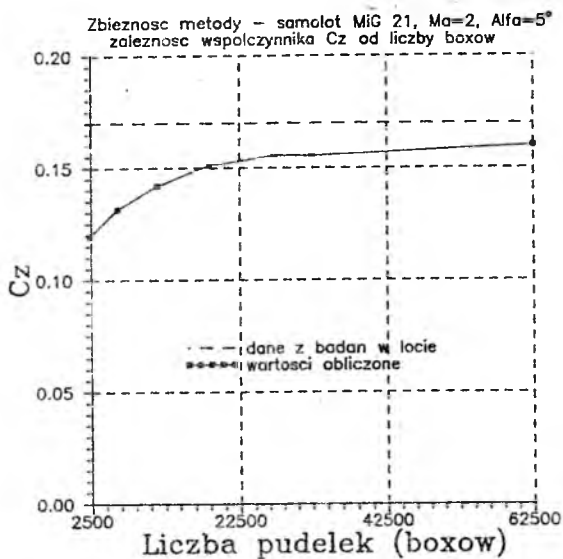
Oprócz konkretnych pochodnych metoda pozwala na wyznaczenie rozkładu ciśnień. Stosując podobną jak w [13] organizację podziału i wyprowadzenia wyników otrzymano przestrzenne rozkłady ciśnień – rys.8 i 9. Pierwszy przedstawia rozkład na samolocie MiG-21 – schemat z rys.1B ($Ma = 2.0$, $\alpha = 5^\circ$), drugi wynik obliczeń dla tego samego samolotu wg schematu z rys.1A – opływ boczny ($Ma = 1.5$, $\beta = 0^\circ$, $\omega_z = 10$ rad/s). Pokazano również rozkład ciśnień w postaci izobar (rys.10) dla przypadku obliczeniowego z rys.8.



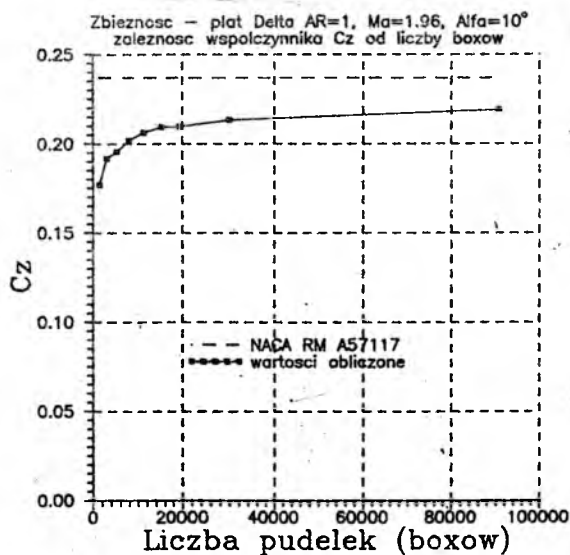
Rys. 4.



Rys. 5.



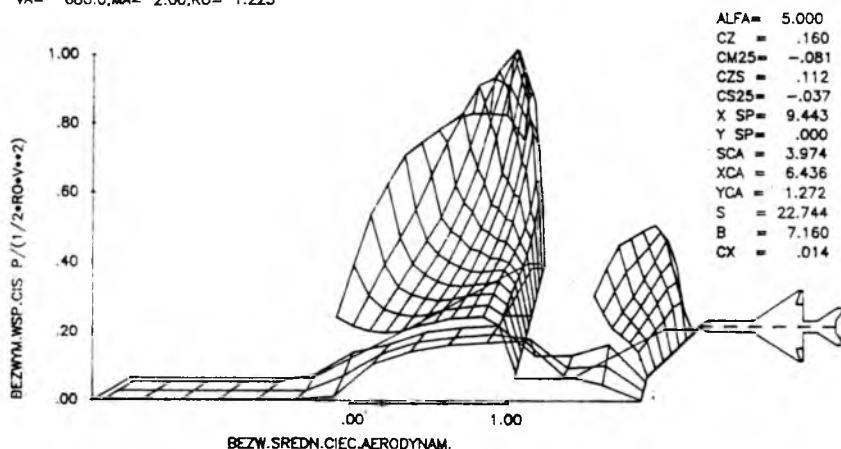
Rys. 6.



Rys. 7.

DATE: 1992.06.15 TIME: 10:49:04

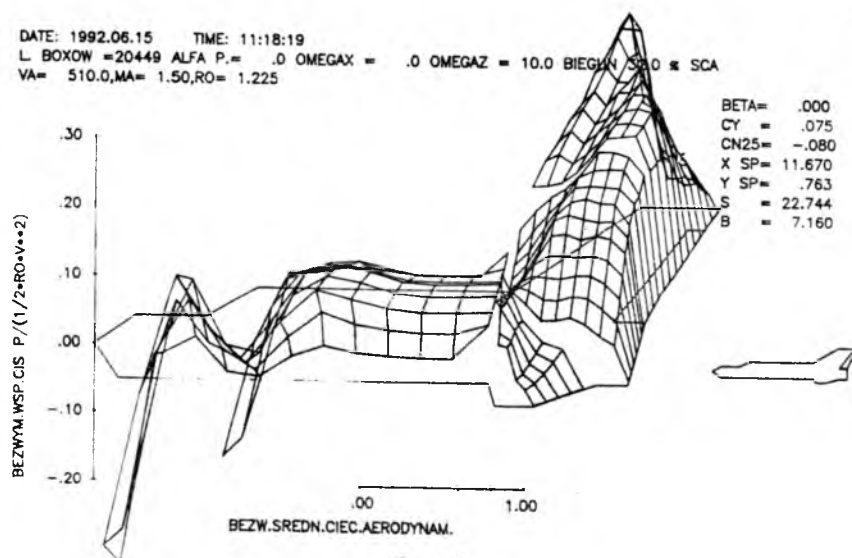
L BOXOW = 62500 ALFA P. = 5.0 OMEGAX = .0 OMEGAY = .0 BIEGUN 32.0 * SCA
VA = 680.0, MA = 2.00, RO = 1.225



Rys. 8.

DATE: 1992.06.15 TIME: 11:18:19

L BOXOW = 20449 ALFA P. = .0 OMEGAX = .0 OMEGAY = 10.0 BIEGUN 32.0 * SCA
VA = 510.0, MA = 1.50, RO = 1.225

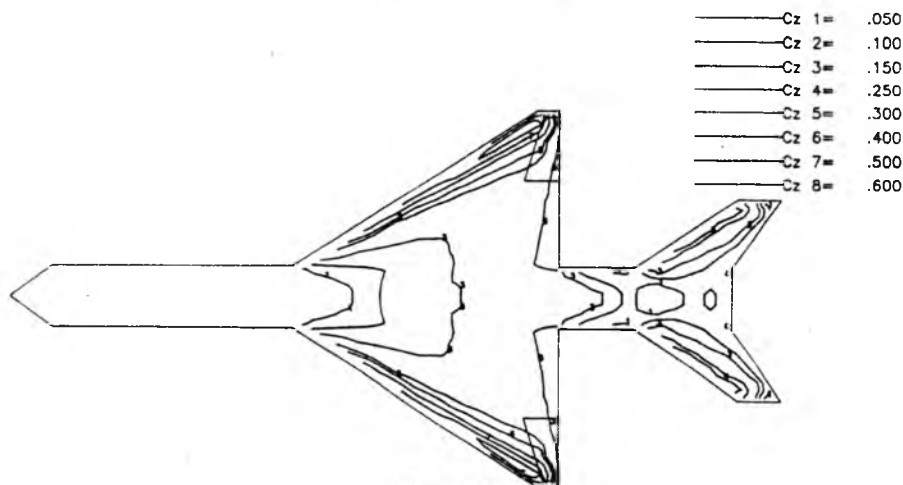


Rys. 9.

DATE: 1991.04.24 TIME: 9:51:26

L. BOXOW = 62500 ALFA P. = 5.0 OMEGAX = .0 OMEGAY = .0 BIEGUN 32.0 * SCA

VA= 680.0, MA= 2.00, RO= 1.225



Rys. 10.

7. Podsumowanie

Opisana metoda mimo dużych ograniczeń narzuconych zarówno na sam opływany obiekt jak i na rodzaj opływu i ośrodka (rozdz.2) wykazuje dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi. Pozwala uzyskać dużą ilość informacji o opływającym obiekcie. Nie wymaga bardzo dużej pamięci maszyn liczących (około $2 \times N$ liczb zmiennie-przecinkowych + kod programu, gdzie N – liczba elementów). Pewną wadą jest stosunkowo duży czas obliczeń – proporcjonalny do trzeciej potęgi liczby elementów. Bilans wad i zalet przemawia jednak za celowością stosowania powyższej metody i dalszego jej rozwoju.

Literatura

1. HESS J.L., 1985, *Review of the Historical Development of Surface Source Methods*, McDonnell Douglas Corporation, Douglas Aircraft Company, Long Beach, California, U.S.A., w "Computational Methods in Potential Aerodynamics" (Editor: L.Morino), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg
2. YATES JR. E.C., 1985, *Unsteady Transonic Flows – Introduction, Current Trends, Applications*, NASA Langley Research Center Hampton, Virginia, U.S.A., w "Com-

- putational Methods in Potential Aerodynamics" (Editor: L.Morino), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg
3. GOETZENDORF-GRABOWSKI T., PIETRUCHA J., 1990, *Przybliżone wyznaczanie charakterystyk aerodynamicznych skrzydeł o obrysie trapezowym w zakresie nadźwiękowym*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 28, 3-4, PWN Warszawa
 4. GIESING J.P., 1985, *Basic Principles and Double Lattice Applications in Potential Aerodynamics*, McDonnell Douglas Corporation, Douglas Aircraft Company, Long Beach, California, U.S.A., w "Computational Methods in Potential Aerodynamics" (Editor: L.Morino), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg
 5. POGREBNAJA T.V., SAMSONOV V.V., 1984, *Rasčet sverchzvukovogo obtekanija prostranstvennoj konfiguracii s ispol'zovaniem integralnych sootnošenij*, Učenyje Zapiski CAGI, XV, 5
 6. STARK V.J.E., *The Aeryl flutter prediction system*, Saab Scania AB, Linköping, Sweden, ICAS-90-1.2.3
 7. YATES JR. E.C., 1985, *Unsteady Subsonic and Supersonic Flows - Historical Review, State of the Art*, NASA Langley Research Center Hampton, Virginia, U.S.A., w "Computational Methods in Potential Aerodynamics" (Editor: L.Morino), Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg
 8. GOETZENDORF-GRABOWSKI T., PIETRUCHA J., 1990, *Modelowanie przepływu nadźwiękowego na potrzeby obliczeń podstawowych charakterystyk aerodynamicznych samolotu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Mechanika z.99, Sympozjon "Modelowanie w Mechanice", Beskid Śląski
 9. ARCZEWSKI K., GORAJ Z., PIETRUCHA J., 1983, *Elementy modelowania w mechanice*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1983
 10. KRASILŠCIKOVA E.A., 1986, *Tonkoe krylo v szimaemom potoke*, Moskva, Nauka
 11. BELOCERKOVSKIJ S.M., KUDRACEVA N.A., POPYTALOV S.A., TABACNIKOV B.G., 1983, *Issledovanie sverchzvukovoj aerodinamiki samoletov na EVM*, Moskva, Nauka
 12. HILL JR. W.A., 1957, *Experimental Lift of Low-Aspect-Ratio Triangular Wings at Large Angles of Attack and Supersonic Speeds*, NACA RM A57117
 13. GORAJ Z., MOLICKI W., PATURSKI Z., 1988, *Modelowanie rozkładu ciśnień na powierzchniach nośnych przy wykorzystaniu metody superpanelowej*, Materiały XXVII Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice", Beskid Śląski, str.177-184

ANALIZA METOD STEROWANIA KIERUNKOWEGO ŚMIGŁOWCÓW JEDNOWIRNIKOWYCH¹

WIESŁAW ŁUCJANEK

Politechnika Warszawska

KAZIMIERZ SZUMAŃSKI

Instytut Lotnictwa

Istotnym problemem konstrukcyjnym w śmigłowcach z jednym wirnikiem nośnym napędzanym mechanicznie silnikiem umieszczonym w kadłubie jest równoważenie momentu oporowego wirnika. W rozwiązaniach klasycznych równowagę momentów odchylających zapewnia śmigło ogonowe, które jest też wykorzystywane do sterowania kierunkowego. Układ taki jest jednak daleki od doskonałości, nic więc dziwnego, że opracowywane są projekty zastąpienia śmigła ogonowego innymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi. Ich liczbę ocenia się na kilkaset, z czego co najmniej kilkadziesiąt zostało opatentowanych. Tylko dwie firmy śmigłowcowe: Sikorsky i Lockheed zbadaly na zlecenie Armii Amerykańskiej w latach sześćdziesiątych po kilkadziesiąt rozmaitych pomysłów. Ostatecznie do seryjnej produkcji weszły: *fenestron*, *fantail* i *NOTAR*.

Celem pracy jest przedstawienie i krytyczna ocena najpopularniejszych metod równoważenia momentu oporowego wirnika nośnego i sterowania kierunkowego śmigłowca oraz prezentacja wstępnych wyników symulacji cyfrowej porównania dwóch wersji lekkiego śmigłowca: ze śmigłem ogonowym i w układzie *NOTAR*.

1. Charakterystyka śmigła ogonowego

Głównym elementem konstrukcyjnym wiroplatu jest wirnik nośny. Ma on wiele zadań: wytwarza siłę nośną, siłę napędową umożliwiającą lot poziomy oraz siły do sterowania. Na ogół spełnia te role dobrze poza jedną – nie umożliwia sterowania obrotem wiroplatu dookoła osi równoległej do osi wału napędowego wirnika, a jeżeli jest napędzany mechanicznie silnikiem umieszczonym wewnątrz kadłuba wiroplatu, dodatkowo wprowadza moment oporowy, zakłócając równowagę momentów odchylających.

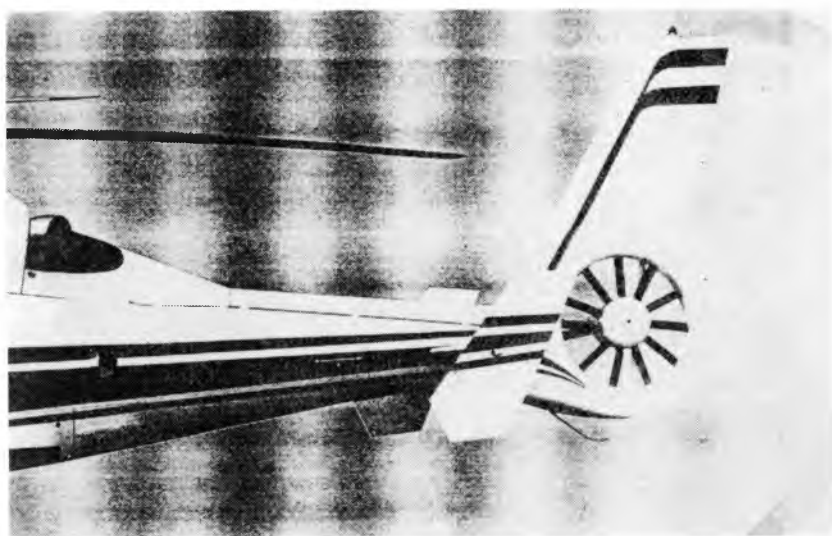
Zapewnienie równowagi momentów odchylających i sterowanie kierunkowe wiroplatu wymaga tego samego rodzaju sił, jest więc realizowane przy pomocy tego

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

samego urządzenia, którym w klasycznych rozwiązaniach konstrukcyjnych jest śmigło ogonowe. Jest ono prawdopodobnie najefektywniejszym układem z punktu widzenia aerodynamiki, zapewnia też dobrą kierunkową stępczość i sterowność oraz dobre własności dynamiczne przy dużych prędkościach lotu wiroplatu, ale ma, niestety, szereg poważnych wad.

Statystyki nieszczęśliwych wypadków ze śmigłowcami na ziemi podają, że co najmniej 75% powstaje przy obsłudze śmigła ogonowego. Ponadto wzbudza ono niepożądane drgania i jest hałaśliwe, oraz ma skomplikowaną i ciężką budowę, zarówno samo, jak i układ jego napędu oraz sterowania. Łatwo jest je uszkodzić na Ziemi i w powietrzu, np. odstrzelić.

Nic więc dziwnego, że w czasie ponad 50-letniej historii wiroplatów zgłoszono, tylko w Stanach Zjednoczonych, kilkaset pomysłów, czasami wskazujących na bujną wyobraźnię autorów, zastąpienia śmigła ogonowego innym urządzeniem. Kilkadziesiąt z nich zostało opatentowanych.



Rys. 1. *Fenestron* w ogniu śmigłowca francuskiego *Dauphin 2*

Ze względu na łatwość odstrzelenia śmigła ogonowego, co dotkliwie odczuło lotnictwo USA w wojnie wietnamskiej, na zlecenie Armii Amerykańskiej tylko dwie firmy śmigłowcowe: Lockheed i Sikorski, zbadały w latach sześćdziesiątych kilkadziesiąt projektów. Wszystkie zostały zanalizowane [1] i krytycznie ocenione. W rezultacie tych badań wzięto pod uwagę trzy koncepcje: śmigło w stateczniku pionowym (*fenestron*, rys.1) oraz sterowanie cyrkulacją dookoła belki ogonowej (efekt Coandy) i wydmuch boczny na końcu belki ogonowej. Oceny tych koncepcji

są pokazane w tabeli.

Tablica 1. Porównanie własności obecnie stosowanych urządzeń zastępujących śmigło ogonowe. Skala ocen: 1 – nieakceptowalny, 2 – zły, 3 – dostateczny, 4 – dobry, 5 – bardzo dobry.

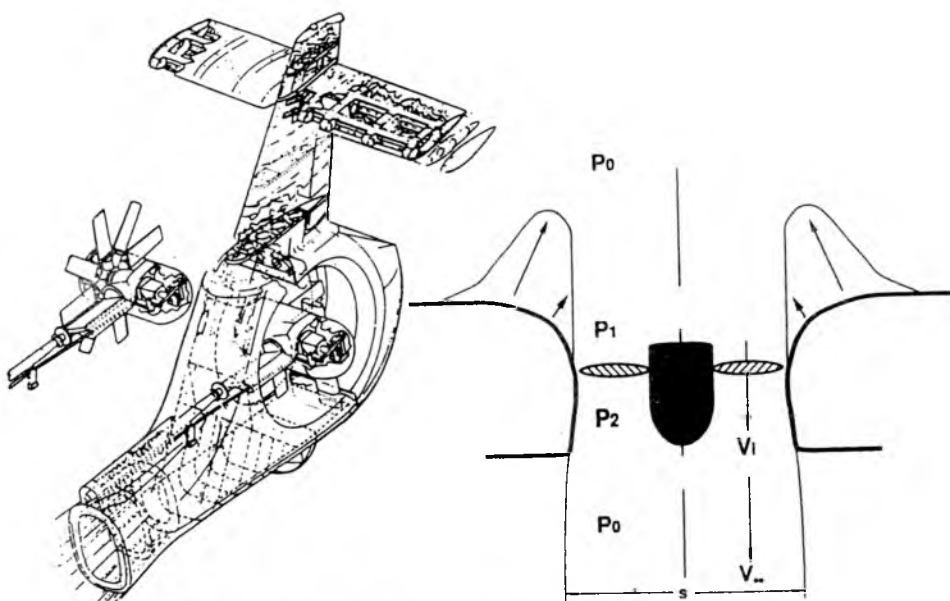
Urządzenie		Typowe śmigło ogonowe	Śmigło w stat. pion.	Ster. cyrk. wokół kadłuba	Wydmuch boczny w ognie
Własność					
Własn.dyn. duż.prędk.		4	4 ÷ 5	4	3 ÷ 4
Uszk.	Balist.	3	4	3	3 ÷ 4
	Ziemia	2 ÷ 3	4	4	4
Niezawodn.		3	4	4	3 ÷ 4
Obsługa		3	4	3	3
Bezp.pers.		2 ÷ 3	4	3 ÷ 4	4 ÷ 5
Wykrywaln.		3	4	4	5
Erozja		2	3	3	4
Ciężar	Paliwo	4	4	2	4
	Konstr.	4	4	1 ÷ 2	2 ÷ 3
	Ogółem	4	4	1 ÷ 2	2 ÷ 3
Stat.Ster.		4 ÷ 5	4 ÷ 5	2 ÷ 3	2
Uwagi		Konstrukcja podstawowa	Probl.wlotu duż.prędk.	Zła sterown. w autorotacji. Konieczny statecznik pion.	

2. Obecnie stosowane urządzenia zastępujące śmigło ogonowe

Jak wynika z pokazanych w tabeli ocen, śmigło w stateczniku pionowym pod wieloma względami przewyższa klasyczne (swobodne) śmigło ogonowe, znalazło więc praktyczne zastosowanie, zwłaszcza w śmigłowcach francuskich.

Wprowadzenie obudowy śmigła ogonowego nasunęło pomysł wykorzystania jej zalet znanych z lotniczych śmigieł obudowanych stosowanych do napędu samolotów, a zwłaszcza możliwości uzyskania podciśnienia na wlocie (rys.2) umożliwiającego powiększenie ciągu śmigła, szczególnie w zawisie i przy małych prędkościach lotu. Należało w tym celu pogrubić kadłub w tylnej części, aby długość obudowy była porównywalna z promieniem śmigła. Takie urządzenie, znane pod angielską nazwą *fantail*, jest przewidziane do zastosowania, między innymi, w nowoprojektowanym przez firmy Boeing i Sikorski amerykańskim śmigłowcu bojowym *RAH-66 Comanche*, którego makietą jest pokazana na rys.3.

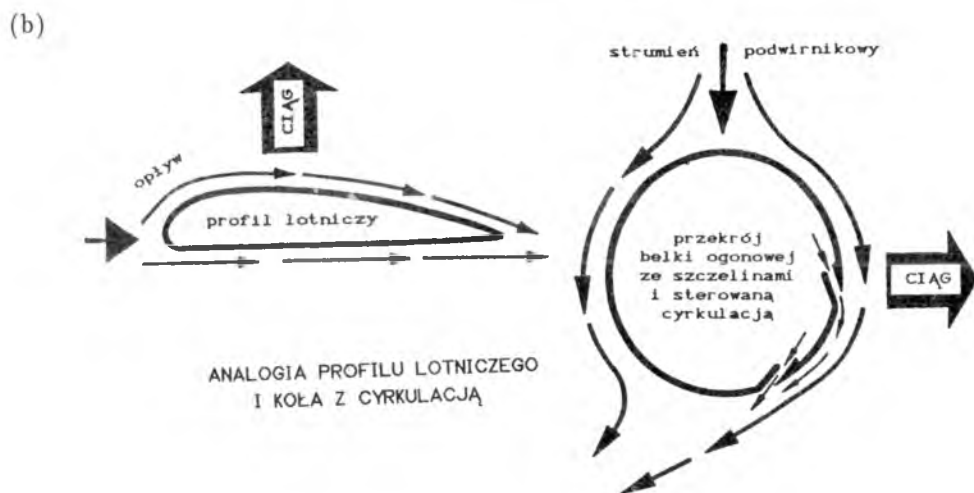
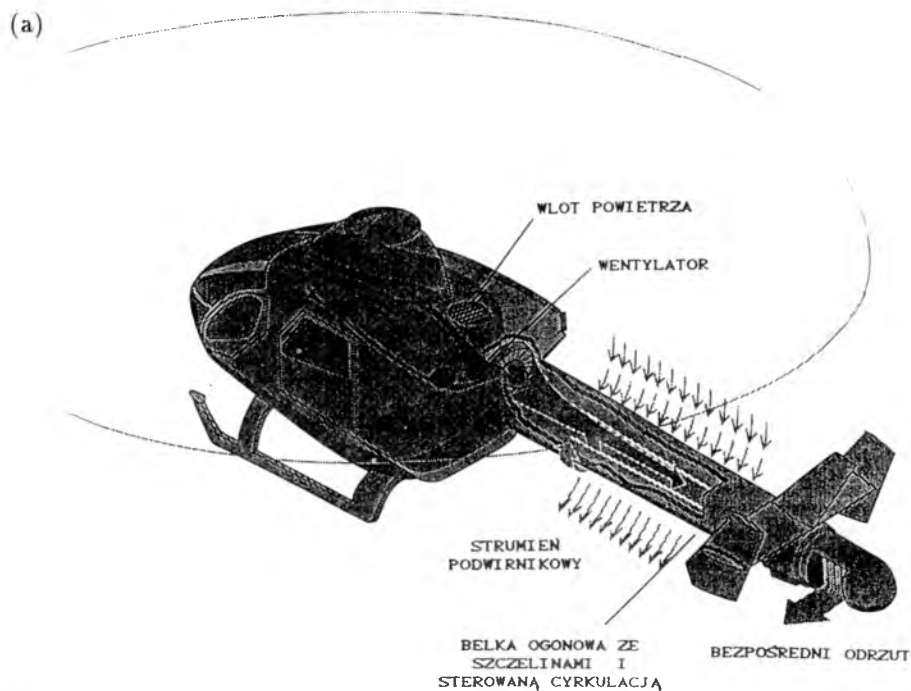
Wspólną cechą dwóch ostatnich projektów pokazanych w tabeli jest konieczność dysponowania na pokładzie wiroplatu sprężonym powietrzem, co nasunęło



Rys. 2. Koncepcja konstrukcji i zasada działania układu *fantail*



Rys. 3.



Rys. 4. Śmigłowiec w układzie NOTAR; (a) – wytwarzanie i rozgałęzienie strumienia w belce ogonowej, (b) – zasada wytwarzania siły bocznej na belce ogonowej

pomysł wykorzystania ich łącznie. Odpowiedni układ, zastrzeżony pod nazwą *NOTAR* (NO Tail Rotor) został zastosowany w praktyce przez firmę McDonnell Douglas w lekkim śmigłowcu *MD 520N*. Zasada działania jest pokazana na rys.4.

Powietrze zasysane za kabiną (rys.4a) jest sprężane przez napędzany z przekładni głównej wentylator i tłoczone do wnętrza belki ogonowej. Tam następuje podział na dwa strumienie: jeden jest kierowany na zewnątrz belki przez dwie szczeliny wzdłuż belki (rys.4b), a drugi jest kierowany do końca belki, gdzie zmienia kierunek i wytwarza ciąg boczny na zasadzie bezpośredniego odrzutu. Belka jest opływana przez strumień podwirnikowy, a wobec wymuszenia cyrkulacji dokoła belki przez wypływ ze szczeliny, na belce powstaje siła boczna, która wraz z ciągiem na końcu belki umożliwia równowagę momentów odchylających oraz sterowanie kierunkowe. Wielkość sił sterujących zależy od położenia pedalów, które są połączone z mechanizmem zmiany skoku łopatek wentylatora (sterowanie wydatkiem powietrza) oraz z przesłoną dławiącą wypływ na końcu belki, a także z ruchomymi statecznikami (sterami) kierunku, odgrywającymi istotną rolę zwłaszcza przy locie poziomym z większą prędkością.

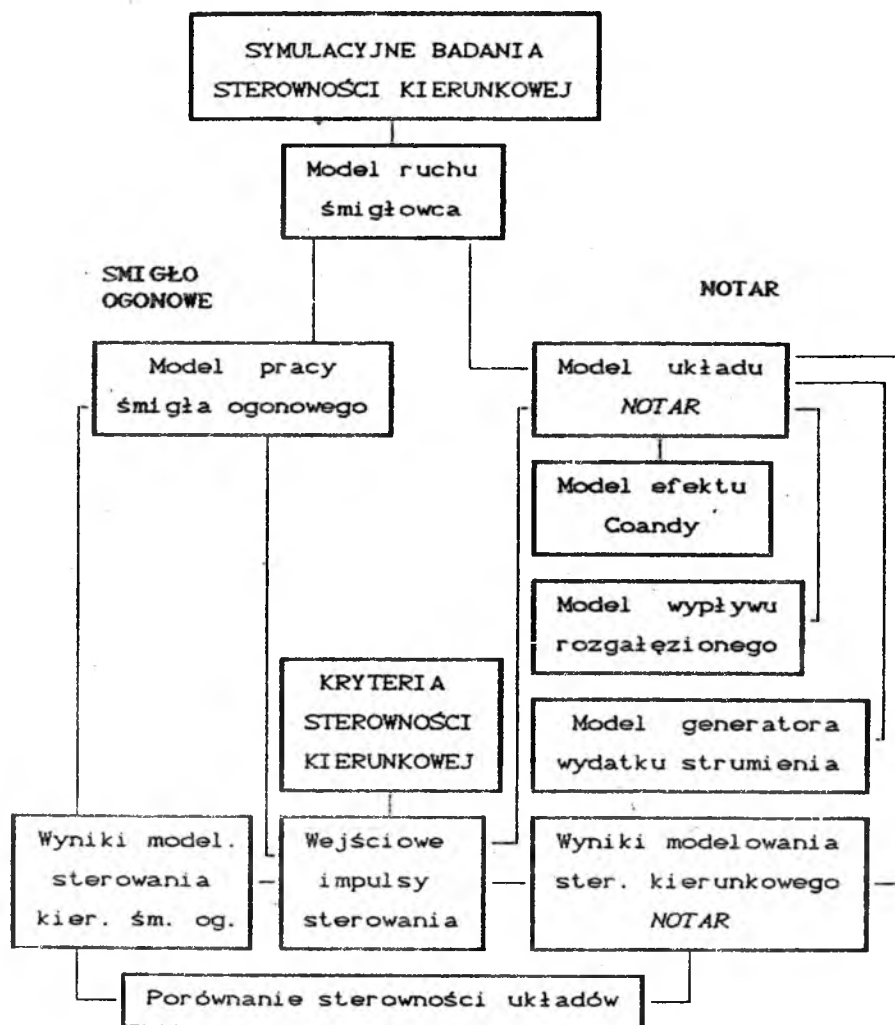
3. Symulacja komputerowa systemu *NOTAR* i układu ze śmigłem ogonowym

W dalszej części pracy jest opisana próba porównania na drodze symulacji cyfrowej układu *NOTAR* z układem klasycznym (ze śmigłem ogonowym). Analizę oparto na danych projektowanego w PZL-Świdnik lekkiego śmigłowca SW-4. Porównano moce niezbędne do lotu poziomego, osiągi i manewry odchylania. Schemat badań symulacyjnych jest przedstawiony na rys.5.

Założono, że śmigłowiec znajduje się w zawisie lub w locie skośnym, bez wpływu Ziemi i wiatru. Śmigłowiec może się obracać o kąt ψ dokoła osi z , równoległej do lub pokrywającej się z osią wału napędowego wirnika nośnego. Obrót śmigłowca jest wywoływany zmianą ciągu śmigła ogonowego i może być opisany równaniem:

$$I_z \ddot{\psi} = T_t l - \frac{N}{\Omega} - P_v l_v ,$$

gdzie:



Rys. 5. Schemat badań symulacyjnych dla porównania układu NOTAR i klasycznego

- I_z – moment bezwładności śmigłowca wokół osi z ,
- T_t – ciąg śmigła ogonowego,
- N – moc niezbędna,
- Ω – prędkość kątowna wału napędowego wirnika nośnego,
- l – odległość osi wirnika nośnego od osi śmigła ogonowego,
- P_v – boczna siła aerodynamiczna statecznika pionowego,
- l_v – odległość środka parcia statecznika pionowego od osi obrotu wirnika nośnego; przyjęto $l_v = 1$.

Ciąg śmigła ogonowego wyznaczono korzystając z programu komputerowego zweryfikowanego próbami w locie śmigłowca Mi-2 [5].

4. Model układu NOTAR

4.1. Model generatora strumienia (wentylatora)

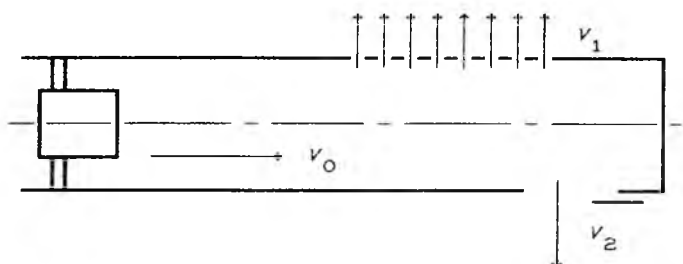
Założono, że w układzie *NOTAR* wydatek wentylatora jest zawsze dodatni. Do oszacowania strat na moc profilową i indukowaną posłużono się procedurą obliczeniową jak dla modelu śmigła ogonowego, zakładając straty na wlocie i zmniejszenie mocy indukowanej w wyniku oddziaływania obudowy.

4.2. Model sprzężeń kinematycznych w układzie sterowania kierunkowego

Pedały sterują kątem wychylenia statecznika pionowego, a także skokiem łopatek wentylatora oraz wartością przekroju wylotu na końcu belki ogonowej. Funkcje sterowania zależą od konkretnego rozwiązania kinematycznego układu sterowania. W pracy przyjęto zależności liniowe względem kąta ustawienia łopatek wentylatora.

4.3. Model wpływu rozgałęzionego

Wydatek V_0 strumienia wytwarzanego przez wentylator jest rozdzielany na wpływ ze szczeliny V_1 i z końca belki ogonowej V_2 , wg schematu podanego na rys.6. Ocenę rozkładu wydatków można przyjąć wg ogólnych zasad jak dla przepływów rozgałęzionych, z tym że straty kształtu i na długości, ze względu na małą smukłość przewodu i nietypowy kształt układu, należy określić eksperymentalnie. Przyjęto szacunkowe wartości współczynników strat sugerowane w pracy [6].



Rys. 6. Rozgałęziony wypływ w belce ogonowej NOTARa

4.4. Model efektu Coandy

W celu wyznaczenia wielkości momentu sterowania wywołanego opływem belki ogonowej strumieniem podwirnikowym przy wypływie ze szczelin strumienia o prędkości v_1 i przy uwzględnieniu odchylenia belki z prędkością ψ , oparto się na wynikach pracy [7].

4.5. Model sterowania kierunkowego

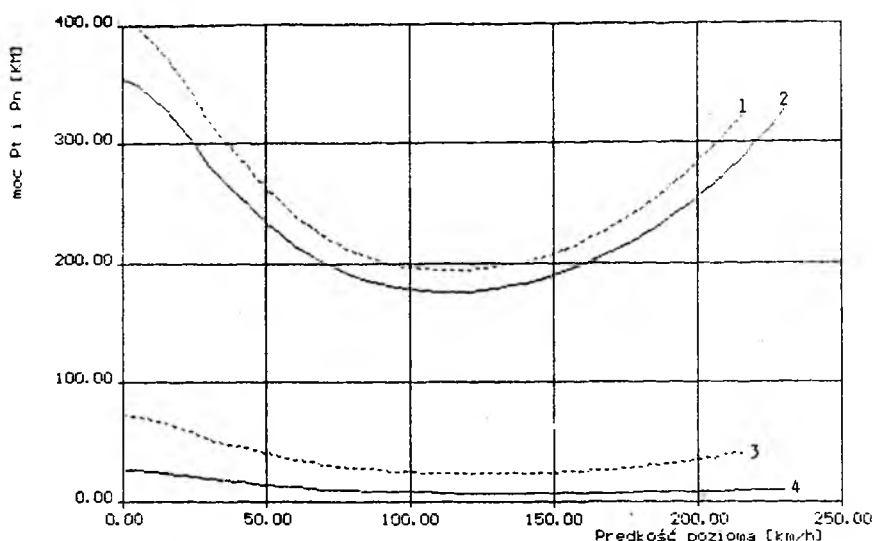
Sterowanie kierunkowe układu NOTAR jest typu jednostronnego. Dla przyjętego kierunku obrotów wirnika nośnego w prawo (zgodnie z ruchem wskazówek zegara patrząc na śmigłowiec z góry) aktywne sterowanie kierunkowe wywołuje również obrót śmigłowca w prawo. Obrót w lewo jest realizowany biernie (pasywnie) w wyniku działania momentu reakcyjnego wirnika nośnego.

5. Przykład obliczeniowy

Analizie obliczeniowej poddano bilans energetyczny oraz osiągi i sterowność śmigłowca. Do obliczeń porównawczych przyjęto dane śmigłowca o masie 1500 kg wyposażonego w klasyczne śmigło ogonowe i układ NOTARa z dwukrotnie większą niż w układzie klasycznym powierzchnią statecznika pionowego.

5.1. Wpływ układu na moc niezbędną i osiągi śmigłowca

Na rys.7 zilustrowano wpływ układu na pobór mocy. Układ NOTAR jest bardziej energochłonny. Przyczyna tkwi w małej sprawności sterowania bezpośrednim



Rys. 7. Wpływ wersji śmigłowca na moc niezbędną P_n do lotu poziomego i na moc P_t potrzebną do sterowania kierunkowego; 1 – P_n układu NOTAR, 2 – P_n układu klasycznego, 3 – P_t układu NOTAR, 4 – P_t układu klasycznego

odrzutem na końcu belki ogonowej oraz w stratach przepływu. Efekt Coandy nie jest w stanie skompensować poboru mocy tak, aby dorównać energetycznie układowi konwencjonalnemu.

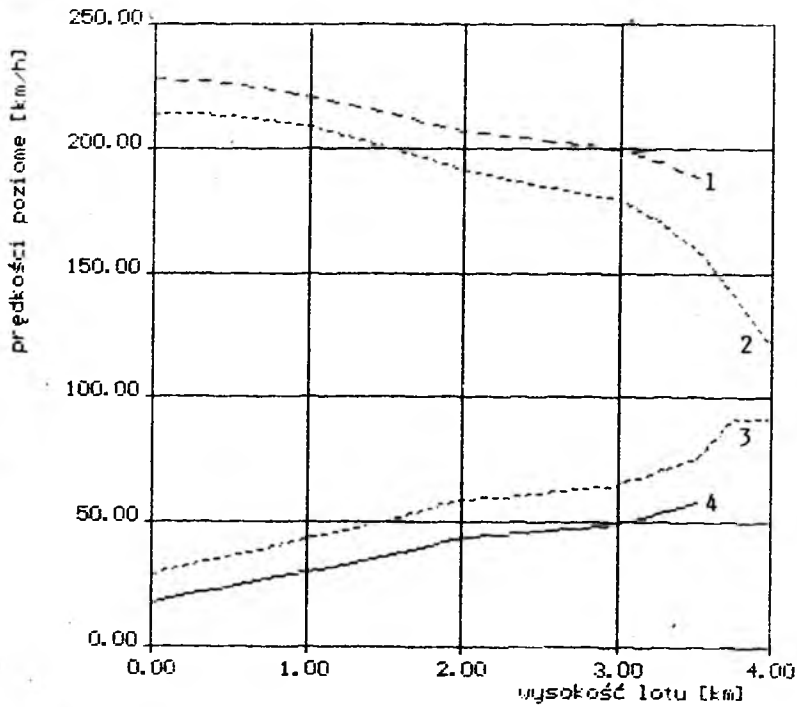
Zmiany osiągowo oceniono uwzględniając wpływ różnic mocy niezbędnych obu układów przy takim samym poziomie mocy rozporządzałnej. Na rysunkach 8 i 9 pokazano wpływ układu na osiągi śmigłowca w locie poziomym i podczas wznoszenia.

5.2. Badania sterowności kierunkowej

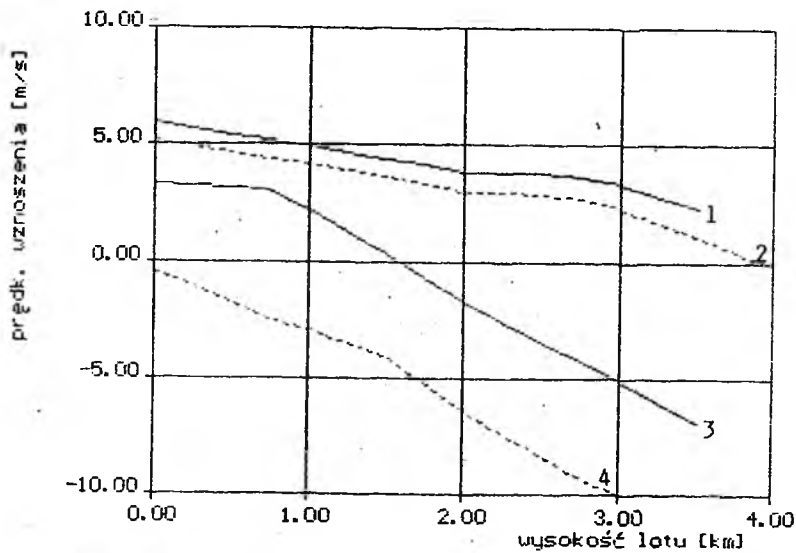
Założono dla wersji klasycznej impuls skokiem ogólnym śmigła ogonowego w prawo i w lewo o wielkość $\pm 6^\circ$. Wyniki symulacji odchyłania w prawo są pokazane na rys.10. Charakter wykresu obrazującego odchyłania w lewo jest identyczny; różnica polega na przeciwnych niż przy odchyłaniu w prawo znakach funkcji ψ i jej obu pochodnych względem czasu.

Dla układu NOTAR zawsze można wyznaczyć taki impuls sterowania w prawo aby odpowiedź układu była identyczna jak w układzie klasycznym.

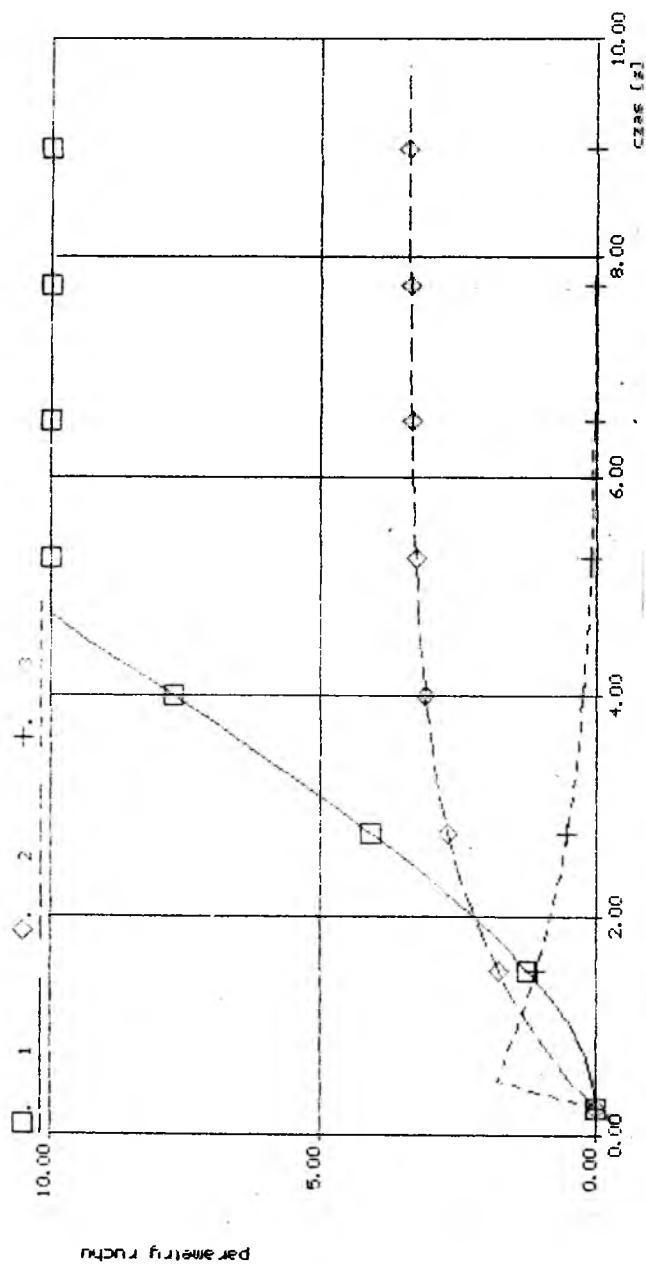
Problemem może być sterowanie układem NOTAR w stronę bierną, czyli wg przyjętej konwencji – w lewo. Istnieją bowiem stany lotu śmigłowca, w których



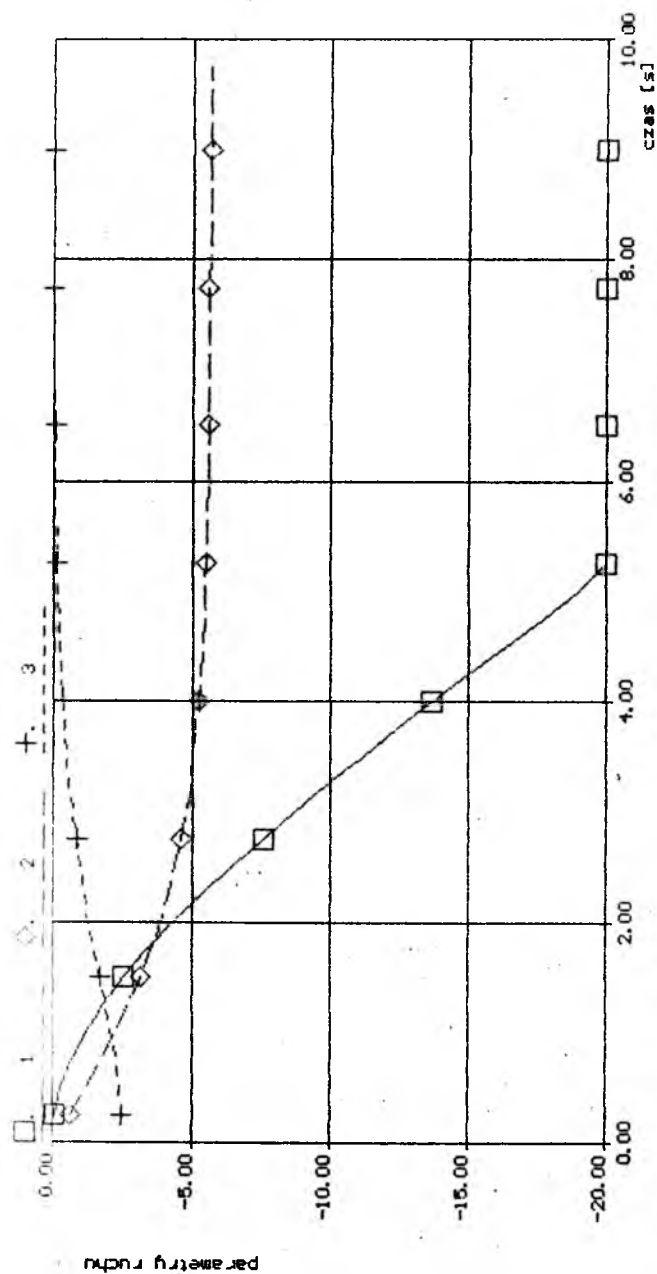
Rys. 8. Porównanie prędkości poziomych obu wersji śmigłowca; moc przelotowa 300 KM;
 1 – prędkość maksymalna układu klasycznego, 2 – prędkość maksymalna układu NOTAR,
 3 – prędkość minimalna układu NOTAR, 4 prędkość minimalna układu klasycznego



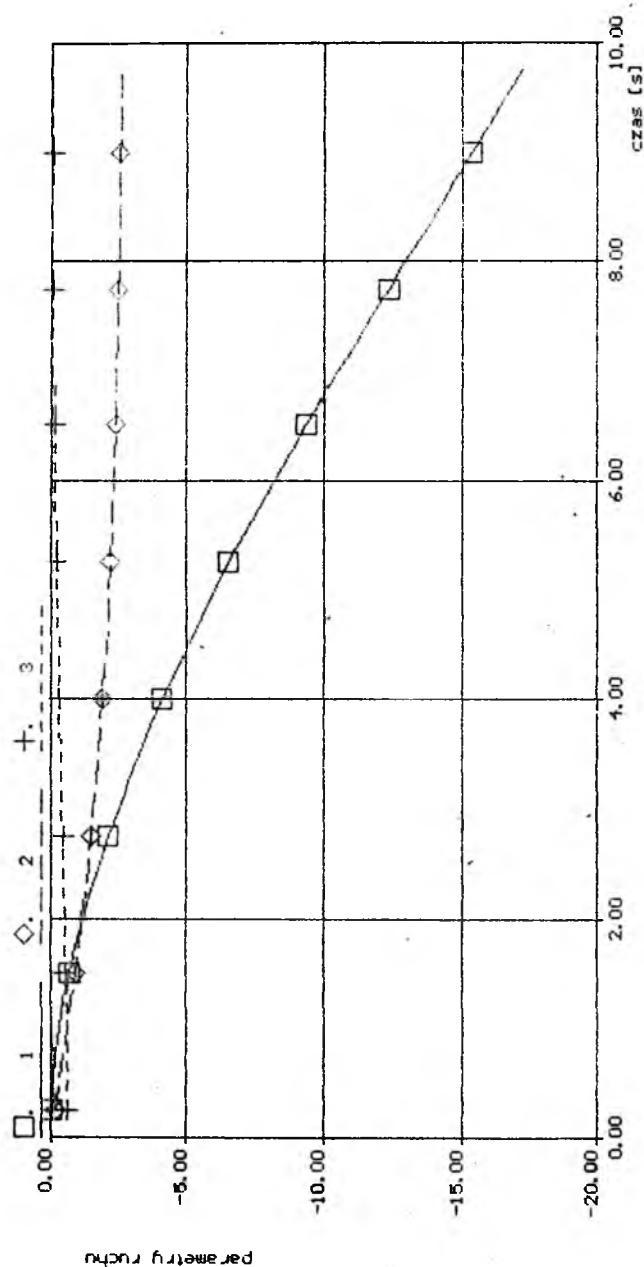
Rys. 9. Porównanie maksymalnych prędkości wznoszenia obu wersji śmigłowca; moc startowa 400 KM; 1 – w locie skośnym układu klasycznego, 2 – w locie skośnym układu NOTAR, 3 – pionowa układu klasycznego, 4 – pionowa układu NOTAR



Rys. 10. Manewr obrotu w prawo śmigłowca w układzie klasycznym; zawis; 1 - ψ [rad],
2 - $\dot{\psi}$ [1/s], 3 - $\ddot{\psi}$ [1/s²]



Rys. 11. Manewr obrotu w lewo śmigłowca w układzie NOTAR; zavis; oznaczenia jak na rys.10



Rys. 12. Manewr obrotu w lewo śmigłowca w układzie NOTAR; opadanie 10 m/s;
oznaczenia jak na rys.10

moment reakcyjny wirnika zmniejsza się pociągając za sobą spadek sterowności kierunkowej w lewo. Ma to miejsce np. podczas opadania śmigłowca przy małej prędkości lotu poziomego. Skrajnym wypadkiem jest strome opadanie autorotacji, kiedy moment wirnika może być bliski zeru, a nawet przyjmować niewielkie wartości ujemne.

Obliczono przypadek biernego manewru dla zawisu i podczas pionowego opadania z prędkością 10 m/s. Wyniki pokazano na rysunkach 11 i 12. W pierwszym wypadku układ *NOTAR* jest nawet czulszy niż klasyczny. Przy podobnej wartości początkowego przyspieszenia odchyłania $\dot{\psi}$ (momentu odchyłającego) prędkość kątowa $\dot{\psi}$ i kąt ψ wzrastają szybciej, co świadczy o mniejszym tłumieniu kierunkowym, trudnym do wyrównania zwiększoną powierzchnią statecznika pionowego. W pionowym locie opadającym (rys.12) nie jest możliwe uzyskanie pożądanego momentu sterowania, co na wykresie manifestuje się mniejszą wartością przyspieszenia odchyłania $\dot{\psi}$ i dlatego również prędkość $\dot{\psi}$ i kąt ψ wzrastają znacznie wolniej.

6. Wnioski

Z porównania układów sterowania kierunkowego: ze śmigłem ogonowym i *NOTAR* z punktu widzenia energetycznego oraz jakości sterowania odchyłaniem wynika, że układ *NOTAR* ustępuje rozwiązaniu klasycznemu – jest bardziej energochłonny, a ponadto istnieją stany lotu, w których, przy obecnie zrealizowanym rozwiązaniu konstrukcyjnym, może wystąpić chwilowe znaczne pogorszenie sterowania kierunkowego w stronę momentu reakcyjnego wirnika. Poza tym, przy małych prędkościach lotu poziomego trudno osiągnąć równorzędny poziom tłumienia odchyłania.

Układ *NOTAR* ma jednak zalety, co wynika z dwóch ostatnich kolumn tabeli. Modele użyte w pracy do symulacji tego układu są stosunkowo proste i nie uwzględniają wszystkich zjawisk, zwłaszcza w niekorzystnych dla niego stanach lotu. Istnieje też możliwość, która w pracy nie była rozpatrywana, zastosowania bezpośredniego odrzutu do wspomagania sterowania biernego.

W celu bardziej wszechstronnej analizy układów: *NOTAR* i ze śmigłem ogonowym, niezbędne jest wykonanie porównawczych badań doświadczalnych.

Literatura

1. RAITCH F., 1975, *Summary of antitorque devices other than tail rotor*, Proceedings of the National Symposium on Helicopter Dynamic Efficiency, American Helicopter Society

2. MOUILLE R., 1970 *The "fenestron", shrouded tail rotor of the SA.341 Gazelle*, Journal of the American Helicopter Society
3. WRIGHT G.P., DRISCOLL J.T., NICKERSON J.D. JR., 1991, *Handling qualities of the H-76 Fantail Demonstrator*, Proceedings of 47th American Helicopter Society Annual Forum
4. *Materiały reklamowe NOTARa*, McDonnell Douglas Helicopter Company
5. SZUMAŃSKI K., 1980, *Metoda oceny sterowności i stateczności śmigłowców*, Sprawozd. IL Nr RL-328
6. BUKOWSKI J., 1971, *Mechanika płynów*, PWN
7. TADGHIGHI H., THOMPSON T.L., 1989, *Circulation control tail boom aerodynamic prediction and validation*, 45th AHS Forum

REZONANS NAZIEMNY ŚMIGŁOWCA JAKO UKŁADU NIELINIOWEGO Z DWOMA RODZAJAMI WYMUSZENIA PARAMETRYCZNEGO¹

KAZIMIERZ SZABELSKI

Politechnika Lubelska

CEZARY KAMIŃSKI

WSK PZL Świdnik

1. Wstęp

Ważną klasę zagadnień mechaniki śmigłowców stanowi rezonans naziemny. Jest to przypadek niestateczności dynamicznej która może wystąpić podczas obrotów wirnika przy postoju lub ruchu śmigłowca na ziemi. Charakteryzuje ją wzajemne sprzężenie drgań kadłuba śmigłowca z wahaniami łopat w płaszczyźnie ich obrotu. W projektowaniu i eksploatacji wyklucza się możliwość występowania takich stanów. Osiąga się to poprzez odpowiedni dobór charakterystyk tłumików wahań łopat względem przegubów pionowych oraz charakterystyk sprężystości i tłumienia podwozia. Zazwyczaj w obliczeniach przyjmuje się liniową ich postać. Niezależnie od tego, nieliniowy model matematyczny rezonansu naziemnego linearyzuje się poprzez założenie małych drgań [1]. Układ równań różniczkowych ruchu takiego rezonansu charakteryzują okresowo zmienne współczynniki. Dla liczby łopat $n \geq 3$ oraz modelu liniowego, układ równań parametrycznych można sprowadzić do równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Pozwala to na znaczne uproszczenie badań stateczności.

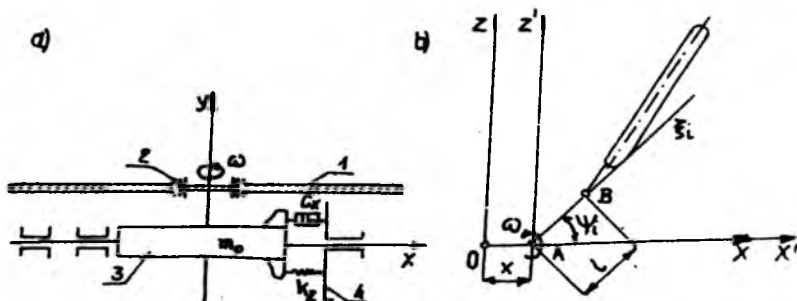
Śmigłowiec jest jednak układem nieliniowym. Takie własności tłumików łopat, amortyzatorów podwozia, pneumatyków, mogą stanowić przykłady nieliniowości konstrukcyjnych i fizycznych.

Ze względów poznawczych i użytkowych interesujący jest wpływ nieliniowości na warunki występowania i stan rezonansu naziemnego. Tego rodzaju badania przedstawiono w [3]. Model przyjęty w niniejszej pracy poza nieliniowością tłumika łopaty charakteryzuje dodatkowe wzbudzenie parametryczne pochodzące od pneumatyka.

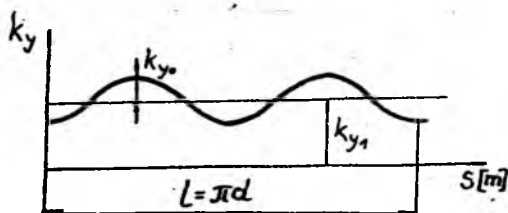
¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy rezonans naziemny śmigłowca przyjmując model fizyczny przedstawiony na rys.1. Załóżmy, że łopaty (1) połączone są z piastą wirnika nośnego za pomocą przegubów pionowych (2). Pomiędzy sztywno połączonym z piastą kadłubem śmigłowca (3) i podłożem (4) znajduje się sprężyna i tłumik. Elementy te charakteryzują liniowe własności sprężyste k_z i tłumiące c_z podwozia.



Rys. 1.



Rys. 2.

Przyjmijmy układ o czterech stopniach swobody w którym wirnik ma trzy łopaty. Współzrzednymi uogólnionymi są trzy kąty wahań łopat $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) oraz współzrzedna $x(t)$ opisująca ruch kadłuba w kierunku poprzecznym t.j. prostopadłym do płaszczyzny wzdłużnej Oyz śmigłowca. Załóżmy, że śmigłowiec porusza się na ziemi ruchem postępowym z prędkością $v = \text{const}$. W odróżnieniu od klasycznych modeli rezonansu naziemnego przyjmujemy, że pneumatyk charakteryzuje zmienna sztywność promieniowa na obwodzie zewnętrznego zarysu opony. Stan taki może wynikać z niejednorodności budowy opony powstałej w procesie technologicznym. Zmianę tej sztywności wokół pewnej wartości średniej aproksymować można funkcją harmoniczną [4] w postaci dwóch fal (rys.2). Zgodnie z [1] sztywność poprzeczna pneumatyka zależy od sztywności promieniowej: $k_x = (0.3 \div 0.9)k_y$. W związku z tym w modelu, przyjmijmy – analogicznie jak w

przypadku sztywności promieniowej – modulację sztywności poprzecznej pneumatyka.

Załóżmy ponadto nieliniową charakterystykę tłumika łopaty. Aproksymujemy charakterystykę odcinkami liniową [1] funkcją analityczną w postaci miękiej charakterystyki trzeciego stopnia. Zakładając, że wirnik obraca się ze stałą prędkością kątową ω , w analizie niestateczności pominiemy siły aerodynamiczne.

Przy powyższych założeniach, układ równań różniczkowych ruchu przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 + \beta_l(1 - \mu\xi_1^2)\dot{\xi}_1 + \nu_0^2\omega^2\xi_1 &= \frac{\nu_0^2}{l}\ddot{x}(0.866\cos\omega t - 0.5\sin\omega t), \\ \ddot{\xi}_2 + \beta_l(1 - \mu\xi_2^2)\dot{\xi}_2 + \nu_0^2\omega^2\xi_2 &= -\frac{\nu_0^2}{l}\ddot{x}(0.866\cos\omega t + 0.5\sin\omega t), \\ \ddot{\xi}_3 + \beta_l(1 - \mu\xi_3^2)\dot{\xi}_3 + \nu_0^2\omega^2\xi_3 &= \frac{\nu_0^2}{l}\ddot{x}\sin\omega t, \\ \ddot{x} + \beta_p\dot{x} + p^2(1 - \varepsilon\cos\omega_1 t)x &= \frac{S}{M}\left[(\ddot{\xi}_1 - \omega^2\xi_1)(0.866\cos\omega t + \right. \\ &\quad \left. - 0.5\sin\omega t) + 2\omega\dot{\xi}_1(0.5\cos\omega t + 0.866\sin\omega t) + \right. \\ &\quad \left. - (\ddot{\xi}_2 - \omega^2\xi_2)(0.866\cos\omega t + 0.5\sin\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + 2\omega\dot{\xi}_2(0.866\sin\omega t - 0.5\cos\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{\xi}_3 - \omega^2\xi_3)\sin\omega t + 2\omega\dot{\xi}_3\cos\omega t\right],\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\nu_0^2 &= \frac{Sl}{J}, & \varepsilon &= \frac{k_0}{k_1}, \\ M &= m_0 + 3m_l, & p^2 &= \frac{k_z}{M}.\end{aligned}$$

W powyższych zależnościach przyjęto oznaczenia:

- β_l, μ – dodatni współczynnik liniowego i nieliniowego tłumienia łopaty,
- S – moment statyczny łopaty,
- J – moment bezwładności łopaty względem przegubu pionowego,
- l – odległość osi przegubu od osi wirnika,
- β_p – współczynnik tłumienia podwozia,
- M – całkowita masa układu,
- m_l – masa łopaty,
- k_0, k_1 – amplituda modulacji i średnia wartość poprzecznej sztywności pneumatyka,

- ε - współczynnik modulacji sztywności,
- k_z - poprzeczna sztywność zastępcza podwozia (konstrukcji metalowej i pneumatyków),
- p - częstość drgań własnych układu zastępczego,
- ω_1 - prędkość kątowna pneumatyka.

3. Analiza numeryczna

Badania stateczności przeprowadzono na drodze numerycznego całkowania równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty. Podstawowe dane liczbowe dotyczą średniej wielkości śmigłowca z trójłopatowym wirnikiem i masie całkowitej około 3500 kg. W rozważaniach uwzględniono cztery warianty parametrów stanowiących o jakościowych własnościach modeli matematycznych:

- 1) $\mu = 0, \varepsilon = 0$,
- 2) $\mu = 0, \varepsilon \neq 0$,
- 3) $\mu \neq 0, \varepsilon = 0$,
- 4) $\mu \neq 0, \varepsilon \neq 0$.

Przyjęto dla nich jednakowe warunki początkowe dotyczące małych wychyleń łopat i kadłuba.

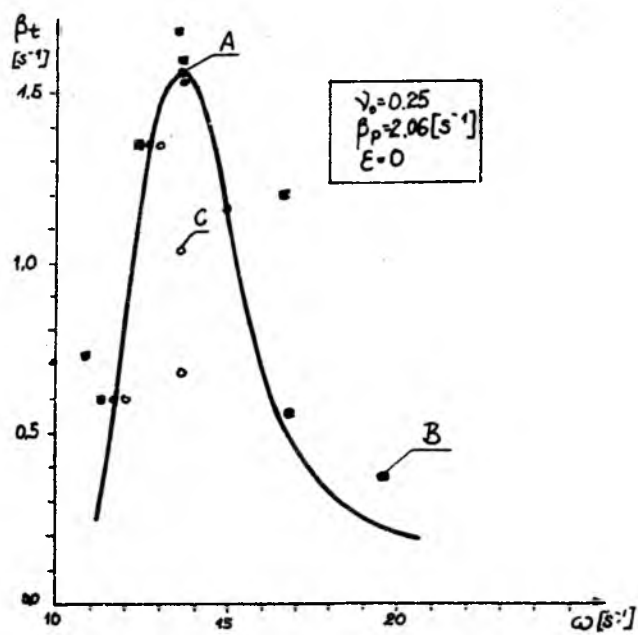
Rys.3 przedstawia wykres współczynnika tłumienia łopaty $\beta_l(\omega)$ stanowiący granicę klasycznego rezonansu naziemnego ($\mu = 0, \varepsilon = 0$), przy ustalonej wartości tłumienia podwozia β_p .

Rys.4 przedstawia analogiczny wykres dla $\mu = 0, \varepsilon = 0.1$. Dotyczy on przypadku ruchu śmigłowca na ziemi, przy prędkości kątowej pneumatyka $\omega_1 = 1.0 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, której odpowiada prędkość śmigłowca $V \approx 0.3 \text{ [m/s]}$.

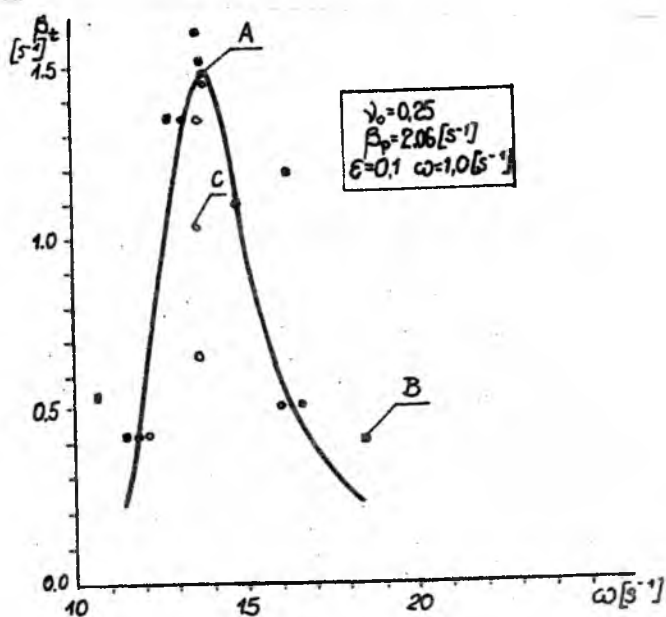
Rys.5 i rys.6 przedstawiają przebiegi czasowe drgań dla dwóch pierwszych wariantów liczbowych. Obejmują one drgania ustalone dla punktów *A* leżących na krzywej $\beta_l(\omega)$, drgania w strefach stateczności (punkty *B*) oraz drgania o rosnących amplitudach dla punktów *C* znajdujących się w obszarach niestateczności. Na wykresach (A) i (B) przebiegów czasowych wartości rzędnych $\xi_i(t)$ i $x(t)$ pomnożone są przez 10^3 .

Na rys.7 zaznaczono punkty znajdujące się pomiędzy krzywymi rezonansu wyznaczonymi dla dwóch pierwszych wariantów danych. Z badań wynika, że obszar niestateczności przy wzbudzeniu parametrycznym ($\varepsilon = 0.1, \omega_1 = 1.0 \text{ [s}^{-1}\text{]}$) jest mniejszy od przypadku braku takiego wzbudzenia ($\varepsilon = 0$).

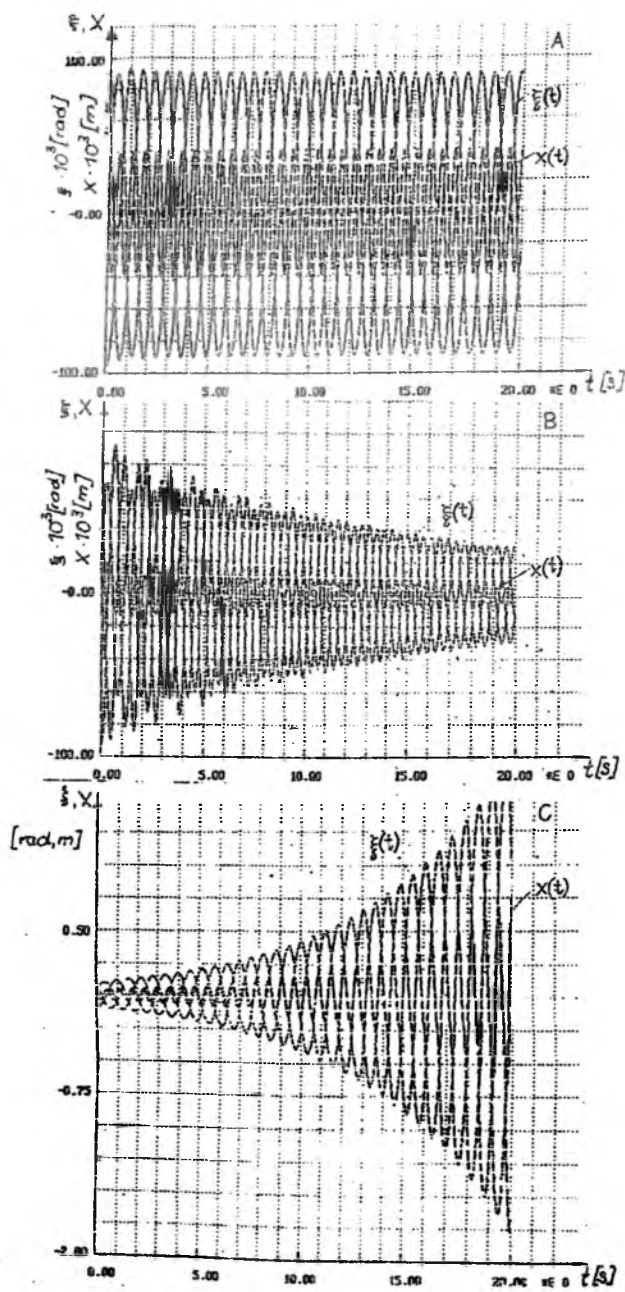
Potwierdzają to przebiegi czasowe na rys.8 i rys.9. Dla trzech punktów, które w zależności od rozpatrywanego wariantu, znajdują się w obszarze rezonansu ($\varepsilon = 0$) lub poza nim ($\varepsilon = 0.1$), przebiegi czasowe charakteryzuje odpowiednio stan stateczności lub niestateczności dynamicznej.



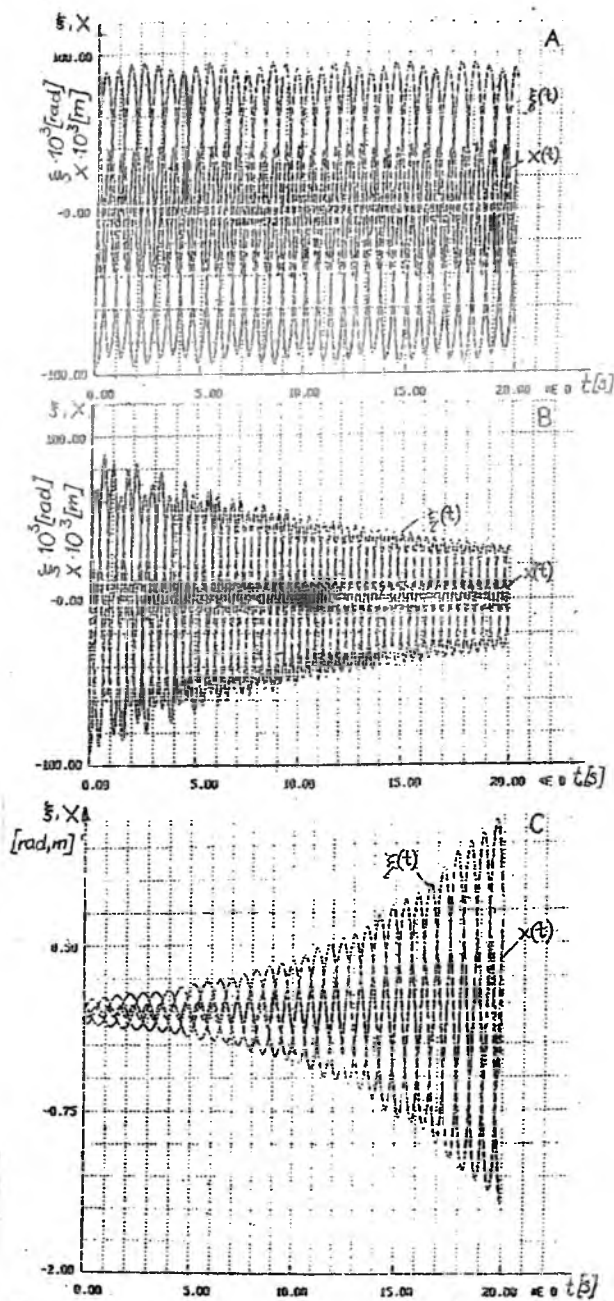
Rys. 3.



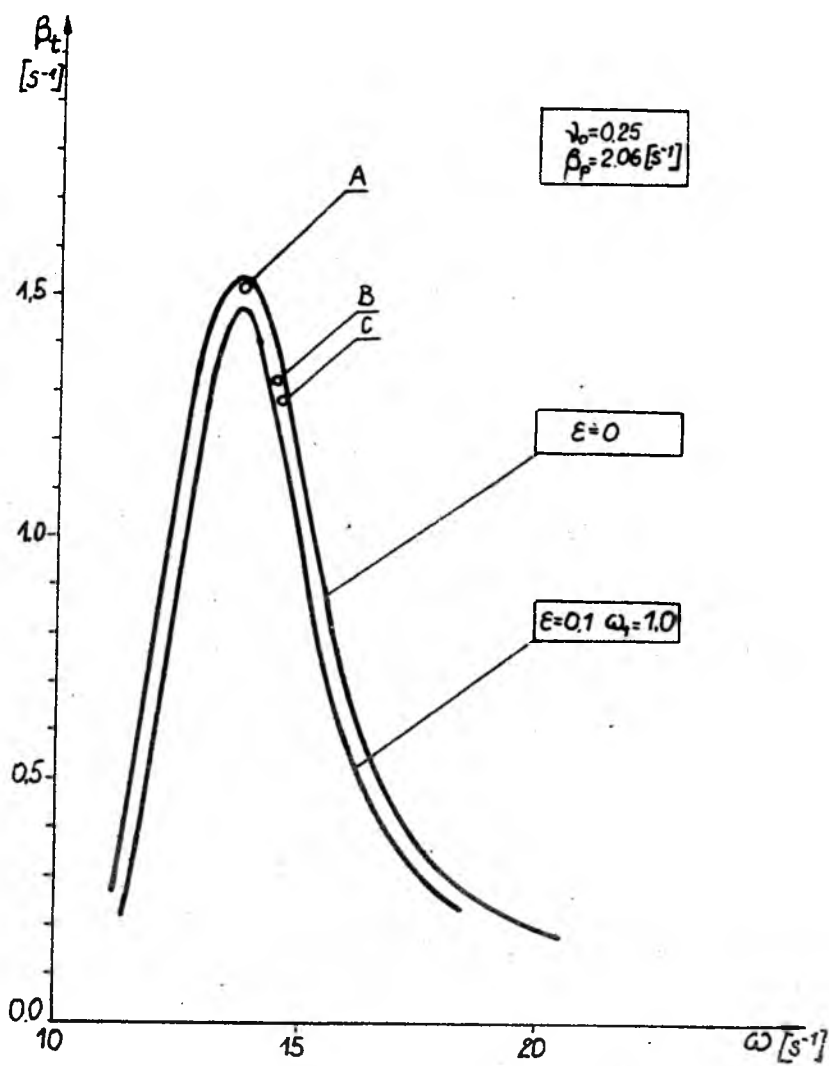
Rys. 4.



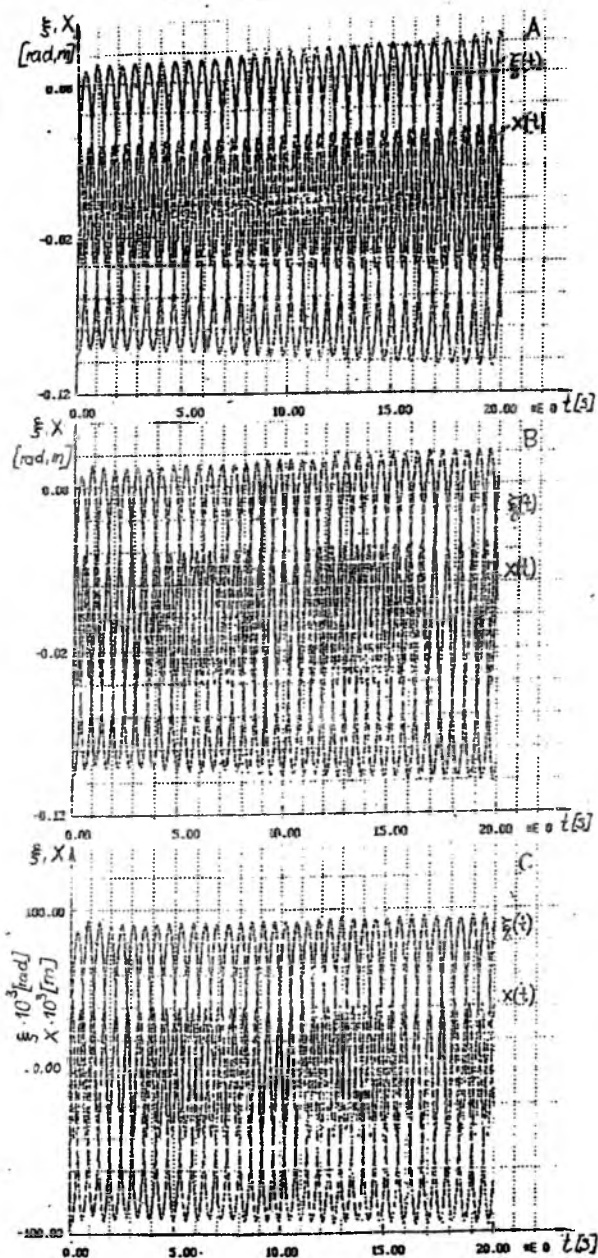
Rys. 5.



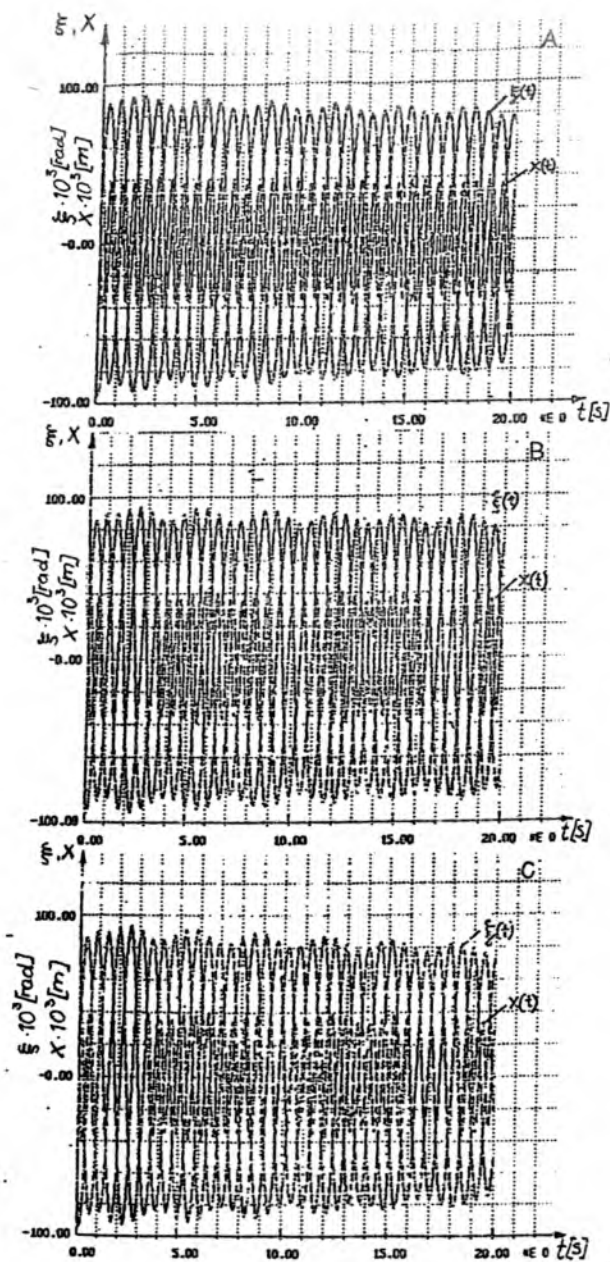
Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 3.



Rys. 9.

Wpływ nieliniowości tłumika przegubu pionowego na stan rezonansu, określono poprzez wyznaczenie czasu t_{10} mierzonego od chwili wystąpienia zaburzeń początkowych do osiągnięcia przez pierwszą łopatę amplitudy wychylenia równej 10 stopni. Czas ten traktuje się jako praktyczną miarę intensywności rezonansu. Wraz ze wzrostem wartości t_{10} intensywność rezonansu maleje. Badania przeprowadzono dla stanów rezonansowych ($\omega = 13.73 [s^{-1}]$, $\beta_l = 1.03 [s^{-1}]$) przy $\nu_0 = 0.25$, $\beta_p = 2.06 [s^{-1}]$. Przyjęto różne warianty wartości pozostałych parametrów (tab.1) oraz zawsze jednakowe warunki początkowe. Wyniki tych badań przedstawiono w tabelicy 1.

Tablica 1

ε	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1
ω_1	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	1.0
μ	0.0	0.1	0.2	0.0	0.1	0.2
t_{10}	4.22	3.94	3.64	4.50	4.24	3.96
λ	0.150	0.154	0.158	0.110	0.115	0.119

W celu jakościowej weryfikacji tych wyników, wprowadzono drugą miarę intensywności rezonansu. Dla równań różniczkowych z okresowo zmiennymi współczynnikami, zgodnie z teorią Flougeta [5], rozwiązanie $\Phi(t)$ charakteryzują zależności:

$$\Phi(t + T) = \rho \Phi(t), \quad \rho = \exp(\lambda T),$$

gdzie:

- T - okres drgań,
- ρ - mnożnik charakterystyczny,
- λ - wykładnik, który w obszarze niestateczności może stanowić miarę intensywności rezonansu naziemnego.

Mimo, że teoria Flougeta dotyczy liniowych równań różniczkowych, obliczono również wartości λ dla przypadków drgań nieliniowych. W przypadkach tych potraktowano wykładniki λ jako pewne umowne miary narastania drgań. Podczas symulacji cyfrowej wyznaczono wartości amplitud i okresu drgań dla czasu $t = 10$ sekund. Obliczone na ich podstawie wartości λ zamieszczono w tab.1.

Wyniki obu rodzajów badań zamieszczonych w dwóch ostatnich wierszach tej tabelicy, zgodnie wskazują, że wzbudzenie parametryczne pochodzące od pneumatyka powoduje zmniejszenie intensywności rezonansu, natomiast zwiększenie wartości współczynnika nieliniowości tłumienia sprawia, że intensywność rezonansu ulega zwiększeniu. Należy podkreślić, że efekty takie wystąpiły dla prędkości pneumatyka $\omega_1 = 1 [s^{-1}]$. Natomiast przy prędkości pneumatyka $\omega_1 = 10 [s^{-1}]$ i $\varepsilon = 0.1$, nastąpiło w stosunku do $\varepsilon = 0$ zwiększenie intensywności rezonansu. W rezultacie tych badań otrzymano:

- 1) $\mu = 0$, $t_{10} = 3.38$,
- 2) $\mu = 0.1$, $t_{10} = 3.36$,
- 3) $\mu = 0.2$, $t_{10} = 3.34$.

4. Uwagi końcowe

Przyjmując w pracy wartości współczynników liniowego tłumienia łopaty i podwozia, miano na względzie możliwości zbadania wpływu innych parametrów na granicę oraz intensywność rezonansu naziemnego. W tym celu należało stworzyć warunki do symulacji takiego stanu. Dlatego wartości tych współczynników różnią się od odpowiednich parametrów układu rzeczywistego. Z innych względów dotyczy to również wartości współczynników nieliniowości i modulacji sztywności pneumatyka. W zależności od procesu technologicznego współczynnik modulacji sztywności opony może zmieniać się w przybliżeniu od zera do 0.05 [4]. Przeprowadzone badania świadczą o możliwości takiego oddziaływania parametrycznego wywołanego przez pneumatyk, które ogranicza efekty dynamiczne stwierdzone w klasycznym ($\mu = 0$, $\varepsilon = 0$) ujęciu rezonansu naziemnego. Śmigłowiec jest układem nieliniowym, a takiego rodzaju własności mogą mieć wpływ na jego zachowanie się nie tylko pod względem ilościowym lecz również jakościowym [6].

Dlatego wyniki prac dotyczących nieklasycznych zagadnień rezonansu naziemnego obejmujących nieliniowe modele o różnych stopniach swobody (w tym o anizotropowych własnościach podwozia) mogą być interesujące nie tylko ze względów poznawczych.

Literatura

1. MIL M.L., NEKRASOV A.V., GRODKO L.N., 1967, *Vertolety, Rasčet i proektirovanie*, Izdatelstvo Mašinostroenie, Moskva
2. MICHEEV R.A., 1982, *Pročnost' vertoletov*, Izdatelstvo Mašinostroenie, Moskva
3. MICHEEV R.A., RUDAKOV G.A., 1986, *Vlijanie nelineinyh faktorov na charakteristiki zemnogo rezonansa vertoleta*, Moskovskii Aviacionnyi Institut, Moskva
4. SZABELSKI K., SAMODULSKI W., 1984, *Badanie uproszczonego modelu nieliniowych drgań samochodu jako układu z wymuszeniem parametrycznym*, Archiwum Budowy Maszyn, XXXI, 3-4
5. JAKUBOVIČ V.A., STARŽYNSKII V.M., 1972, *Lineinye differencialnye uravnenija s periodičeskimi koeficientami i ich priloženija*, Nauka, Moskva
6. SCHMIDT G.I., TONDL A., 1986, *Non-linear Vibrations*, Akademie-Verlag, Berlin

PROBLEMATYKA DIAGNOZOWANIA WYPOSAŻENIA POKŁADOWEGO STATKÓW POWIETRZNYCH¹

ZDZISŁAW ROCHAŁA

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wprowadzenie

Współczesne samoloty wojskowe realizują zadania przy dużej prędkości i na małej wysokości, a ponad 75% czasu ich lotu przypada na złą pogodę oraz warunki nocne. Zatem sytuacja pilota takiego samolotu jest bardzo specyficzna, ponieważ pracując przebywa on w nieprzyjawnym dla siebie środowisku. Jego życie jest, dużo więcej niż innych ludzi-operatorów, uzależnione od poprawnego wykonania wyznaczonych mu zadań, a przede wszystkim od doskonałości technicznej statku powietrznego (SP). Obecnie każdy dzień przynosi nowe rozwiązania w technice lotniczej mające wpływ na tę doskonałość.

Największe zmiany jakościowe zachodzą w systemie awionicznym - wyposażeniu pokładowym (WP). Systemy wchodzące w skład WP cechują się różnorodnością funkcjonalną, dużą złożonością, wysokim poziomem organizacji. Składają się z wielu podsystemów liczących tysiące i setki tysięcy elementów. Dynamiczny rozwój i udoskonalanie WP ma na celu podwyższenie gotowości bojowej, niezawodności, zdolności naprawczej i zmniejszenie czasu na obsługę techniczną SP. W przypadku samolotów wojskowych dąży się do osiągnięcia takiego poziomu eksploatacji, by ich obsługiwanie ograniczyć do uzupełniania mediów roboczych tj. paliwa i uzbrojenia [1,2].

Jedną z najefektywniejszych dróg realizacji w/w funkcji, a zarazem zapewnienia wysokiego bezpieczeństwa lotów to opracowanie i wdrożenie do eksploatacji automatycznych pokładowych systemów diagnozujących (PSD), wchodzących w skład systemu diagnozującego SP.

Dzięki PSD pilot dysponuje w czasie trwania lotu aktualną i wiarygodną informacją o stanie systemów pokładowych należących do WP i w przypadku niezdatności któregoś z nich, może podjąć odpowiednie działania by nie dopuścić do katastrofy, zaś po zakończeniu lotu obsługa techniczna otrzymuje gotową diagnozę, umożliwiającą natychmiastowe rozpoczęcie czynności obsługowych pozwalających na odtworzenie w krótkim czasie zdolności SP do wykonywania zadań bojowych.

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Systemy diagnozujące współczesnych samolotów bazują na technice komputerowej i szerokim wykorzystaniu autonomicznych układów samokontroli (AUS) (ang. BITE Built-in Test Equipment) dzięki czemu zapewniają:

- dokładność procesu diagnozowania;
- dużą wiarygodność i dużą prędkość wypracowywania i stawiania diagnoz;
- niezbędną głębokość wnikania w strukturę obiektu w procesie lokalizacji uszkodzeń;
- automatyczne generowanie testów kontrolnych i diagnoz;
- możliwość adaptacyjnego wyboru procedur diagnozowania.

Ponadto systemy te charakteryzują się:

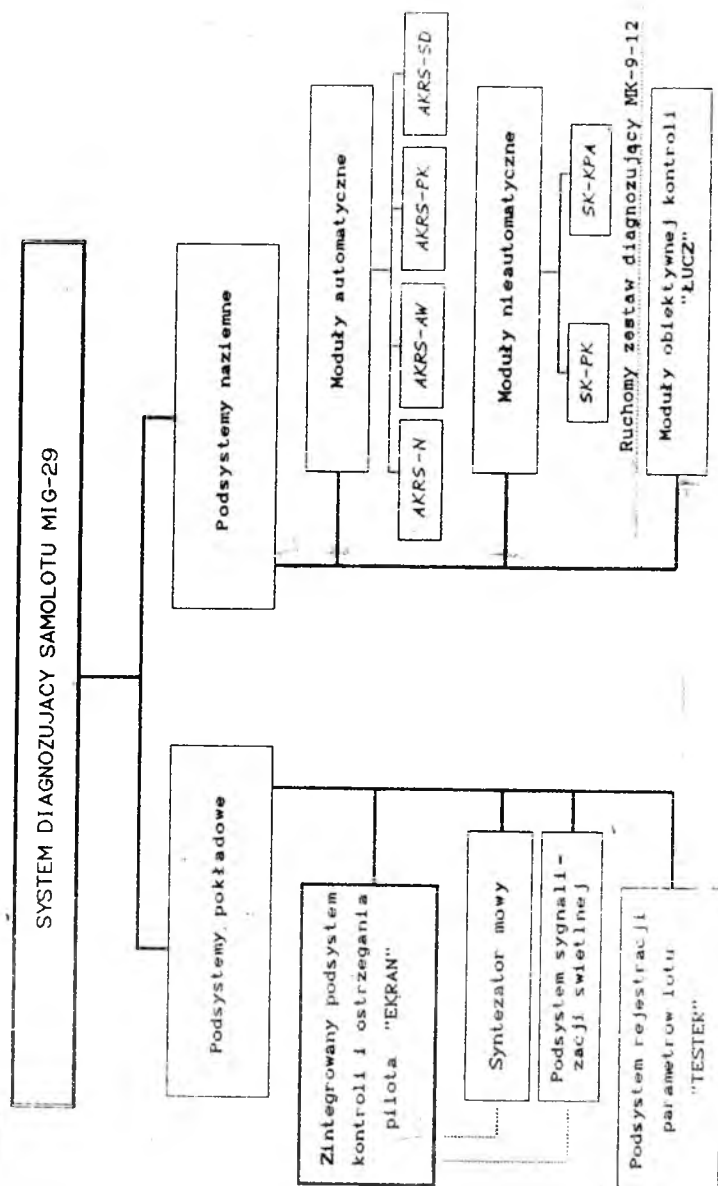
- dużą niezawodnością działania;
- wystarczającą elastycznością struktury – uniwersalnością;
- możliwością wykonania samokontroli;
- umiarkowanymi wymaganiami odnośnie kwalifikacji personelu;
- niskimi kosztami wytwarzania i eksploatacji;
- niewielkimi wymiarami i masą.

2. System diagnozujący samolotu MIG-29

Określonym wyżej wymaganiom w wojskowym lotnictwie polskim może sprostać jedynie system diagnostyczny samolotu MIG-29.

Jego struktura przedstawiona na rys.1 jest zgodna z lansowaną na świecie wielopoziomową strategią obsługiwaną technicznego charakteryzującą się szerokim zastosowaniem na każdym poziomie obsługiwaną zautomatyzowanych urządzeń kontroli i badania stanu. Wyróżnia się trzy podstawowe poziomy obsługiwaną technicznego.

Pierwszy poziom stanowią podsystemy pokładowe, których zadaniem jest kontrola zdolności WP podczas przygotowania do lotu oraz dozorowanie stanu tegoż



Rys. 1. Struktura systemu diagnozującego samolotu MIG-29

wyposażenia, informowanie i ostrzeganie pilota o poprawnej bądź niepoprawnej pracy systemów pokładowych za pomocą informacji w postaci tekstu, sygnałów świetlnych i komunikatów wypowiadanych przez syntezytor mowy, podczas lotu. Ponadto przez cały czas trwania lotu podsystem rejestracji parametrów lotu umożliwia zapisanie w postaci cyfrowej na nośniku magnetycznym kilkudziesięciu parametrów charakteryzujących przebieg lotu. Drugi poziom obsługiwaną stanowią naziemne podsystemy diagnozujące, do których zalicza się:

- ruchomy zestaw diagnozujący MK-9-12 [3];
- zestawy obiektywnej kontroli.

Zadaniem zestawu MK-9-12 jest kontrola stanu technicznego wszystkich systemów i instalacji samolotu w warunkach eksploatacji w sposób automatyczny lub nieautomatyczny. Zestaw ten umożliwia:

- kontrolę zdolności wyposażenia pokładowego podczas wykonywania prac okresowych;
- lokalizację uszkodzeń ze wskazaniem uszkodzonego bloku;
- ponowne sprawdzenie po wykonanej odnowie lub regulacji;
- dokumentowanie wyników kontroli na karcie perforowanej.

Pomiar cech sygnałów diagnostycznych odbywa się, poprzez stacjonarne złącza diagnostyczne:

- umieszczone na pokładzie (np. złącza kontroli silników);
- poszczególnych bloków (np. złącza kontroli systemu automatycznego sterowania).

Natomiast zadaniem zestawów obiektywnej kontroli jest odtworzenie i analiza informacji zarejestrowanych na taśmie magnetycznej pokładowego rejestratora parametrów lotu. Celem tego działania jest uzyskanie odpowiednich wykresów umożliwiających:

- kontrolę i ocenę pilotażu podczas lotu;
- określenie zdarzeń związanych z przekroczeniem ograniczeń eksploatacyjnych ustalonych dla danego typu samolotu;
- kontrolę działania układów i wyposażenia samolotu.

Zestawy te, w komplecie z aparaturą odtwarzania i wprowadzania informacji, mogą też w szczególnych przypadkach służyć do ustalenia obiektywnych przyczyn wypadków lotniczych.

Trzeci poziom obsługi to zakłady remontowe, gdzie organizuje się diagnozowanie stanu technicznego zdemontowanych bloków za pomocą specjalizowanych urządzeń diagnostycznych z rozwiniętym wyposażeniem programowym.

3. Opis pokładowego podsystemu kontroli i ostrzegania załogi

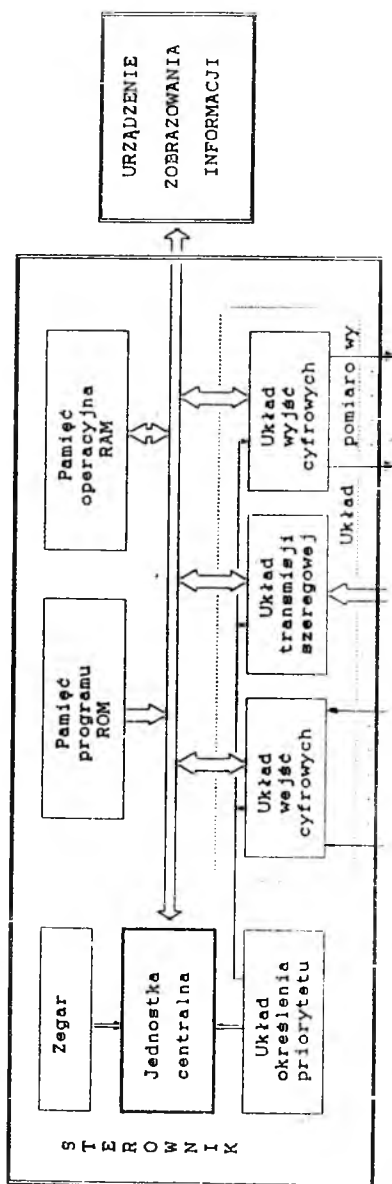
W lotnictwie wojskowym szczególny nacisk kładzie się na podniesienie efektywności eksploatacyjnej SP charakteryzującą się:

maksymalną autonomicznością tzn. niezależnością od łatwych do zniszczenia w warunkach bojowych naziemnych systemów diagnozujących, minimalną pracochłonnością przygotowania do powtórnego wylotu, krótkim czasem lokalizacji i usuwania niezdatności, możliwością szybkiego przeszkolenia personelu obsługującego itp.

Określonym wyżej wymaganiom mogą sprostać jedynie PSD, będące integralną częścią diagnozowanego obiektu, wyposażone w bogaty zestaw środków diagnostycznych, wypracowujące diagnozy w czasie rzeczywistym, charakteryzujące się automatycznym działaniem oraz modułową konstrukcją. Dlatego też, dalsza analiza dotyczyć będzie pokładowego podsystemu diagnozującego, a w szczególności zintegrowanego podsystemu kontroli i ostrzegania załogi o nazwie "EKRAN".

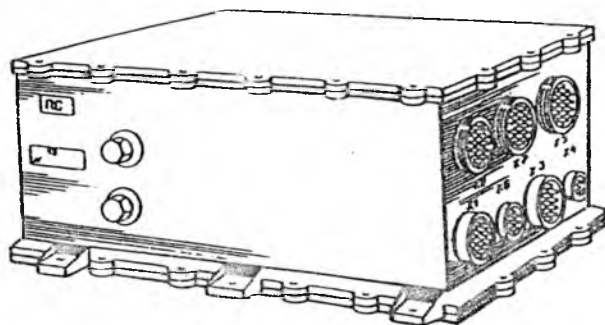
System "EKRAN" [4] przeznaczony jest do automatycznej kontroli zdolności diagnozowanego obiektu, tzn. wszystkich systemów urządzeń i instalacji samolotu MIG-29. Umożliwia zbieranie, obróbkę, zobrazowanie i rejestrację sygnałów niosących informację o niezdatnościach wypracowywanych przez autonomiczne układy samokontroli oraz czujniki pokładowych systemów, urządzeń i instalacji. Wyróżnia się następujące zakresy pracy:

- zakres kontroli naziemnej (KN) – zadaniem systemu jest organizacja procesu kontroli i badania stanu WP z wykorzystaniem AUS, opracowanie uzyskanej informacji i jej rejestrację z jednoczesnym przedstawieniem operatorowi wyników opisujących stan poszczególnych systemów, urządzeń i instalacji wchodzących w skład WP;
- zakres kontroli w locie (KL) – zadaniem systemu jest dozorowanie, które polega na cyklicznej kontroli zdolności WP, rejestracji i bieżącej sygnalizacji jej wyników załodze;
- zakres tworzenia dokumentacji o zaistniałych niezdatnościach podczas lotu (D) – zadaniem systemu jest rejestracja tuż po wylądowaniu na taśmie



Rys. 2. Schemat funkcjonalny podsystemu kontroli i ostrzegania załogi "Ekran"

nośniku, informacji o niezdatnościach powstałych podczas lotu z zachowaniem kolejności ich wystąpienia, podając numer i czas wystąpienia danej niezdatności.



Rys. 3. Sterownik



Rys. 4. Urządzenie zobrazowania informacji

Schemat funkcjonalny systemu "EKRA" przedstawiono na rys.2. System ten konstrukcyjnie składa się z dwóch modułów: sterownika (przedstawionego na rys.3) i urządzenia zobrazowania informacji (przedstawionego na rys.4). Podstawę systemu stanowi sterownik będący specjalizowanym komputerem cyfrowym. Jego działanie opisuje program umieszczony w pamięci programu. Zgodnie z tym programem sterownik:

- analizuje sygnały otrzymywane z AUS wyposażenia pokładowego;
- określa priorytet powstałych w czasie lotu niezdatności;

- gromadzi, przechowuje i wyprowadza na ekran urządzenia zobrazowania informacje o powstałych niezdatnościach w kolejności określonej przez algorytm pracy systemu;
- wypracowuje sygnały uaktywniające AUS kontrolowanych systemów pokładowych oraz steruje pracą urządzenia zobrazowania;
- umożliwia wykonanie samokontroli;
- realizuje algorytmy poszczególnych zakresów kontroli.

Wypracowana decyzja – diagnoza, przekazywana jest za pomocą urządzenia zobrazowania informacji, tzn. specjalnej drukarki, w której drukowanie polega na elektroerozji warstwy metalizowanej napylonej na przezroczystą folię – nośnik, przypominającą błonę fotograficzną. Wyprowadzana informacja może mieć postać:

- tekstów – informacji o niezdatnych systemach, urządzeniach i instalacjach;
- instrukcji – informacji opisujących czynności, jakie musi wykonać operator w zakresie KN;
- komunikatów – informacji o realizowanym zakresie;
- zbioru cyfr – tworzących kadry informacyjne w zakresie D (numery i czasy wystąpienia niezdatności).

Podstawowe dane techniczne:

- układ pomiarowy umożliwia zbieranie maksymalnie 109 wejściowych sygnałów diagnostycznych podawanych w postaci sygnałów binarnych oraz maksymalnie 128 wejściowych sygnałów diagnostycznych przesyłanych szeregowo w postaci słów 32-bitowych;
- sterownik generuje 22 sygnały sterujące wysyłane w postaci sygnałów binarnych do obiektu diagnozowania;
- maksymalnie można uzyskać do 256 kadrów informacji – diagnoz;
- w zakresie KN czas trwania pełnego cyklu kontroli zdadności wynosi $8 \div 10$ min;
- pojemność pamięci programu i danych – 72000 bitów;
- w zakresie D rejestrowane są ostatnie 64 niezdatności;
- podstawowe parametry kadru zobrazowywanej informacji:

wymiary kadru	-	39 × 24 mm;
ilość linii informacji	-	4;
liczba znaków w linii	-	8;
wysokość znaku	-	4 mm;

- jednocześnie można zobrazować jedno zdarzenie;
- napięcie zasilania $18 \div 31$ V z sieci pokładowej przy poborze mocy nie przekraczającym 100 W;

System "EKRA" wyposażony jest w autonomiczny układ samodiagnostujący, który zapewnia określenie jego stanu. Samokontrola systemu trwa około 15 sekund, a rozpoczyna się z chwilą rozpoczęcia pracy.

System "EKRA" bada stan:

- systemu sygnalizacji o pożarze;
- automatu regulacji sterowania;
- urządzenia automatycznej kontroli zespołu napędowego;
- urządzenia aktywnej odpowiedzi;
- urządzenia ostrzegawczego;
- pokładowej radiolini;
- systemu zasilania anten;
- systemu automatycznego sterowania;
- systemu sygnałów ograniczających;
- przyrządu pilotażowo-nawigacyjnego;
- syntezy mowy;
- paliwomierza-przepływomierza;
- systemu sygnalizacji świetlnej;
- radiokompasu;
- radiowysokościomierza;
- zintegrowanego systemu nawigacyjno-celowniczego;
- stacji radiolokacyjnej;
- radiostacji pokładowej.

4. Podsumowanie

System "EKRA" wydaje ocenę jakościową badanych systemów, urządzeń i instalacji, gdyż jak większość obiektów technicznych (a zwłaszcza obiektów cyfrowych) wyróżnia dwie klasy stanów: stan *zdatności* i stan *niezdatności*. Jest to klasyczne podejście stosowane do tej pory w diagnostyce. Posługiwanie się logiką dwuwartościową w procesie diagnozowania prowadzi do powstania pewnego "zapasu" informacji diagnostycznej, który nie jest wykorzystywany. Uzyskiwana przy takim podejściu informacja diagnostyczna nie zawsze jest wystarczająca do wypowiedzenia się o stanie obiektu. Nie uwzględnia się tu bowiem czasu starzenia (zużywania), który stanowi ważną część pełnego okresu eksploatacji. Również rozregulowania, rozstrojenia, zaniżenia wartości parametrów, możliwe do usunięcia drogą prostych regulacji, przy dwuwartościowej ocenie stanów trudno jednoznacznie zaklasyfikować do klasy stanów zdatności bądź niezdatności [5]. Wydaje się zatem celowym wprowadzenie trzeciego stanu.

W dwustanowych modelach diagnostycznych ilość informacji określa zależność:

$$I(B) = \log_2 \frac{1}{P(B)} [\text{bitów}] .$$

Korzystając z zależności:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x ,$$

otrzymujemy, że:

$$\log_3 x = 0.63 \log_2 x ,$$

$$1 \text{ trit} = 1.585 \text{ bity} .$$

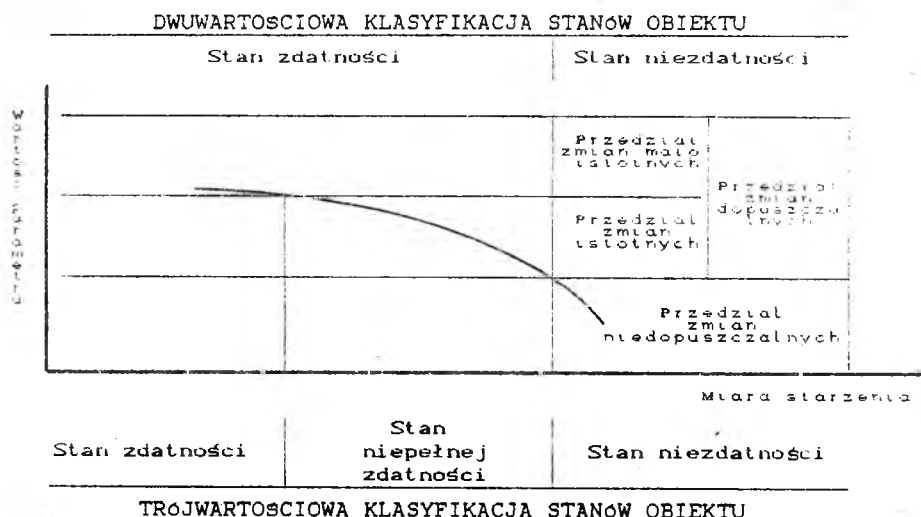
Z powyższych rozważań wynika, że elementarny sygnał trójkowy (trinit) dostarcza 1.585 razy więcej informacji od elementarnego sygnału binarnego (binita).

W celu uzyskania informacji diagnostycznej zbliżonej do maksymalnej, zbiorów klas stanów niezawodnościowych można uszczegółowić, wprowadzając kolejne klasy stanów. W szczególności, w celu uzyskania dodatkowej informacji diagnostycznej dotyczącej starzenia (zużywania), rozregulowań, rozstrojeń, wprowadzić można trzecią klasę stanów – klasę stanów niepełnej zdatności.

Rezultatem wprowadzenia trójwartościowej klasyfikacji stanów jest to, że dany obiekt może znajdować się w jednej z trzech klas stanów: "2" – w klasie stanów zdatności, "1" – w klasie stanów niepełnej zdatności i "0" – w klasie stanów niezdatności. W klasie stanów zdatności obiekt zachowuje pełną zdolność do wykonywania zadań zgodnie z przeznaczeniem. W klasie stanów niepełnej zdatności obiekt jest zdolny do wykonywania zadań w ograniczonym zakresie. Jest to stan

przeduszkodzeniowy. W klasie stanów niezdatności obiekt nie jest zdolny do wykonywania swoich zadań.

Ilustrację klas stanów obiektu typu urządzenie techniczne długotrwałego użytku przedstawiono na rys.5.



Rys. 5. Ilustracja klas stanów urządzeń wyposażenia pokładowego

Już z tego rysunku, bez szczegółowej analizy widać, jak istotną informację diagnostyczną można uzyskać, wprowadzając trzecią klasę stanów diagnostycznych – klasę stanów niepełnej zdatności.

Należy zatem, wprowadzić ciągłe kontrolowanie stanu obiektu. Rozpoznanie każdego z występujących stanów powinno wymusić określoną działalność eksploatacyjną. Jeśli rozpoznany stan będzie stanem niepełnej zdatności, należy przeprowadzić profilaktyczne obsługiwanie techniczne po wykonaniu którego, obiekt przejdzie do stanu zdatności.

Nie przeprowadzenie profilaktycznego obsługiwania technicznego spowoduje dalsze pogarszanie parametrów obiektu i w rezultacie prowadzi będzie do przejścia obiektu w stan niezdatności. Wystąpienie stanu niezdatności oznacza konieczność poddania obiektu naprawie lub remontowi.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że dzięki uzyskanej przez wprowadzenie trzeciego stanu dodatkowej informacji diagnostycznej możliwe jest *prognozowanie* stanu, a wykonując profilaktyczne obsługi techniczne dwukrotnie zwiększyć wartość przeciętną czasu poprawnego działania wyposażenia pokładowego.

Literatura

1. *Nadežnost' i remontoprigođnost' – osnova povyšeniya boevykh vozmožnostej perspektivnykh samoletov*, Problemy Bezopasnosti Poletov
2. *Soveršenstvovanie sredstv i metodov ekspluatatsii sovremennykh vozdušnykh sudov*, Problemy Bezopasnosti Poletov
3. *Samolot MIG-29. Wyposażenie obsługi naziemnej*, Część II, Środki obsługi naziemnej
4. *Samolot 9-12A. Rukovodstvo po techničeskoj ekspluatatsii, Čast' VII, Instrukcija operatoru po proverke bortovogo oborudovanija sistemoj EKRAN*
5. WIĘCEK A., *Diagnozowanie złożonych obiektów technicznych przy trójwartościowej klasyfikacji stanów*

ANALIZA KONSEPCJI MODUŁOWEGO SAMOŁOTU POŁA WALKI I WIELOZADANIOWEGO¹

JACEK KOŃCZAK

Instytut Lotnictwa, Warszawa

1. Wstęp

Koncepcja modułowego samolotu² powstała w wyniku analizy kosztów, jakich wymaga program budowy nowego statku powietrznego. Z praktyki wiadomo, że najdroższe i najbardziej energochłonne są badania aerodynamiczne. Ich wartość sięga od około 30% do 50% całego programu do momentu odbycia pierwszego lotu bez certyfikacji.

Modułowy samolot może łączyć w sobie różne elementy wymienne, nadające się do budowy innej wersji. Idea jest prosta: chodzi o to, aby można było "wziąć" gotowe, obliczone i sprawdzone już elementy i "włożyć" je lub "złożyć" z nich nowy przeznaczony do innych zadań samolot. Interesujące nas części – moduły, takie jak silniki, uchwyty pod silniki, podwozie, usterzenia poziome i pionowe, skrzydło – wykonujemy raz, pamiętając o tym aby nadawały się one do różnych typów konstruowanych samolotów. Inne w takim układzie są: kadłub, oprzyrządowanie, wyposażenie samolotu w urządzenia elektroniczne, uzbrojenie (wersja szturmowa) itd.

Następnie, realizując kolejne typy samolotów wykonujemy już tylko badania kadłuba i całej struktury po złożeniu.

Przyjęcie takich założeń ma na celu zminimalizowanie kosztów wytwarzania samolotu oraz umożliwienie szybkiego zorganizowania produkcji w systemie kooperacyjnym. Daje również możliwość stałego rozwoju technicznego samolotu w miarę pojawienia się nowych wymagań i możliwości jego wykorzystania.

Samolot modułowy może być napędzany silnikami turbośmigłowymi lub odrzutowymi. Należy podkreślić, że osiągi wariantów z napędem odrzutowym są wyraźnie lepsze od wariantu turbośmigłowego, ale trzeba jednak liczyć się z pogorszeniem parametrów ekonomicznych z powodu większego zużycia paliwa w lotach na małych wysokościach. Program przewiduje budowę samolotu w następujących wersjach:

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

²Rysunki zamieszczono na końcu pracy

1. szturmowej pola walki;
2. wielozadaniowej, która może mieć jeszcze odmiany tj. samolot dyspozycyjny i samolot wczesnego ostrzegania. W sumie jeden program daje możliwość wykonania sześciu typów statków powietrznych o różnych możliwościach i parametrach ekonomiczno – eksploatacyjnych.

2. Samolot pola walki

Samolot pola walki to wielozadaniowy samolot bojowy przystosowany do działań w trudnych warunkach atmosferycznych i z lotnisk o nieprzygotowanej nawierzchni. Przeznaczony jest do bezpośredniego wsparcia własnych wojsk na polu walki.

2.1. Elementy wspólne (moduły)

- silniki

- odrzutowe – umieszczone z tyłu kadłuba na wysięgnikach, owiewki silników dodatkowo opancerzone;
- turbośmigłowe – umieszczone na wysięgnikowych pylonach skrzydłowych;

- skrzydło

- o określonej doskonałości aerodynamicznej, o stosunkowo dużym wydłużeniu, inne dla różnych wersji silnikowych. W dwóch przypadkach skrzydło takie same jak w wersji wielozadaniowej, tylko opancerzone od spodu pancerzem z płytek kompozytowych;

- podwozie

- przystosowane do lądowania na lotniskach improwizowanych, umożliwiające awaryjne grawitacyjne wypuszczenie, w przypadku awarii instalacji. Dla dwóch wersji silnikowych identyczne;

- wysięgniki (pylony)

- w wersji turboodrzutowej są wkomponowane w strukturę kadłuba;
- w wersji turbośmigłowej są wkomponowane w strukturę skrzydła;

- usterzenie poziome i pionowe
 - w wersji turboodrzutowej – klasyczne, dodatkowo wzmocnione;
 - w wersji turbośmigłowej – typu T, co jest konsekwencją przyjętego układu silników, dodatkowo wzmocnione;
- instalacje elektryczne, hydrauliczne, pneumatyczne
 - podobne dostosowane do światowych standartów i parametrów użytkowych, instalacje w rejonach narażonych na uszkodzenia są zdwojone.

2.2. Elementy różne

- kadłub
 - nieciśnieniowy, silnie opancerzony pancerzem wielowarstwowym ceramiczno – metalowym; w rejonie kabiny pilota i operatora, opancerzony również od dołu płytkami kompozytowymi, kąty pochylenia burt dobrane tak, aby zmniejszyć prawdopodobieństwo trafienia pociskiem wystrzelonym z ziemi; sposób kształtowania zewnętrznej bryły kadłuba (zastosowanie powierzchni i linii nierównoległych) może mieć korzystniejszy wpływ na zmniejszenie echa radarowego. W środkowej części kadłuba przewiduje się umieszczenie zbiornika paliwowego z samozasklepiającą się wykładziną. Kabina załogi hermetyzowana.
- wyposażenie:
 - instalacje silnikowe w zależności od zastosowanego rodzaju napędu,
 - instalacja tlenowa dla pilotów,
 - fotele wyrzucane dla członków załogi,
 - systemy celownicze, ostrzegawcze – wersja szturmowa,
 - urządzenia do patrolowania, wykrywania i niszczenia celów nawodnych i podwodnych – wersja morska,
 - zasobniki do wykonywania akcji ratunkowych, zrzutów zaopatrzeniowych i dywersyjnych,
 - uzbrojenie:
 - * bomby lotnicze o zróżnicowanym wagomiarze (od 50 do 500kg),
 - * wyrzutnie niekierowanych pocisków rakietowych,
 - * rakiety kierowane,
 - * zasobniki z karabinami maszynowymi,

- * obrotowa wieżyczka z szybkostrzelnym, zdwojonym karabinem maszynowym.

Łączna masa zabieranych środków bojowych wynosi od 2000 do 2500 kg.

3. Samolot wielozadaniowy

Samolot wielozadaniowy to samolot z kadłubem hermetycznym o przekroju kołowym. Przystosowany do działań w trudnych warunkach atmosferycznych i z lotnisk o nieprzygotowanej nawierzchni. W zależności od wyposażenia można uzyskać następujące warianty: samolot dyspozycyjny (pasażerski), towarowy, ewakuacyjno-sanitarny, wczesnego ostrzegania i rozpoznania elektronicznego.

3.1. Elementy wspólne (moduły)

- silniki – jak w samolocie szturmowym, obudowy silników bez dodatkowego opancerzenia;
- skrzydło – jak w samolocie szturmowym, tylko bez opancerzenia (jest ono lżejsze);
- podwozie – jak w samolocie szturmowym;
- wysięgniki – jak w samolocie szturmowym;
- usterzenie poziome i pionowe – jak w samolocie szturmowym.

3.2. Elementy różne (moduły)

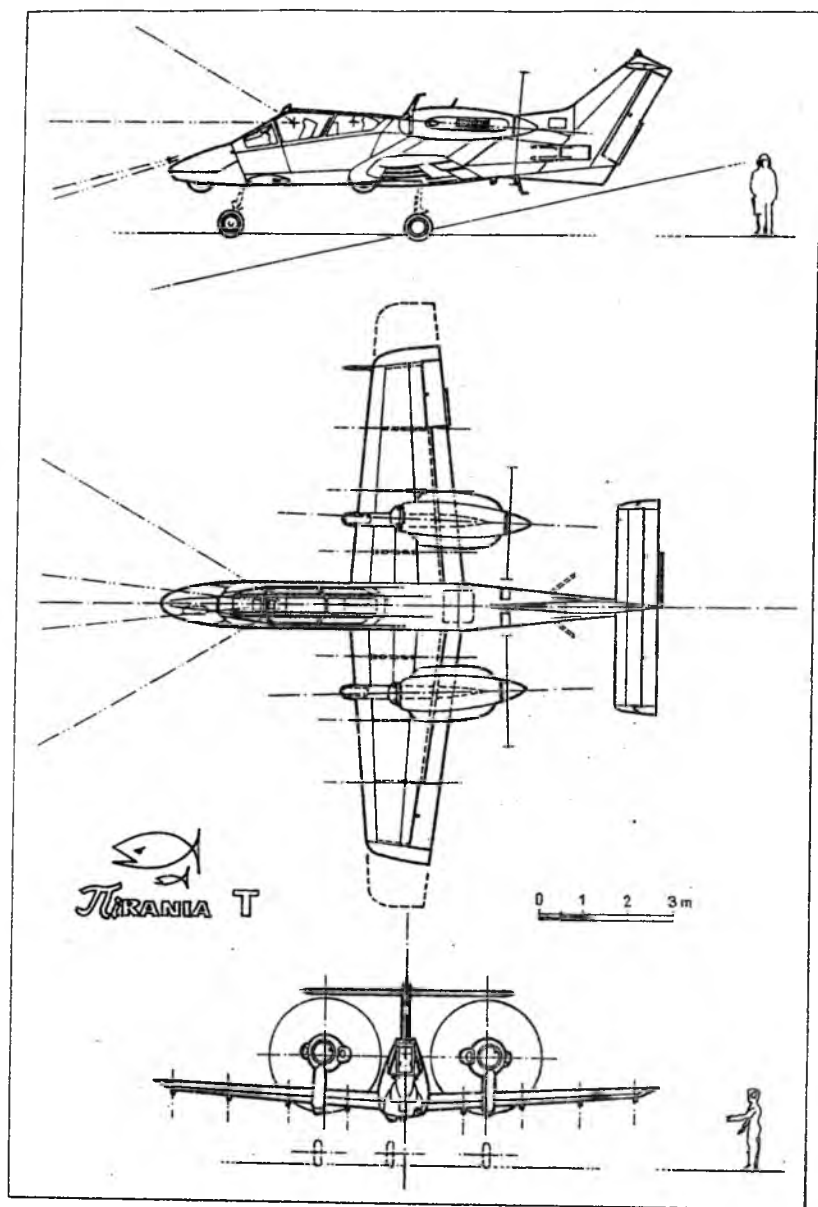
- Kadłub o konstrukcji klasycznej (duralowej), półskorupowej; kabina pasażerska i kabina pilotów hermetyczna. W wersji dyspozycyjnej mieści $8\div 9$ pasażerów oraz dwóch członków załogi. W wersji rozpoznania elektronicznego mieści 2 członków załogi (pilotów), 2 operatorów sprzętu elektronicznego i dowódcę. W wersji sanitarnej mieści 2 członków załogi, 2 osoby personelu medycznego, 3 chorych leżących, 2 chorych siedzących.

Wersja rozpoznania elektronicznego może być wyposażona w antenę radarową umieszczoną nad kadłubem (antena obrotowa), w dziobowej części kadłuba lub na stateczniku pionowym;

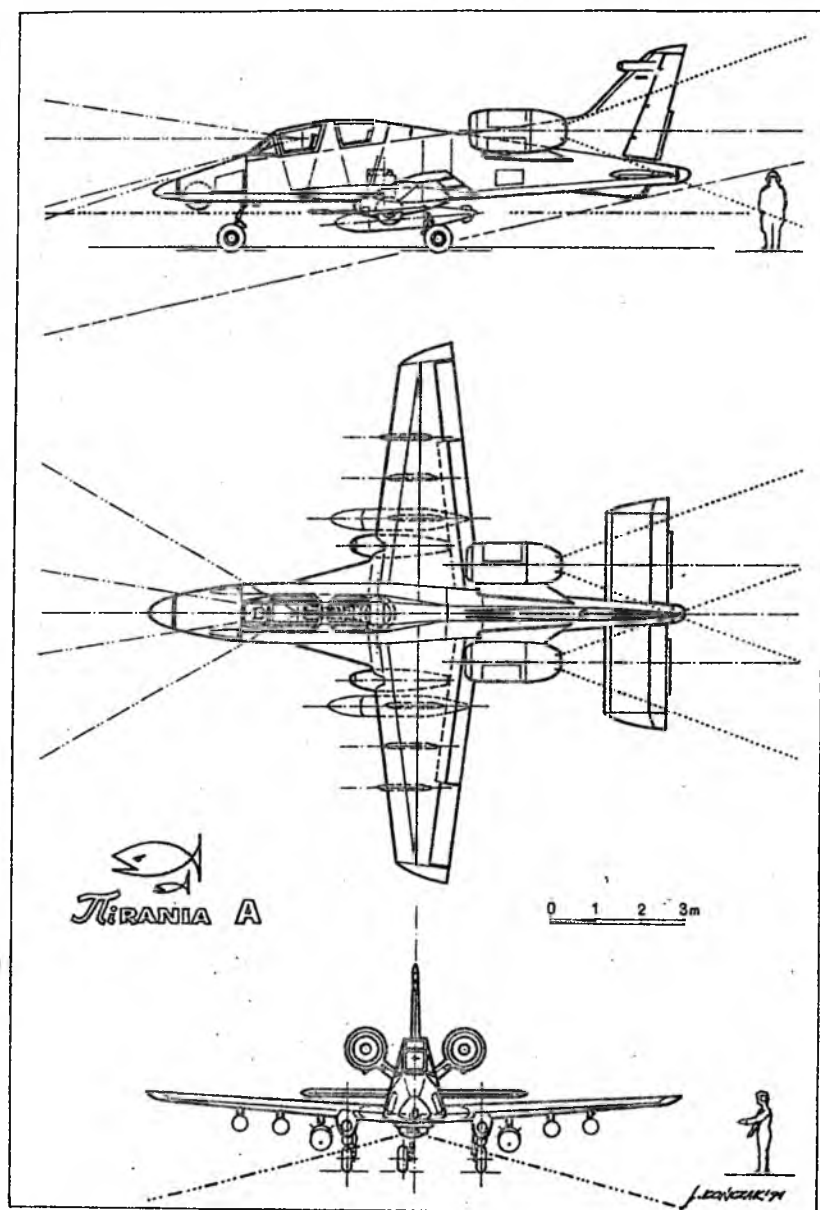
• wyposażenie:

- instalacje silnikowe i elementy do jej sterowania w zależności od zastosowanego rodzaju napędu,
- wyposażenie wnętrza, siedziska dla pasażerów, izolacja cieplna, instalacja WC, oświetlenie wnętrza,
- instalacja tlenowa dla pilotów,
- awaryjna instalacja tlenowa dla pasażerów,
- osprzęt elektroniczny urządzeń wczesnego ostrzegania (wersja AWACS),
- osprzęt medyczny (wersja ewakuacyjno-sanitarna),
- uzbrojenie (w wersji patrolowej i AWACS):
 - * wyrzutnie flar,
 - * wyrzutnie rakiet niekierowanych,
 - * rakiety samonaprowadzające (do utrzymania uzbrojenia potrzebne są belki podskrzydłowe).

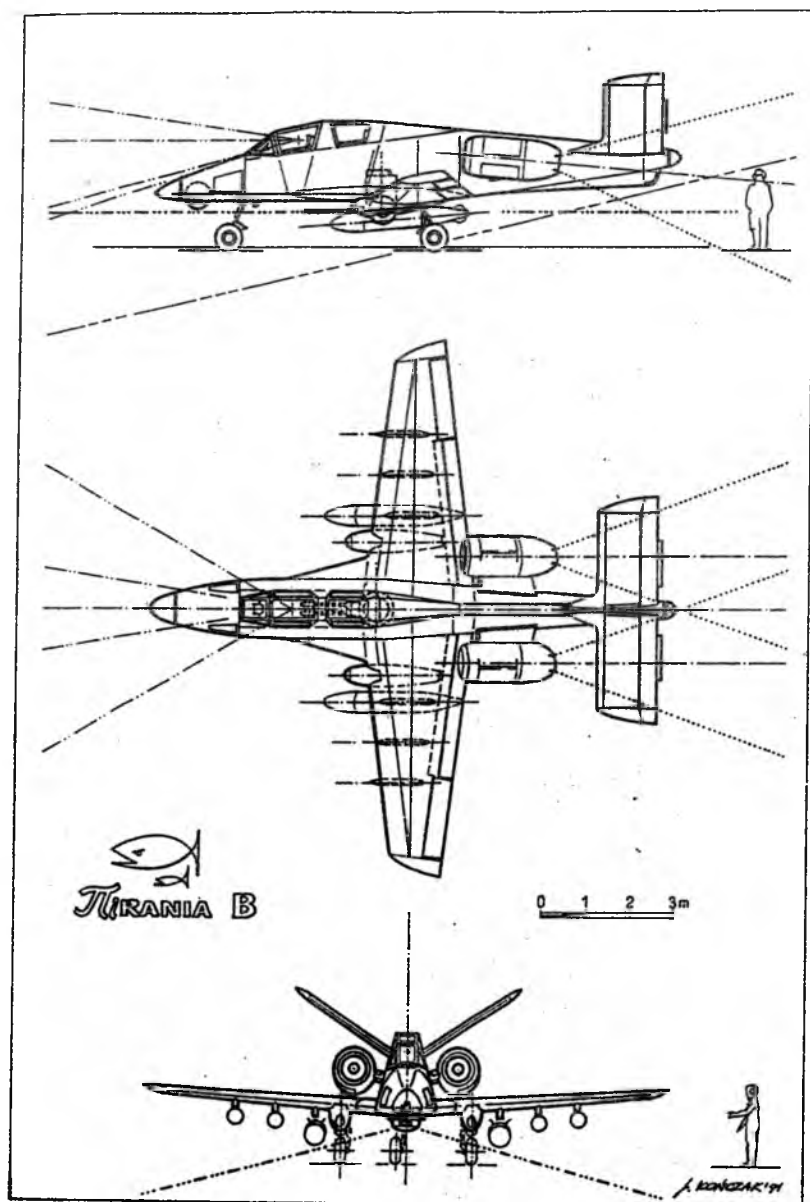
Wadą koncepcji modułowej jest niemożność uzyskania samolotów o różnej wielkości (ograniczenia wprowadzają: powierzchnia nośna płata i moc silników). Utrudnienie stanowi konieczność dokładnego przemyślenia całego programu w celu maksymalnego wykorzystania różnych konstruowanych samolotów.



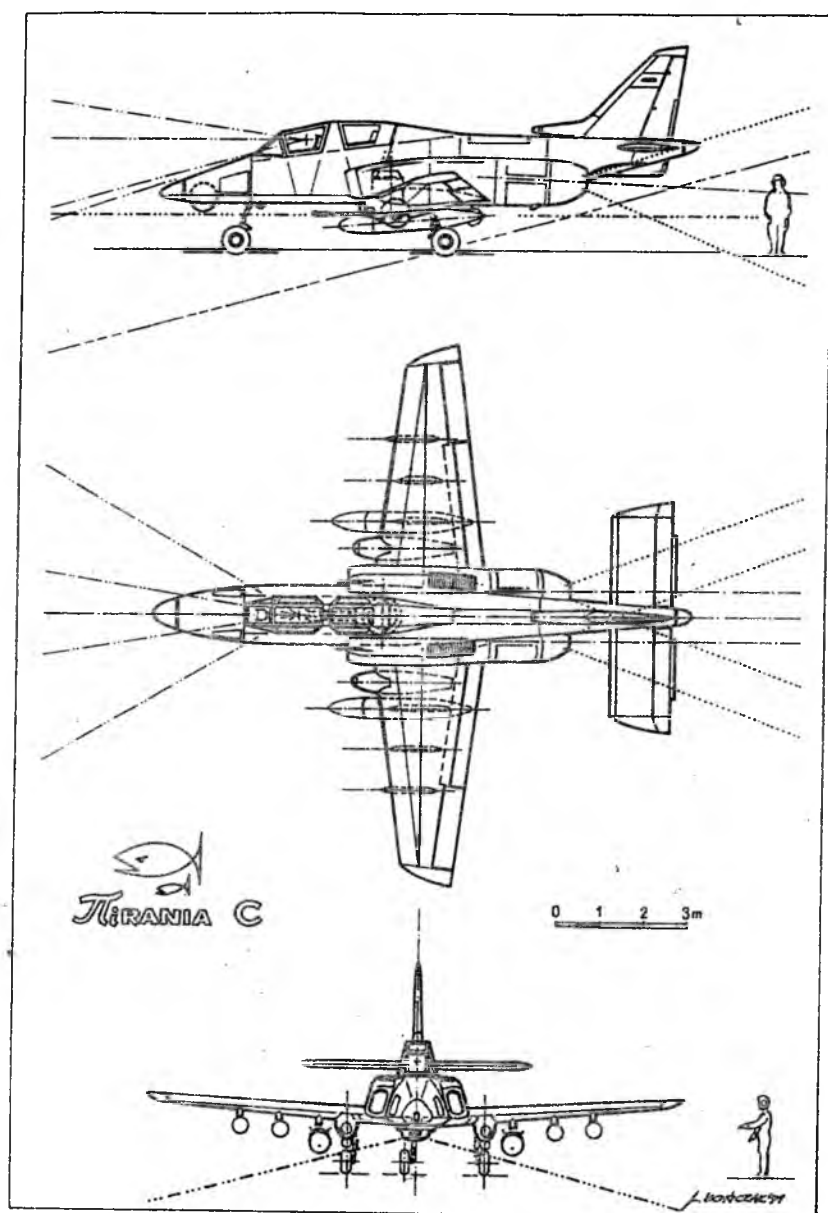
Rys. 1.



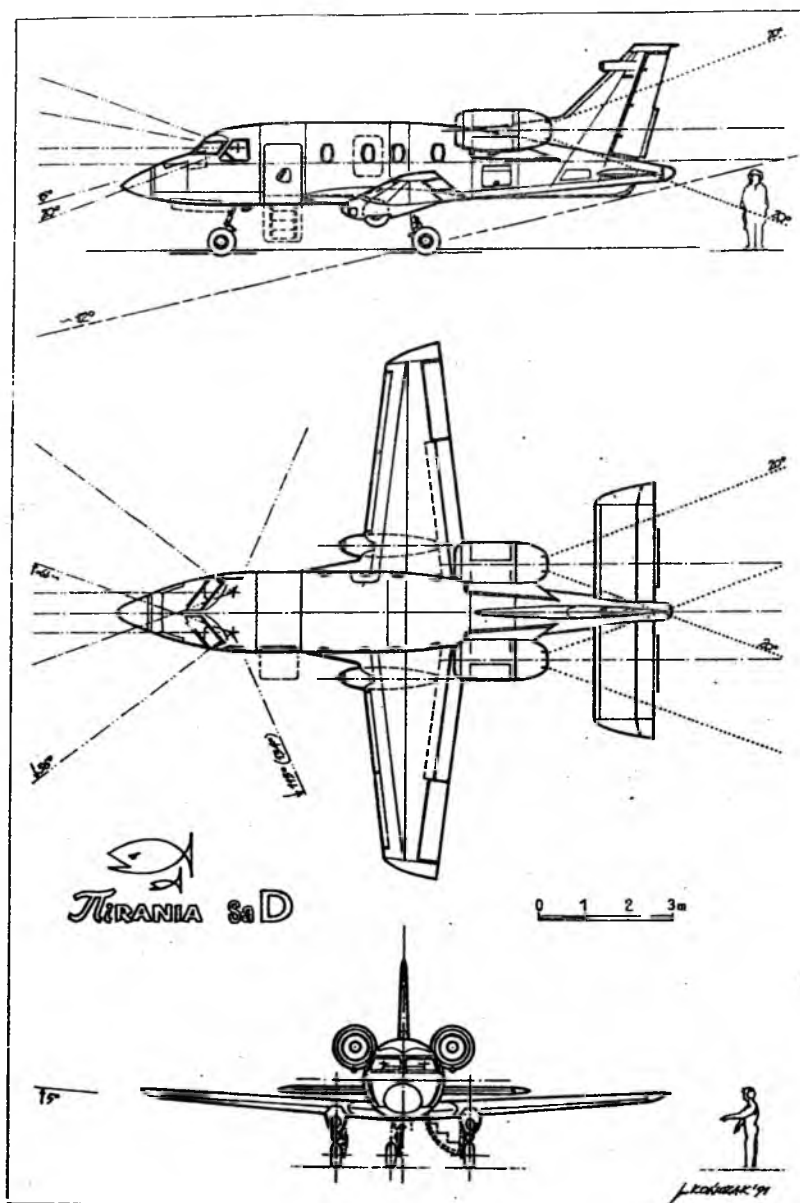
Rys. 2.



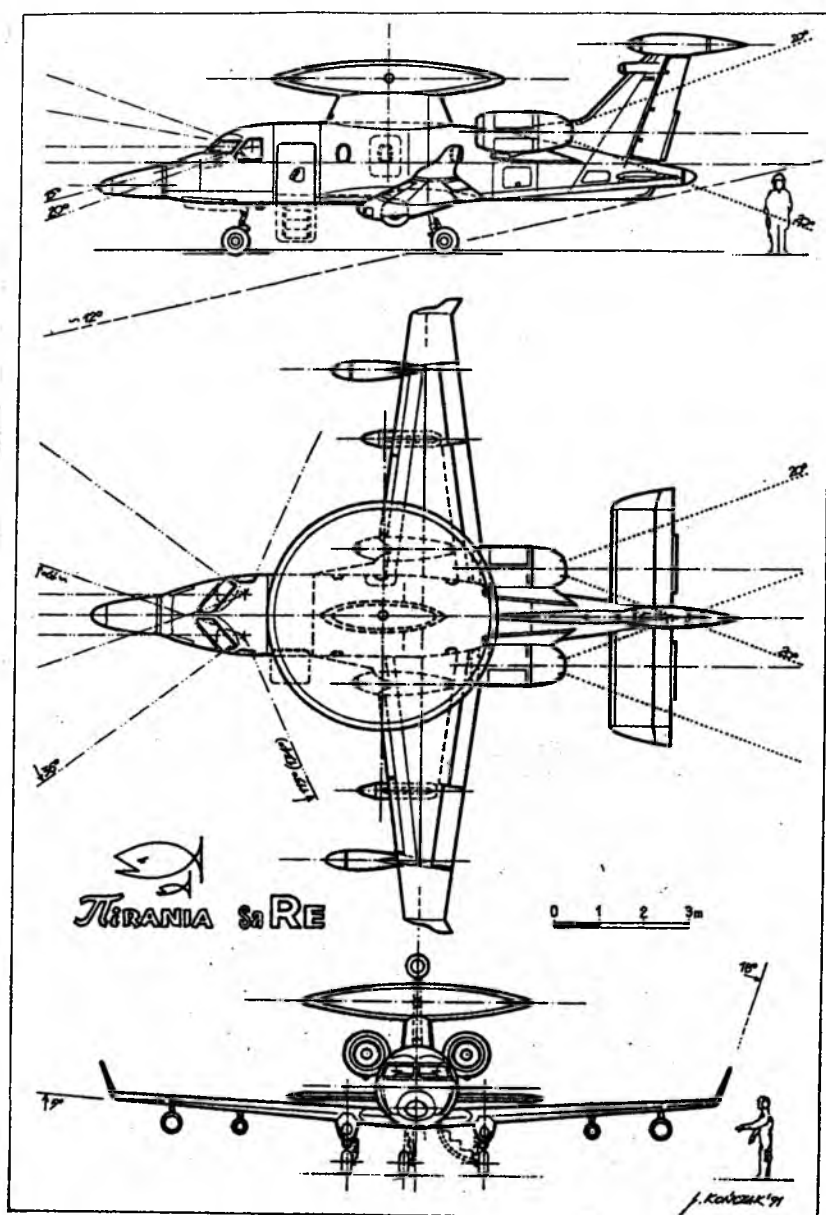
Rys. 3.



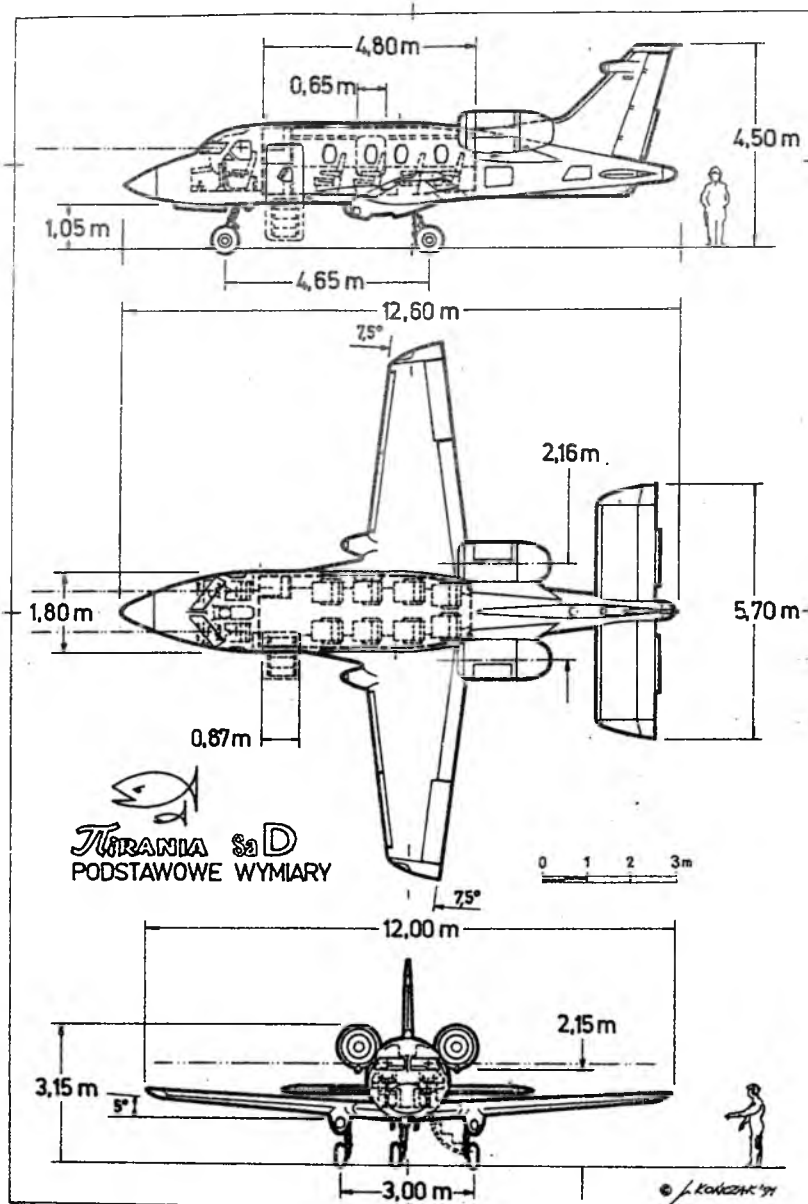
Rys. 4.



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.

SYMULACJA NUMERYCZNA PRACY LOTNICZEGO, TŁOKOWEGO ZESPOŁU NAPĘDOWEGO, ORAZ OCENA JEGO PRACY NA PODSTAWIE ANALIZY HARMONICZNEJ POZIOMU DRGAŃ¹

LUCYNA PYZIK

Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Rzeszów

WIESŁAW SOBIERAJ

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Opracowano metodykę symulacji numerycznej poprawnej pracy lotniczego silnika tłokowego, oraz symulację pracy silnika z różnymi rodzajami usterek. Opracowana metoda może ograniczyć zakres i częstotliwość przeglądów okresowych i wpłynąć na wydłużenie okresu międzynaprawczego. Pozwala na zmniejszenie kosztów eksploatacji, zmniejsza liczbę napraw, umożliwia bezpośrednią kontrolę przez pilota stanu technicznego zespołu napędowego.

W pracy rozpatrywano następujące problemy:

- analizę objawów wadliwej pracy zespołu napędowego ze względu na ich przyczyny i wpływ na widmo drgań,
- numeryczną symulację poprawnej i wadliwej pracy zespołu napędowego,
- numeryczną symulację widma drgań lotniczego silnika tłokowego typu "bokser" dla węzłów zamocowania silnika.

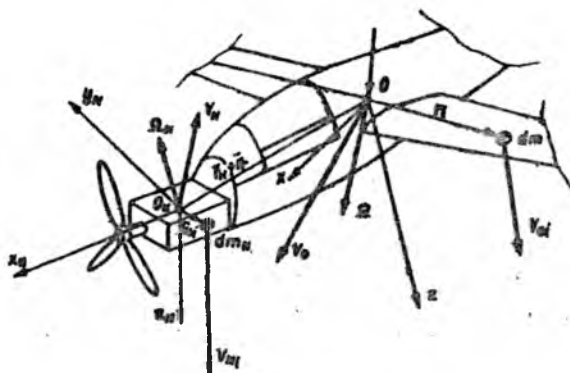
1. Wprowadzenie

Jedną z metod oceny stanu technicznego lotniczego, tłokowego zespołu napędowego może polegać na porównaniu widma drgań uzyskanego przez pomiar i analizę przyspieszeń w węzłach mocowania silnika z symulowanym numerycznym wzorcem jego poprawnej pracy. Jest to metoda umożliwiająca ocenę stanu technicznego zespołu napędowego nie tylko okresowo przez diagnostyka na ziemi, ale również bieżącą kontrolę przez pilota w czasie lotu. Wykorzystując komputer pokładowy pilot może nawet ustalić rodzaj i miejsce uszkodzenia. Metoda ta dla ustalenia usterki silnika nie wymaga ingerencji w jego wnętrze, wystarcza pomiar poziomu i widma drgań w węzłach mocowania silnika.

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

2. Analiza drgań zespołu napędowego zamocowanego na płatowcu

Aby przeprowadzić analizę drgań zespołu napędowego zamocowanego na płatowcu należy wyprowadzić równania ruchu tego zespołu. W naszych rozważaniach zespół napędowy traktowany jest jako bryła sztywna, zamocowana na podatnych podporach. Schemat zespołu płatowiec-silnik przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Schemat zespołu płatowiec-silnik

Równania ruchu zespołu napędowego zamocowanego na płatowcu wyprowadzone są w oparciu o metodę Lagrange'a II rodzaju i mają następującą postać [11]:

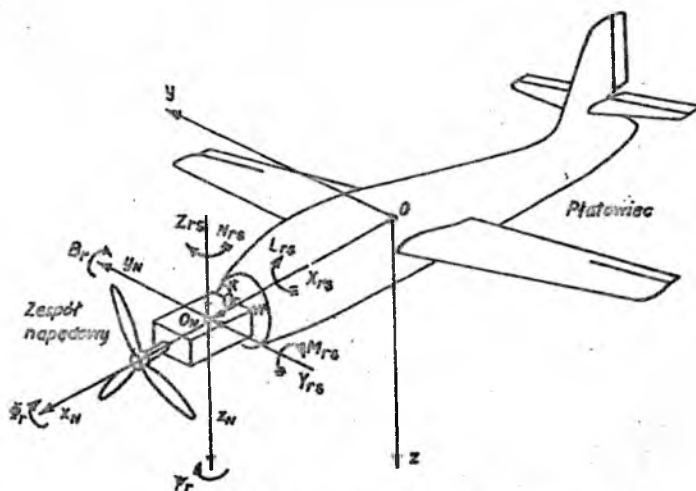
$$\begin{aligned}
 m_N \ddot{x}_T + \sum_{i=1}^n k_{xi} x_T + \sum_{i=1}^n c_{xi} \dot{x}_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{xi} \theta_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{xi} \dot{\theta}_T &= 0, \\
 m_N \ddot{z}_T + \sum_{i=1}^n k_{zi} z_T + \sum_{i=1}^n c_{zi} \dot{z}_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{xi} \theta_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{xi} \dot{\theta}_T &= 0, \\
 I_{Ny} \ddot{\theta}_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{xi} x_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{xi} \dot{x}_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{zi} z_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{zi} \dot{z}_T + \\
 + \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 k_{xi} + \sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 k_{xi} \right) \theta_T + \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 c_{xi} + \sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 c_{xi} \right) \dot{\theta}_T &= 0, \\
 m_N \ddot{y}_T + \sum_{i=1}^n k_{yi} y_T + \sum_{i=1}^n c_{yi} \dot{y}_T - \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{yi} \varphi_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{yi} \dot{\varphi}_T + \\
 + \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{yi} \psi_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{yi} \dot{\psi}_T &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
I_{Nz} \ddot{\varphi}_T - \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{yi} y_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{yi} \dot{y}_T + \left(\sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 c_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 c_{zi} \right) \dot{\varphi}_T + \\
+ \left(\sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 k_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 k_{zi} \right) \varphi_T - \sum_{i=1}^n z_{Ni} x_{Ni} k_{yi} \psi_T - \\
- \sum_{i=1}^n z_{Ni} x_{Ni} c_{yi} \dot{\psi}_T = 0, \\
I_{Nz} \ddot{\psi}_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{yi} y_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{yi} \dot{y}_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} z_{Ni} k_{yi} \varphi_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} z_{Ni} c_{yi} \dot{\varphi}_T + \\
+ \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 k_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 k_{zi} \right) \psi_T + \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 c_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 c_{zi} \right) \dot{\psi}_T = 0.
\end{aligned}$$

2.1. Równania statycznych odkształceń układu

Wstępne odkształcenia statyczne zawieszenia wykorzystano jako warunki początkowe do dynamicznej symulacji drgań zespołu napędowego.

Schemat obciążeń statycznych przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Schemat obciążeń statycznych

Równania równowagi statycznej wyprowadzono w oparciu o aparat mechaniki

klasycznej. Równania te mają postać [10]:

$$\begin{aligned}
 x_{Ts} \sum_{i=1}^n k_{xsi} + \theta_{Ts} \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{xsi} &= X_{Ts}, \\
 y_{Ts} \sum_{i=1}^n k_{ysi} - \varphi_{Ts} \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{ysi} + \psi_{Ts} \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{ysi} &= Y_{Ts}, \\
 z_{Ts} \sum_{i=1}^n k_{zsi} - \theta_{Ts} \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{zsi} &= Z_{Ts}, \\
 -y_{Ts} \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{ysi} + \varphi_{Ts} \left(\sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 k_{ysi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 k_{zsi} \right) - \psi_{Ts} \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{ysi} &= L_{Ts}, \\
 -z_{Ts} \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{zsi} + x_{Ts} \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{xsi} + \theta_{Ts} \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 k_{zsi} + \sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 k_{xsi} \right) &= M_{Ts}, \\
 y_{Ts} \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{ysi} + \psi_{Ts} \left(\sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 k_{xsi} + \sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 k_{ysi} \right) - \varphi_{Ts} \sum_{i=1}^n x_{Ni} z_{Ni} &= N_{Ts}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2. Równania dynamicznej równowagi zespołu napędowego

Wytwarzane przez zespół napędowy siły i momenty powodują ruch wymuszony układu. W rozpatrywanym przypadku przebiegi sił i momentów wytwarzanych przez silnik odwzorowano przebiegami opisanymi za pomocą szeregów Fouriera.

Równania ruchu wymuszonego przyjmują postać [10]:

$$\begin{aligned}
 m_N \ddot{x}_T + \sum_{i=1}^n k_{xi} x_T + \sum_{i=1}^n c_{xi} \dot{x}_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{xi} \theta_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{xi} \dot{\theta}_T &= X_T, \\
 m_N \ddot{z}_T + \sum_{i=1}^n k_{zi} z_T + \sum_{i=1}^n c_{zi} \dot{z}_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{zi} \theta_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{zi} \dot{\theta}_T &= Z_T, \\
 I_{Ny} \ddot{\theta}_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{xi} x_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{xi} \dot{x}_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{zi} z_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{zi} \dot{z}_T + \\
 + \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 k_{zi} + \sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 k_{xi} \right) \theta_T + \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 c_{zi} + \sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 c_{xi} \right) \dot{\theta}_T &= M_T, \\
 m_N \ddot{y}_T + \sum_{i=1}^n k_{yi} y_T + \sum_{i=1}^n c_{yi} \dot{y}_T - \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{yi} \varphi_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{yi} \dot{\varphi}_T + \\
 + \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{yi} \psi_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{yi} \dot{\psi}_T &= Y_T,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
I_{Nz} \ddot{\varphi}_T - \sum_{i=1}^n z_{Ni} k_{yi} y_T + \sum_{i=1}^n z_{Ni} c_{yi} \dot{y}_T + \left(\sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 c_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 c_{zi} \right) \dot{\varphi}_T + \\
+ \left(\sum_{i=1}^n z_{Ni}^2 k_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 k_{zi} \right) \varphi_T - \sum_{i=1}^n z_{Ni} x_{Ni} k_{yi} \psi_T - \\
- \sum_{i=1}^n z_{Ni} x_{Ni} c_{yi} \dot{\psi}_T = L_T, \\
I_{Nz} \ddot{\psi}_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} k_{yi} y_T + \sum_{i=1}^n x_{Ni} c_{yi} \dot{y}_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} z_{Ni} k_{yi} \varphi_T - \sum_{i=1}^n x_{Ni} z_{Ni} c_{yi} \dot{\varphi}_T + \\
+ \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 k_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 k_{zi} \right) \psi_T + \left(\sum_{i=1}^n x_{Ni}^2 c_{yi} + \sum_{i=1}^n y_{Ni}^2 c_{xi} \right) \dot{\psi}_T = N_T.
\end{aligned}$$

2.3. Metodyka rozwiązywania równań

Wszystkie równania rozwiązano za pomocą metody Rungego-Kutty IV rzędu. Klasa metod Rungego-Kutty jest zdefiniowana przez rodzinę funkcji Φ o postaci [2]:

$$\Phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^r c_i k_i, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
k_i = k_i(x, y; h) = f\left(x + h \sum_{j=1}^r b_{ij}, y + h \sum_{j=1}^r b_{ij} k_j\right) \\
\text{dla } i = 1, 2, \dots, r,
\end{aligned}$$

zależnych parametrycznie od wielkości c_i, b_{ij} , dla $i, j = 1, 2, \dots, r$. Jeżeli wszystkie $b_{ij} = 0$ dla $j \geq i$, gdy $i = 1, 2, \dots, r$, to równanie definiujące wielkość k_i (przy ustalonych x i y) redukują się do postaci:

$$k_i = f\left(x + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, y + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, r. \quad (2.5)$$

Stanowią więc układ zależności rekurencyjnych, liniowych ze względu na kolejne k_i . Podstawiając za Φ funkcję:

$$\Phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^4 c_i k_i(x, y; h), \quad (2.6)$$

gdzie k_i są określone wzorem (2.5), dostajemy dla $j = 0, 1, 2, 3$ następujące warunki na szukane współczynniki metody Rungego-Kutty:

$$\frac{\partial^j \Phi(x, y; 0)}{\partial h^j} = \sum_{i=1}^4 c_i \frac{\partial^j k_i(x, y; 0)}{\partial h^j} = \frac{1}{j+1} \frac{d^j f}{dx^j}(x, y). \quad (2.7)$$

Przykładowo, dla $j = 0$ jest to równość:

$$\sum_{i=1}^4 c_i = 1.$$

Uwzględniając pozostałe warunki i przyjmując następujące wielkości pomocnicze:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_{21}, & a_3 &= b_{32}, & a_2 &= b_{31} + a_3, \\ a_6 &= b_{43}, & a_5 &= b_{42}, & a_4 &= b_{41} + a_5 + a_6, \end{aligned}$$

otrzymujemy układ równań nieliniowych o postaci:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1, \\ c_2 a_1 + c_3 a_2 + c_4 a_4 &= \frac{1}{2}, \\ c_2 a_1^2 + c_3 a_2^2 + c_4 a_4^2 &= \frac{1}{3}, \\ c_3 a_1 a_3 + c_4 (a_1 a_5 + a_2 + a_2 a_6) &= \frac{1}{6}, \\ c_2 a_1^3 + c_3 a_2^3 + c_4 a_4^3 &= \frac{1}{4}, \\ c_3 a_1 a_2 a_3 + c_4 a_4 (a_1 a_5 + a_2 a_6) &= \frac{1}{8}, \\ c_3 a_1^2 a_3 + c_4 (a_1^2 a_5 + a_2^2 a_6) &= \frac{1}{12}, \\ c_4 a_1 a_3 a_6 &= \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Rozwiązanie tego układu w ogólnym przypadku jest trudne. Najczęściej rozważa się jednoparametrową rodzinę rozwiązań takich, że:

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{2-a}{3}, \quad c_3 = \frac{a}{3},$$

oraz:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \frac{1}{2}, & a_3 &= \frac{1}{2a}, & a_4 &= 1, \\ a_5 &= 1-a, & a_6 &= a. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić przez podstawienie, że dla dowolnego $a \neq 0$ wielkości te spełniają układ (2.7). W szczególności, kładąc $a = 1$, otrzymujemy tzw. klasyczną metodę Rungego-Kutty, czyli metodę czwartego rzędu określoną wzorami:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y; h) &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x, y), \\ k_2 &= f(x + 0.5h, y + 0.5hk_1), \\ k_3 &= f(x + 0.5h, y + 0.5hk_2), \\ k_4 &= f(x + h, y + hk_3).\end{aligned}\tag{2.9}$$

3. Przykład numerycznej symulacji drgań wytwarzanych przez zespół napędowy

Wykorzystując zależności przedstawione w rozdziale 2 i schemat zamocowania silnika, przedstawiony na rys.1, opracowano algorytm obliczeń umożliwiający wyznaczenie przemieszczeń, a następnie przyspieszeń występujących w węzłach mocowania silnika na płatowcu.

Przykładowe obliczenia przeprowadzono dla silnika PZL-F6 Franklin z przeciwsobnie ustawionymi cylindrami (typu bokser) produkowanego w PZL WSK Rzeszów (zamocowanego na płatowcu samolotu PZL-M26 "ISKIERKA" [4]).

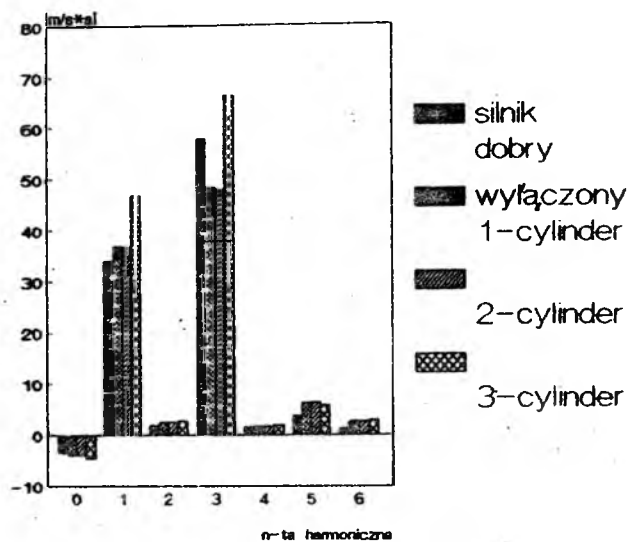
Równania (2.1) rozwiązujemy metodą Rungego-Kutty IV rzędu ze śledzeniem błędu (wg. Toolbox Numeric Methods) [1]. W wyniku rozwiązania tych równań otrzymujemy przemieszczenia w węzłach zamocowania silnika. Przy pomocy programu różniczkującego przemieszczenia obliczamy przyspieszenia.

Przeprowadzone obliczenia testujące umożliwiają przede wszystkim wyznaczenie stopni swobody będących najlepszymi nośnikami informacji diagnostycznej, a tym samym przyspieszeń liniowych i kątowych, które mogą być najefektywniej wykorzystane do oceny stanu technicznego zespołu napędowego. Rozpatrując spektrogramy amplitud i kątów przesunięć fazowych dla przyspieszeń wokół i wzdłuż osi przyjętego układu współrzędnych silnika dobrego i silnika z przestawionym lub przesuniętym zapłonem można stwierdzić, że do oceny stanu technicznego zespołu napędowego należy wykorzystać (dla silnika z przeciwsobnymi cylindrami) przyspieszenia kątowe wokół osi OX i osi OZ oraz przyspieszenia wzdłuż osi OY . Wniosek powyższy jest zgodny z fizyczną interpretacją zjawisk zachodzących w rozpatrywanym silniku typu "bokser".

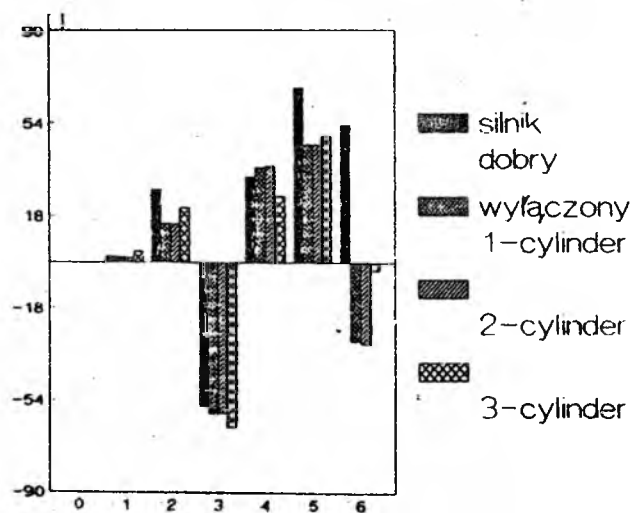
Przeprowadzono również obliczenia dla silnika sprawnego (dobrego), oraz po wyłączeniu z pracy jednego z cylindrów.

Wnioski, które można wyciągnąć na podstawie analizy spektrogramów przyspieszeń (rys.3 ÷ 11) przedstawiamy poniżej.

Przyspieszenia wzdłuż osi Y
Amplitudy

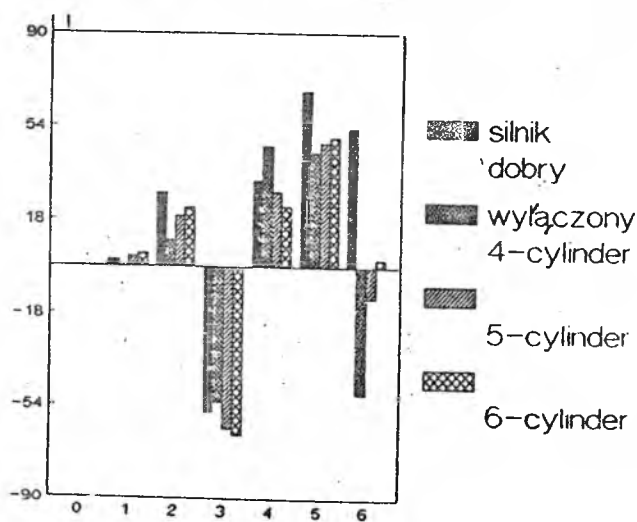
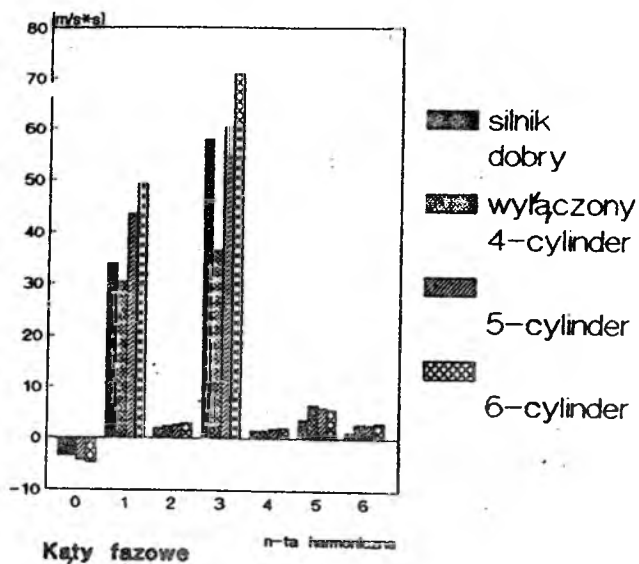


Kąty fazowe



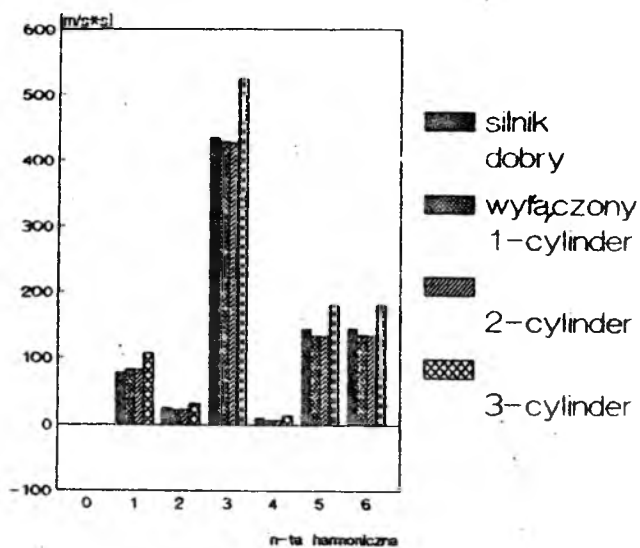
Rys. 3.

Przyspieszenia wzdłuż osi Y
Amplitudy

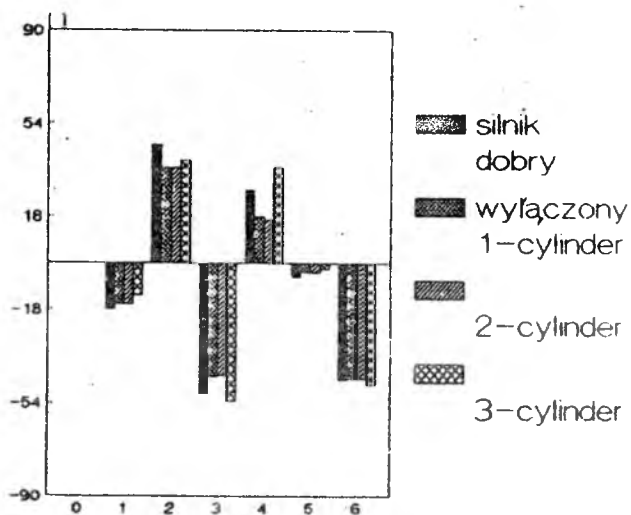


Rys. 4.

Przyspieszenia wokół osi X
Amplitudy

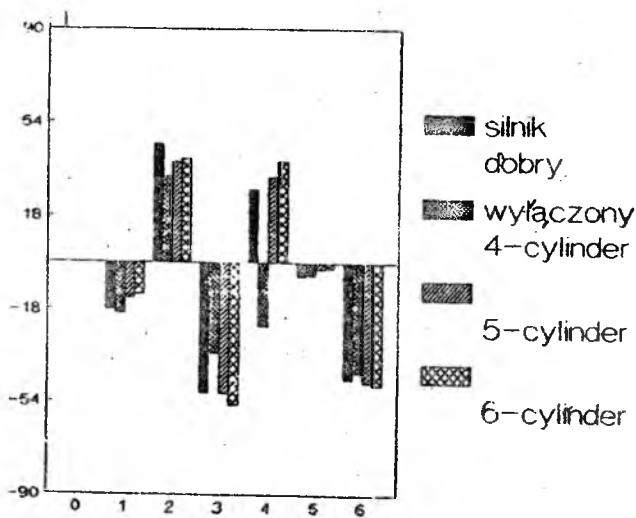
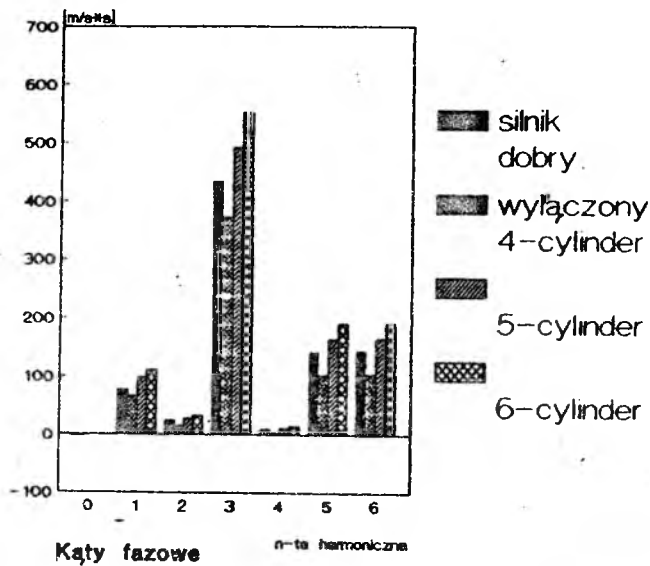


Kąty fazowe



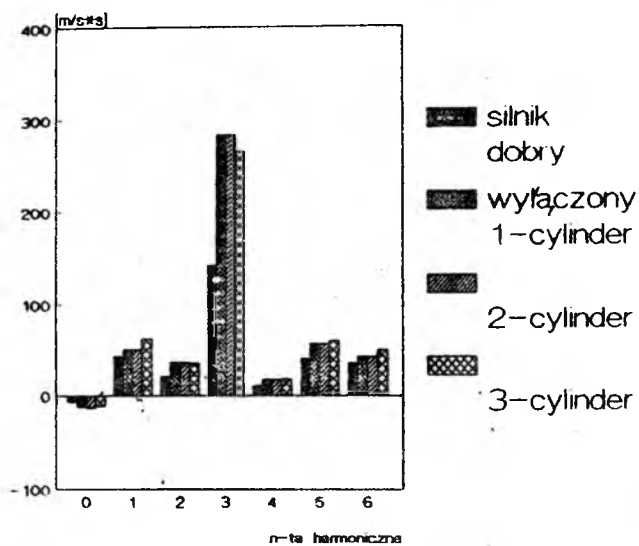
Rys. 5.

Przyspieszenia wokół osi X
Amplitudy

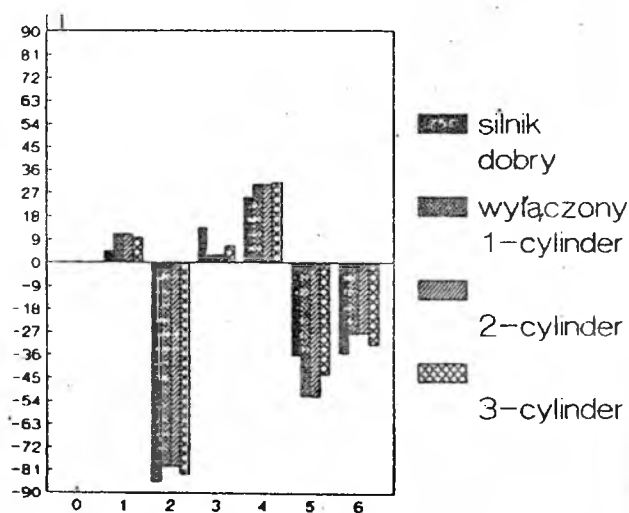


Rys. 6.

Przyspieszenia wokół osi Z Amplitudy

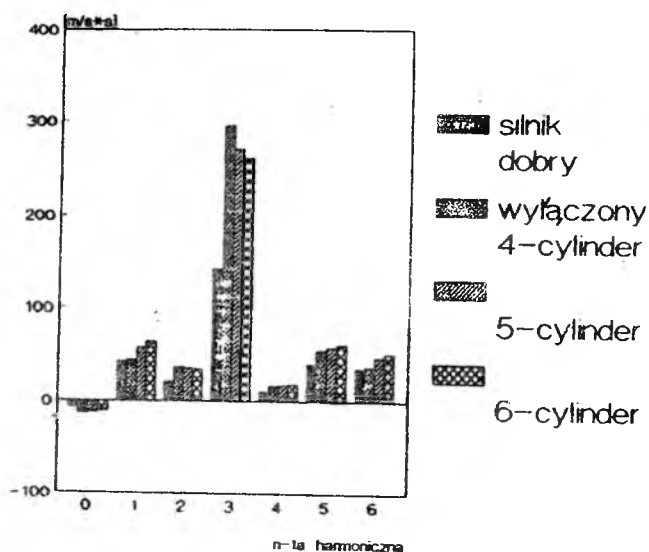


Kąty fazowe

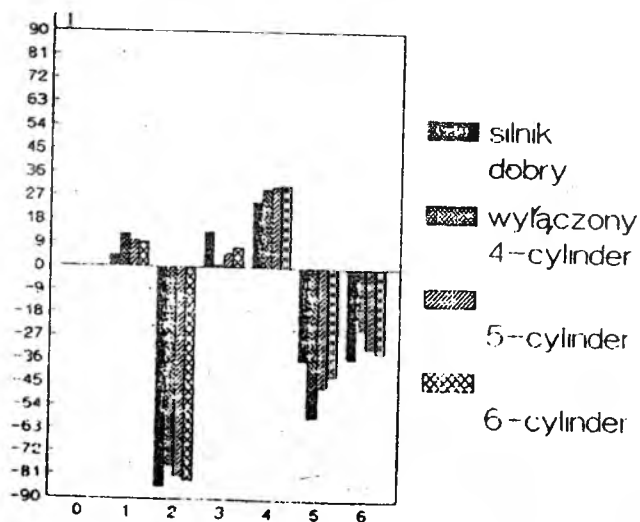


Rys. 7.

Przyspieszenia wokół osi Z
Amplitudy



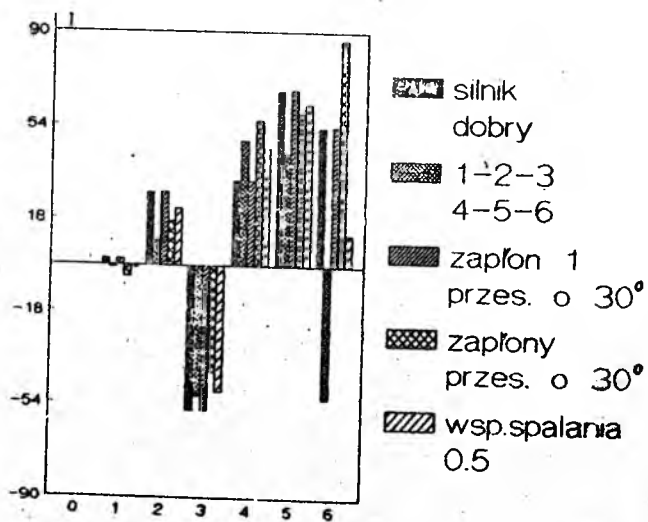
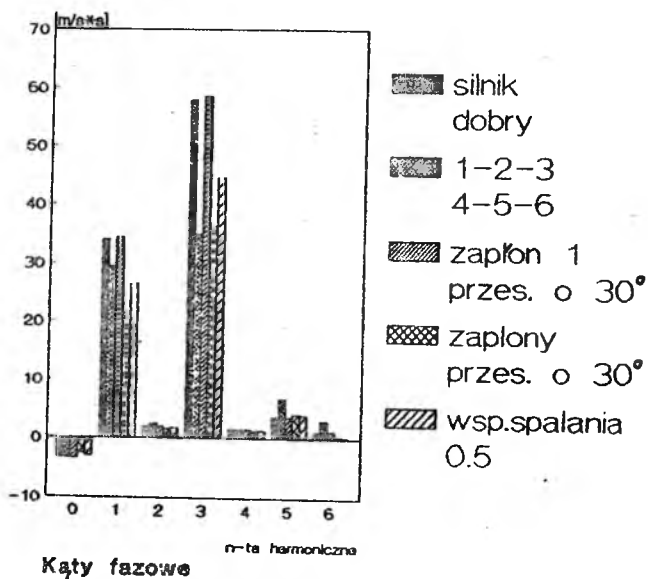
Kąty fazowe



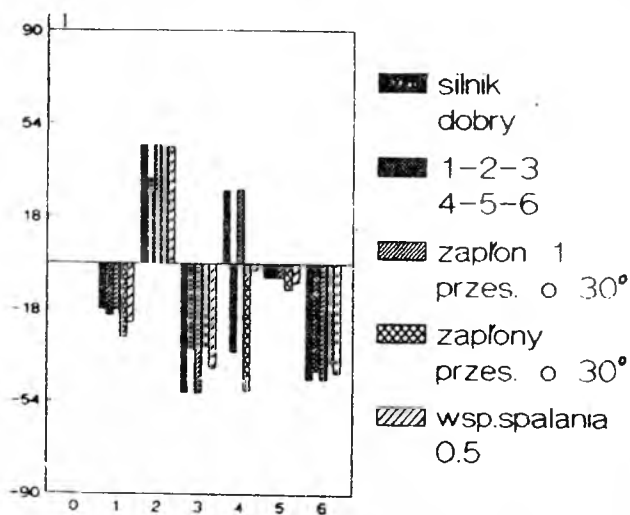
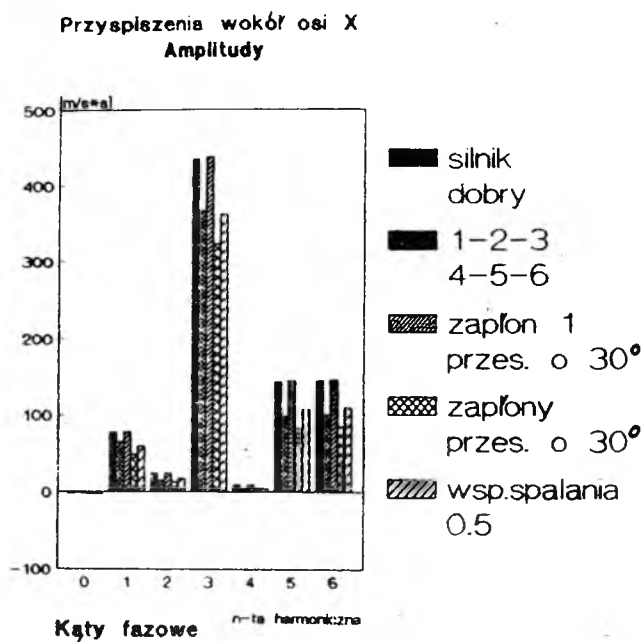
Rys. 8.

- W chwili wyłączenia 1-szego lub 2-giego cylindra amplituda 3-ciej harmonicznej w kierunku osi Y (rys.3) zmniejsza się o około 20% natomiast kąt przesunięcia fazowego 2-giej harmonicznej zmniejsza się o połowę. Kąt przesunięcia fazowego 6-tej harmonicznej przyjmuje wartość ujemną równą połowie wartości kąta przesunięcia fazowego silnika pracującego prawidłowo. Zmiana wartości amplitud wokół osi X (rys.5) jest nieznaczna, natomiast kąt przesunięcia fazowego 4-tej harmonicznej zmniejsza się o około 50%. Amplituda przyspieszeń wokół osi Z (rys.7), 3-ciej harmonicznej wzrasta o około 100% natomiast kąt przesunięcia fazowego 3-ciej harmonicznej zmniejsza się o 60% a 5-tej harmonicznej zwiększa się o około 30%.
- Wyłączenie z pracy 3-ciego cylindra spowoduje w kierunku osi Y (rys.3) zmniejszenie kąta przesunięcia fazowego 5-tej harmonicznej o około 30% oraz zmniejszenie kąta przesunięcia fazowego 6-tej harmonicznej o około 100%. Wokół osi X (rys.5) zwiększają się amplitudy przyspieszeń 3-ciej, 5-tej i 6-tej harmonicznej o około 20%, przy czym kąty przesunięcia fazowego zmieniają się nieznacznie. Wokół osi Z (rys.7) amplituda 3-ciej harmonicznej wzrasta 2 krotnie.
- Wyłączenie z pracy 4-tego cylindra spowoduje wzrost amplitudy przyspieszeń wokół osi Z (rys.8) 3-ciej harmonicznej o 100% oraz zmniejszenie wartości kąta przesunięcia fazowego 5-tej harmonicznej o około 50%. Na spektrogramie przyspieszeń wokół osi X (rys.4) następuje zmiana znaku i wartości (o około 90%) kąta przesunięcia fazowego 4-tej harmonicznej. W kierunku osi Y (rys.4) amplituda przyspieszeń zmniejsza się o około 40%, natomiast kąt fazowy 6-tej harmonicznej przyjmuje tą samą wartość z przeciwnym znakiem.
- Po wyłączeniu z pracy 6-tego cylindra wzrasta o około 70% wartość amplitudy 3-ciej harmonicznej przyspieszeń wokół osi Z (rys.8). W kierunku osi Y (rys.4) wzrasta wartość 1-szej i 3-ciej harmonicznej o około 30% oraz wartość kąta fazowego 6-tej harmonicznej zmniejsza się do wartości około 10% wartości kąta przesunięcia fazowego silnika poprawnie pracującego.
- Przetawienie zapłonu do kolejności pracy 1-2-3-4-5-6 powoduje, że wartość amplitudy przyspieszeń wokół osi Z (rys.11) 3-ciej harmonicznej wzrasta 2-krotnie, natomiast kąt przesunięcia fazowego zmniejsza się do zera. Jednocześnie wartość kąta przesunięcia fazowego 4-tej harmonicznej dla przyspieszenia wokół osi X (rys.10) przyjmuje 110% wartości silnika dobrego przy czym zmienia się znak na ujemny. W kierunku osi Y (rys.9) zmienia się znak kąta przesunięcia fazowego 6-tej harmonicznej ale wartość pozostaje ta sama. Kąt przesunięcia fazowego 2-giej harmonicznej zmniejsza

Przyspieszenia wzdłuż osi
Y- Amplitudy

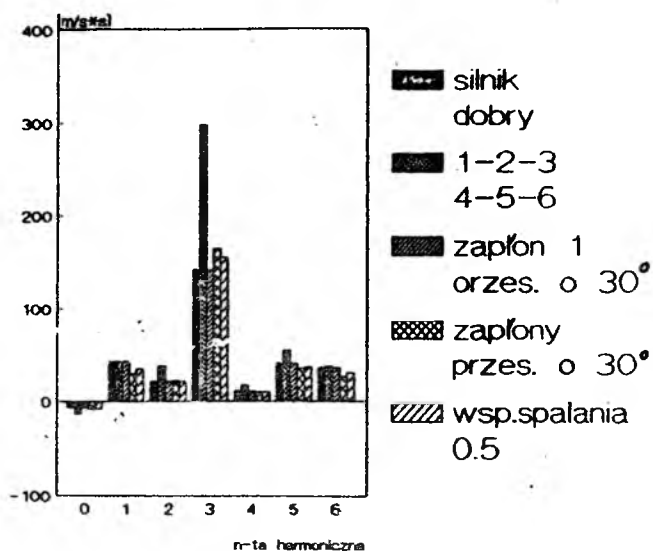


Rys. 9.

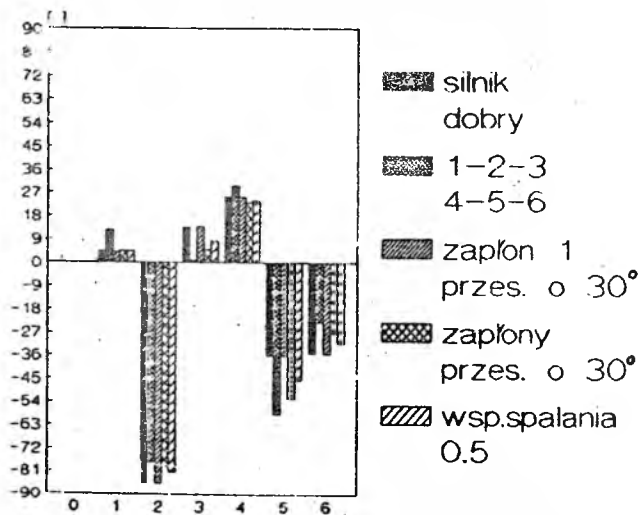


Rys. 10.

Przyspieszenia wokół osi
Z- Amplitudy



Kąty fazowe

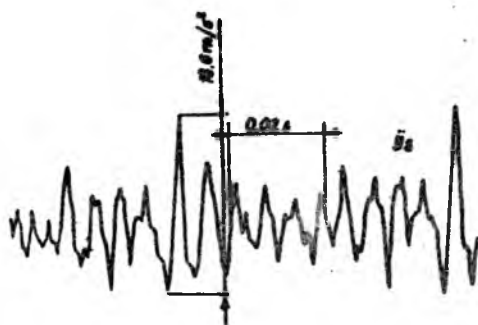


Rys. 11.

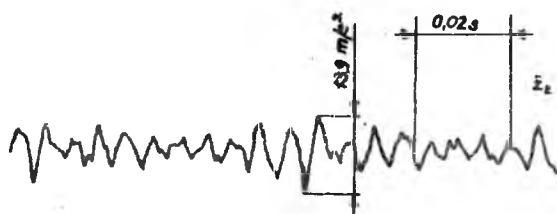
się 2-krotnie. Amplituda przyspieszeń 3-ciej harmonicznej zmniejsza się o połowę.

- Zmiana kąta wyprzedzenia zapłonu o 30° w pierwszym cylindrze nie powoduje zmiany wartości przyspieszeń w żadnym kierunku ani wokół żadnej osi.
- Przyjmując współczynnik spalania 0.5 dla wszystkich cylindrów uzyskujemy zmniejszenie wartości kąta przesunięcia fazowego wokół osi X (rys.10) 4-tej harmonicznej do około zera. W kierunku osi Y (rys.9) wartość kąta fazowego 6-tej harmonicznej zmniejsza się o około 70%.

4. Wykorzystanie numerycznej symulacji pracy zespołu napędowego do oceny jego stanu technicznego

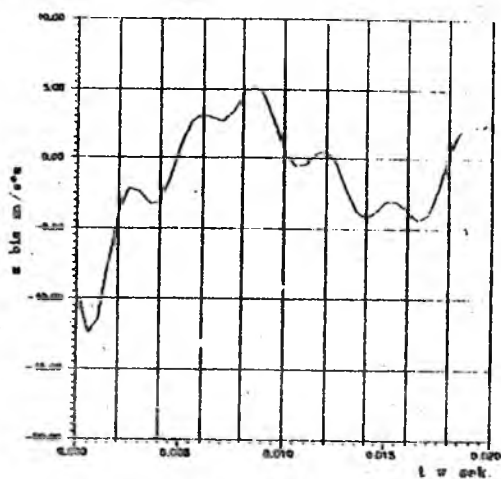
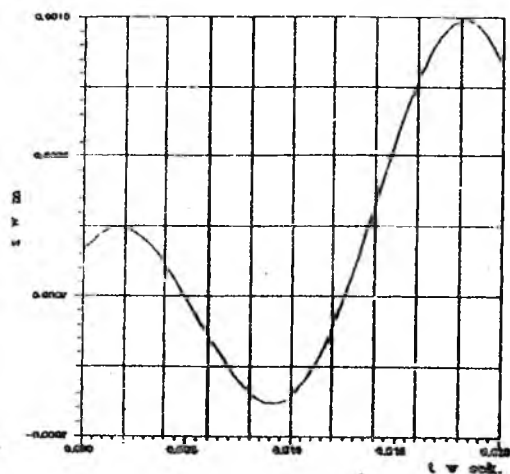


Rys. 12. Przebieg przyspieszeń w kierunku osi Y mierzonych doświadczalnie

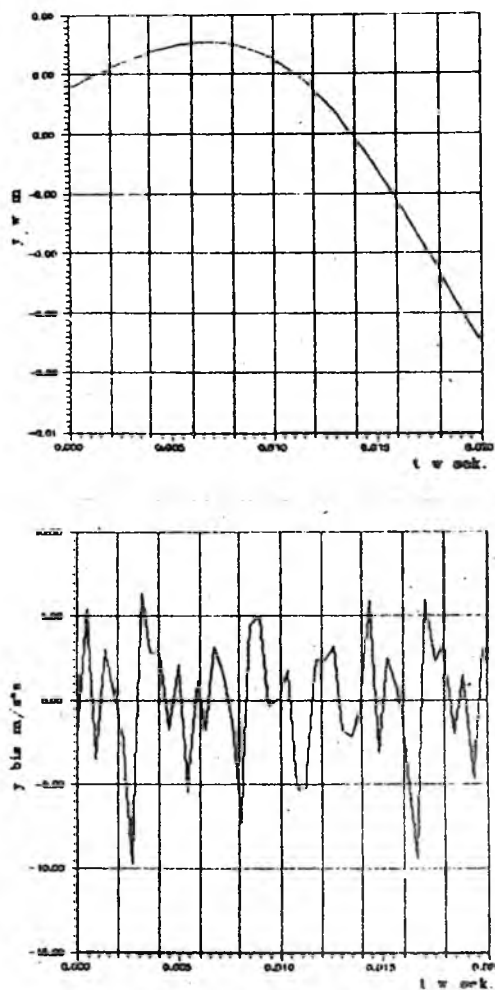


Rys. 13. Przebieg przyspieszeń w kierunku osi Z mierzonych doświadczalnie

Wykorzystanie numerycznej symulacji pracy zespołu napędowego do oceny jego stanu technicznego może polegać na porównaniu spektrogramów analizy harmonicznej obiektu rzeczywistego z jego numerycznym wzorcem poprawnej pracy. W celu przedstawienia poprawności rozwiązania problemu, wykorzystano uzyskane

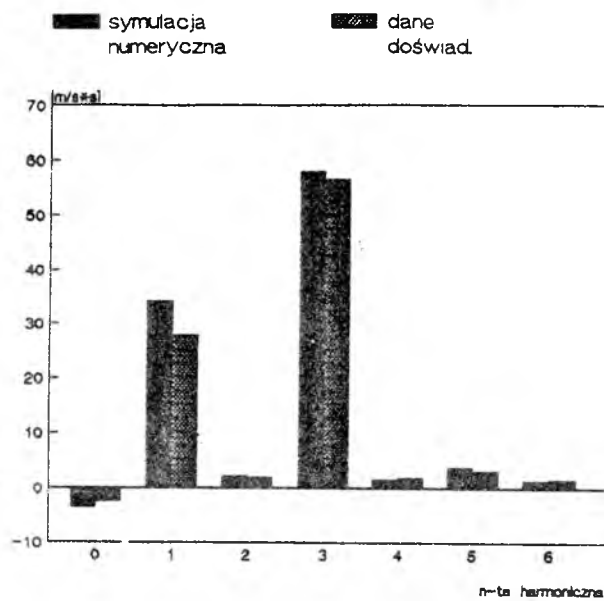


Rys. 14. Przebieg przemieszczeń i przyspieszeń w kierunku osi Z otrzymany w wyniku symulacji numerycznej

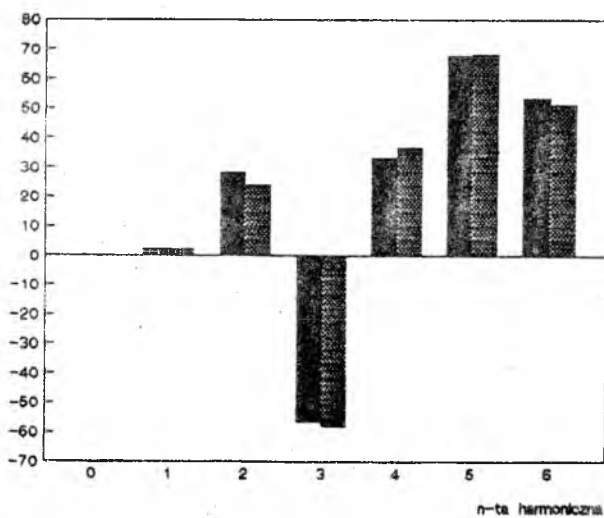


Rys. 15. Przebieg przemieszczeń i przyspieszeń w kierunku osi Y otrzymany w wyniku symulacji numerycznej

*Przyspieszenia w kierunku osi Y
Amplitudy*



Kąty fazowe



Rys. 16.

przez M. Jeża w Instytucie Lotnictwa wyniki badań [3] i porównano je z numerycznym wzorcem pracy silnika.

Rysunek 12 przedstawia przebieg przyspieszeń w kierunku osi Y mierzonych doświadczalnie przy warunkach eksploatacyjnych $n = 2200$ obr/min. Na rysunku 13 pokazano przebieg przyspieszeń w kierunku osi Z . Pomiarów wykonano wielokanałowym magnetofonem pomiarowym firmy Schlumberger typ Me nr 0230. Przebiegi przemieszczeń i przyspieszeń obliczonych w wyniku symulacji numerycznej przedstawiają rysunki 14 i 15.

Przeprowadzając analizę harmoniczną danych doświadczalnych (próbkowanie przebiegu przyspieszeń w przedziale $0 \div 0.02$ sek., co 0.0001 sek.) i wyników symulacji numerycznej, porównujemy wartości amplitud i kątów przesunięć fazowych. Wyniki tego porównania przedstawia rysunek 16.

Z porównania przebiegów przyspieszeń obliczonych numerycznie i wyznaczonych doświadczalnie wynika, że uzyskane wyniki są zgodne. Uzyskane rezultaty pozwalają stwierdzić, że opracowana metodyka numerycznej symulacji pracy silnika jest poprawna, a wyniki są zgodne z doświadczeniem.

5. Wnioski ogólne

Przedstawioną metodę można wykorzystać w ocenie stanu technicznego lotniczego zespołu napędowego, przy dowolnie rozmieszczonych węzłach zamocowania na płatowcu oraz przy dowolnych rodzajach amortyzatorów. Metoda ta wymaga określenia dla danego silnika oraz danego rodzaju mocowania wzorca numerycznego poprawnej pracy i wzorca numerycznego wszelkiego rodzaju wadliwej pracy. Gdy w pamięci komputera pokładowego znajdują się określone powyżej wzorce, komputer może porównać je z przebiegami rzeczywistych drgań zespołu napędowego, określając rodzaj usterki silnika podczas lotu czy w czasie prób na ziemi. Wykazano że nośnikiem informacji diagnostycznej jest przebieg przyspieszeń wokół osi X i Z oraz w kierunku osi Y . Tak więc celem jest montowanie czujników w tych kierunkach. W pracy uwzględniono wymuszenia ruchu zespołu napędowego pochodzące jedynie od silnika. Dokładność tej metody w warunkach stacjonarnych przy obrotach nominalnych jest duża, co wynika z porównania badań doświadczalnych i symulacji numerycznej.

Literatura

1. BIELECKI J., 1988, *Rozszerzony Turbo Pascal wersja 4.0*, WKiŁ, Warszawa
2. DRYJA M., JANKOWSCY J. I. M., 1988, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, WNT, Warszawa
3. JEŻ M., 1987, *Wibroizolacja systemu-zespół napędowy na ruchomym obiekcie*, Prace Instytutu Lotnictwa nr 110-111, Warszawa
4. JEŻ M., 1980, *Analiza drgań silnika Franklin 4 i zawieszenia go na płatowcu PZL-110 Koliber*, Sprawozdanie Instytutu Lotnictwa nr 5/BW-WP/80, Warszawa
5. JEŻ M., DZIAWGO M., 1979, *Badania dynamiczne stanowiska hamowni silników tłokowych*, Prace Instytutu Lotnictwa nr 79, Warszawa
6. JEŻ M., 1987, *Modele obliczeniowe i badania doświadczalne zawieszenia lotniczego silnika tłokowego*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1-2, PWN, Warszawa
7. JEŻ M., 1986, *Symulacja cyfrowa wymuszonych, asymetrycznych drgań tłokowego silnika lotniczego*, XII Sympozjum "Drgania w układach fizycznych", Poznań - Błażejewko
8. JEŻ M., KORSAK T., MOZER I., SKOMIAŁ F., 1977, *Synteza obciążeń dynamicznych silników rzędowych*, Prace Instytutu Lotnictwa nr 71, Warszawa
9. JEŻ M., 1987, *Zagadnienie wibroizolacji lotniczych silników tłokowych*, Prace Instytutu Lotnictwa nr 108, Warszawa
10. KAMIŃSKI E., POKORSKI J., 1983, *Dynamika zawiesznień i układów napędowych pojazdów samochodowych*, WKiŁ, Warszawa
11. KAMIŃSKI E., 1980, *Podstawy dynamiki maszyn*, Wyd. Politechniki Warszawskiej
12. SOLECKI L., 1983, *Hałas mechaniczny jako wskaźnik diagnostyczny stanu technicznego zespołów silnika spalinowego*, Silniki Spalinowe, 1-2, 21-24
13. ŻÓŁTOWSKI B., 1984, *Wibroakustyczna ocena stanu technicznego silnika spalinowego*, Auto-Technika Motoryzacyjna, 3, 2-4
14. SCHIFFBÄNKER H., THIEN G. E., 1988, *Automatische Gütekontrolle an Verbrennungsmotoren auf Basis von Schwingungsinformationen*, MTZ, 49, 2, 73-80



CENTRUM KSZTAŁCENIA JĘZYKOWEGO KADR BANKOWYCH I FINANSOWYCH

Centrum prowadzi kształcenie językowe – języki angielski i niemiecki, kadr bankowych od poziomu podstawowego do zaawansowanego. Nasi absolwenci bez problemów zdają egzaminy resortowe, a najlepsi są przygotowani do zdania egzaminu Cambridge Certificate – pierwszy stopień. Centrum działa trzeci rok, a najwyższy poziom kształcenia ukończyło 330 osób. Naszymi klientami są PKO Bank Państwowy, Bank PEKAO S.A., Bank Handlowy, Powszechny Bank Kredytowy S.A. Bank Gospodarki Żywnościowej i wiele innych.

Kształcenie odbywa się w ośrodku szkoleniowym oddalonym od centrum Warszawy o 13 km.

Centrum posiada specjalistyczne wyposażenie dydaktyczne znacznie ułatwiające i przyspieszające naukę języków. Programy kształcenia zostały opracowane przy współpracy angielskich partnerów.

Kadrę Centrum stanowią specjaliści językowi z jednej z najlepszych firm językowych Europy – EUROCENTRES

oraz pracownicy Uniwersytetu Warszawskiego, Szkoły Głównej Handlowej i kilku innych szkół wyższych.

Zajęcia organizowane są przy pomocy różnorodnych technik łącznie z wykorzystaniem komputerów, sprzętu audiowizualnego oraz SITA LEARNING SYSTEM.

Kursy organizowane są w układzie trzydniowych, tygodniowych i dwutygodniowych zjazdów. Terminy zjazdów i ich ilość dostosowana jest do potrzeb klienta i poziomu uczestników. Podstawowe formy kształcenia to kurs specjalistyczny, który trwa 560 godzin i kurs podstawowy, który trwa 360 godzin.

Pod koniec 1992r. po raz pierwszy organizowane będą w Centrum miesięczne kursy przygotowawcze do egzaminów Cambridge Certificate – pierwszy i drugi stopień.

W IV kwartale 1992r. również po raz pierwszy wspólnie z Polskim Biurem Podróży „ORBIS” S.A. rozpoczniemy pełny zestaw kursów dla pracowników branży turystycznej. Kursy te odbywać się będą na poziomie podstawowym, średniozaawansowanym i specjalistycznym.

00-828 WARSZAWA
AL. JANA PAWŁA II NR 13
TEL. 20-25-51, 20-03-51/261
FAX 24-35-65

ANALIZA WPŁYWU AUTOPILOTA NA RUCHY WŁASNE ŚMIGŁOWCA JEDNOWIRNIKOWEGO¹

ZBIGNIEW DŻYGADŁO

GRZEGORZ KOWALECZKO

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wstęp

Z wielu prac poświęconych dynamice ruchu śmigłowców wynika, że ruchy podłużne i boczne są wzajemnie sprzężone. Nie ma zgodności między autarami co do wielkości tych sprzężeń. Określenie wielkości sprzężeń jest szczególnie istotne w przypadku stosowania w śmigłowcu systemu automatycznego sterowania. Prawa sterowania takiego systemu są określone, dla śmigłowców eksploatowanych w Polsce, w oparciu o rozdzielone równania ruchu. Z tego powodu silne wzajemne sprzężenia między ruchami podłużnymi i bocznymi mogą prowadzić do niespełnienia przez system stawianych przed nim zadań. Ze względu na stwierdzoną niestateczność śmigłowców w ruchu podłużnym, a w pobliżu zawisu również niestateczność w ruchu bocznym, jednym z podstawowych zadań tych systemów jest stabilizacja układu śmigłowiec-autopilot w całym zakresie prędkości lotu. Zlekcjonowanie systemu automatycznego sterowania zmusza pilota do ciągłej reakcji w celu ustatecznienia śmigłowca.

W związku z powyższym sformułowano następujący problem:

- W jakim stopniu uwzględnienie sprzężeń wpływa na rozwiązania równań ruchu układu śmigłowiec-autopilot.

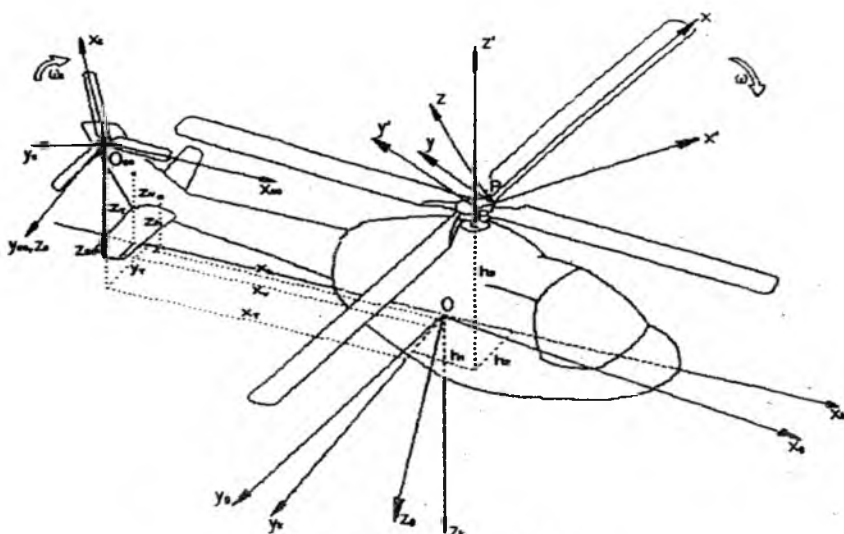
2. Ogólny model fizyczny i matematyczny problemu

2.1. Równania ruchu śmigłowca

W celu odpowiedzi na powyższe zagadnienia określono model fizyczny i matematyczny śmigłowca:

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

1. kadłub potraktowano jako bryłę sztywną,
2. uwzględniono ruch sztywnych łopat względem przegubu poziomego i osiowego,
3. śmigło ogonowe potraktowano jako bezprzegubowe i bezmasowe źródło siły ciągu równoważającego moment oporowy i zapewniającego sterowność kierunkową.



Rys. 1. Układy współrzędnych

Równania ruchu śmigłowca określone zostały w układzie związanym z kadłubem (rys.1) $0x_k y_k z_k$ (oś $0z_k$ jest równoległa do osi wału wirnika), zaś równania ruchu łopat wokół przegubu poziomego (oś Py) w układzie $Pxyz$ związanym z łopata. Równania te uzupełnione o związki kinematyczne:

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \\ \dot{\Phi} &= P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \Theta, \\ \dot{\Psi} \cos \Theta &= Q \sin \Phi + R \cos \Phi,\end{aligned}\quad (2.1)$$

dały następujący układ równań:

$$A \frac{dX}{dt} + B(X) = S(X, S), \quad (2.2)$$

gdzie X jest wektorem parametrów lotu o następujących elementach:

$$X = [U, V, W, P, Q, R, \beta_i, \Theta, \Phi, \Psi], \quad (2.3)$$

- U, V, W – prędkości liniowe środka masy kadłuba w układzie $0x_k y_k z_k$,
 P, Q, R – prędkości kątowe kadłuba w układzie $0x_k y_k z_k$,
 β_i – prędkość wahań łopaty względem przegubu,
 $i = 1, 2, 3, 4$,
 Θ, Φ, Ψ – kąty pochylenia, przechylenia i odchylenia kadłuba,
 S – wektor parametrów sterowania:

$$S = [\theta_0, \kappa_s, \eta_s, \phi_{s0}], \quad (2.4)$$

- θ_0 – kąt skoku ogólnego wirnika nośnego,
 κ_s – kąt sterowania w ruchu podłużnym,
 η_s – kąt sterowania w ruchu bocznym,
 ϕ_{s0} – kąt skoku ogólnego śmigła ogonowego,

zaś wektor S obejmuje siły uogólnione oraz prawe strony związków kinematycznych:

$$S = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z, M_{pi}, S_{11}, S_{12}, S_{13}]. \quad (2.5)$$

Określenie poszczególnych elementów macierzy A oraz wektora B , a także wektora S znaleźć można m.in. w pracach [1] i [3]. W pracy [3] siły i momenty aerodynamiczne wytwarzane przez wirnik nośny określone zostały w oparciu o quasiustalony model opływu profilu przy wykorzystaniu trzech różnych modeli pola prędkości indukowanej w płaszczyźnie wirnika nośnego: 1. rozkładu stałego, 2. rozkładu Glauerta, 3. modelu Manglera-Squire'a.

Pierwsze trzy równania układu (2.2) to równania równowagi sił, kolejne trzy są równaniami równowagi momentów, dalsze cztery są równaniami ruchu poszczególnych łopat wokół przegubów, ostatnie trzy są związkami kinematycznymi.

Równania (2.2) stanowią układ nieliniowych równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach. Układ ten został następnie uproszczony do postaci ze stałymi współczynnikami. W tym celu założono, że w ustalonym locie poziomym kąt β wahań łopaty jest sumą trzech wyrazów szeregu trygonometrycznego:

$$\beta = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi, \quad (2.6)$$

a następnie równania równowagi sił i momentów uśredniono względem azymutu łopaty obliczając średnie wartości ich prawych i lewych stron, tzn. całki o postaci:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{ij} \dot{x}_j d\psi, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_i d\psi, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_i d\psi, \quad (2.7)$$

Równanie ruchu łopaty względem przegubu uproszczono obliczając następujące

całki lewej i prawej strony równania względem azymutu łopaty:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\Psi, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \sin \Psi d\Psi, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \cos \Psi d\Psi. \quad (2.8)$$

Otrzymano układ trzech nieliniowych równań algebraicznych wiążących współczynniki a_0 , a_1 i b_1 wyrażenia (2.6). Związki kinematyczne nie ulegają zmianie.

Tak uproszczony układ równań ruchu zlinearyzowano w oparciu o metodę małych zaburzeń otrzymując ostatecznie uproszczony zlinearyzowany układ o następującej postaci:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

gdzie:

$\mathbf{x} = [u, v, w, p, q, r, \theta, \phi, \psi]$ – wektor przyrostów parametrów lotu,

$\mathbf{s} = [\Delta\theta_0, \Delta\kappa_s, \Delta\eta_s, \Delta\phi_{s0}]$ – wektor przyrostów parametrów sterowania.

Występujące w macierzach $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ pochodne sił i momentów względem parametrów lotu i parametrów sterowania obliczono analitycznie.

2.2. Model matematyczny autopilota

Model matematyczny autopilota określony został w oparciu o metodę rozdzielania ruchów [4], którą zmodyfikowano rezygnując z założenia o quasistacjonarności zmiany kąta pochylenia przy sterowaniu prędkością postępową oraz dodatkowo zapewniono stabilizację prędkości bocznej, czego w wyjściowej metodzie nie było. Założono, że system automatycznej stabilizacji reaguje na zmianę prędkości liniowych, prędkości kątowych oraz kątów określających przestrzenne położenie kadłuba.

Podstawą do rozważań były zlinearyzowane równania ruchu śmigłowca (2.9), które dodatkowo uproszczono:

1. przyjęto, że kąty θ , ϕ i ψ są niewielkie i prędkości kątowe są równe pochodnym względem czasu tych kątów tzn:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi}, \\ q &= \dot{\theta}, \\ r &= \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. równania (2.9) rozdzielono na równania ruchu podłużnego i boczного przez pominięcie w macierzach $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ członów sprzęgających i przekształcono do postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = -(\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{x} - (\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{E}^*\mathbf{s}, \quad (2.11)$$

(*) oznacza macierz, w której pominięto elementy sprzęgające.

W rezultacie otrzymano następujące prawa sterowania:

– w ruchu podłużnym:

$$\Delta\theta_0 = T_u^{\theta_0}u + T_w^{\theta_0}w + T_q^{\theta_0}q + T_\theta^{\theta_0}\theta, \quad (2.12)$$

$$\Delta\kappa_s = T_u^{\kappa_s}u + T_w^{\kappa_s}w + T_q^{\kappa_s}q + T_\theta^{\kappa_s}\theta,$$

– w ruchu bocznym:

$$\Delta\eta_s = T_v^\eta v + T_p^\eta p + T_r^\eta r + T_\phi^\eta \phi + T_\psi^\eta \psi, \quad (2.13)$$

$$\Delta\phi_{s0} = T_v^{\phi_{s0}}v + T_p^{\phi_{s0}}p + T_r^{\phi_{s0}}r + T_\phi^{\phi_{s0}}\phi + T_\psi^{\phi_{s0}}\psi,$$

które symbolicznie przedstawić można w postaci:

$$\dot{s} = Fz. \quad (2.14)$$

Występujące w wyrażeniach (2.12) i (2.13) współczynniki wzmocnienia określono w oparciu o wspomnianą metodę rozdzielania ruchów przewidując ruchy własne układu śmigłowca (bez sprzężeń między ruchami podłużnymi i bocznymi) – autopilot.

3. Analiza wyników obliczeń

Zlinearyzowane równania ruchu śmigłowca (2.9) przy uwzględnieniu praw sterowania (2.14) dały następujący układ równań:

$$\dot{x} = -C^{-1}(D + EF)x, \quad (3.1)$$

(F – macierz współczynników wzmocnienia),

który stanowił podstawę do analizy dynamiki lotu układu śmigłowca-autopilot.

W celu przeprowadzenia tej analizy, dla śmigłowca realizującego ustalony lot poziomy, obliczone zostały wartości własne $\lambda_k = \xi_k \pm \eta_k i$ oraz odpowiadające im wektory własne x_k układu (3.1). Wartości własne i wektory własne obliczone zostały w oparciu o przedstawioną w pracach [5] i [6] metodę Fadiejewa. W celu unormowania wektora własnego x_k , odpowiadającego wartości własnej λ_k , trzy pierwsze składowe odpowiadające prędkościom liniowym u_k, v_k, w_k podzielono przez prędkość końca łopat wirnika nośnego, zaś trzy kolejne składowe odpowiadające prędkościom kątowym p_k, q_k, r_k podzielono przez prędkość obrotową wirnika nośnego. Dla tak ubezwymiarowanego wektora własnego obliczona została norma euklidesowa:

$$\|x_k\| = \sqrt{\sum_j (x_{kj})^2}, \quad (3.2)$$

stanowiąca postawę do unormowania wektora własnego $\mathbf{x}_k$ poprzez podzielenie każdej ze składowych x_{kj} tego wektora przez tę normę:

$$\bar{x}_{kj} = \frac{x_{kj}}{\|\mathbf{x}_k\|}. \quad (3.3)$$

Obliczenia szczegółowe wykonano wykorzystując dane geometryczne, masowe i charakterystyki aerodynamiczne śmigłowca Sokół. Przeprowadzono je w zakresie prędkości lotu $0 \div 250$ km/h. Wykonano następujące warianty obliczeń:

1. Ruch śmigłowca rozdzielony na ruch podłużny i boczny; śmigłowiec bez autopilota.
2. Ruch śmigłowca rozdzielony na ruch podłużny i boczny; śmigłowiec z autopilotem.
3. Ruchy śmigłowca sprzężone; śmigłowiec z autopilotem.

Otrzymane przebiegi współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji prędkości lotu, przedstawione zostały na rys.2 ÷ 5. Obliczenia przeprowadzone zostały przy wykorzystaniu, do określenia sił i momentów aerodynamicznych wytwarzanych na wirniku nośnym, stałego rozkładu pola prędkości indukowanej.

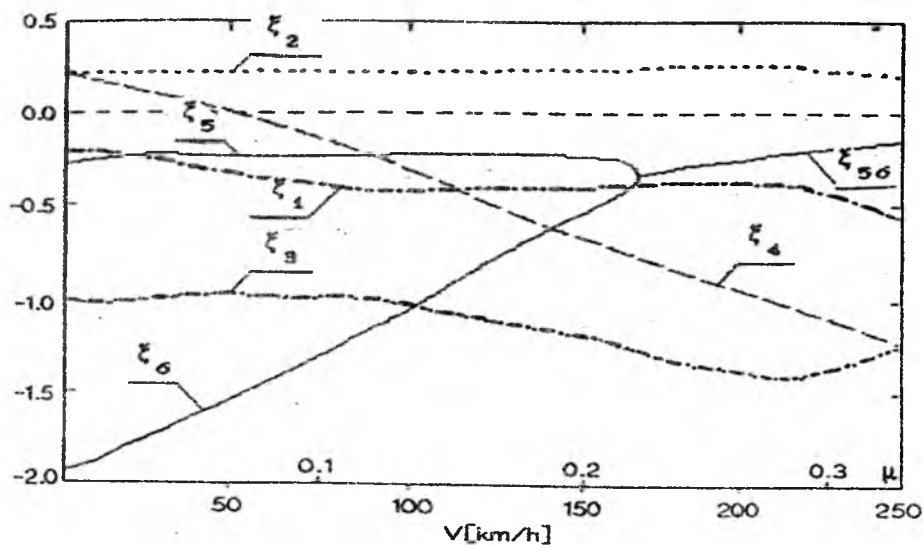
Dla wariantu 1 otrzymano wartości własne pokazane na rys.2 i 3. Na podstawie analizy tych rysunków wyróżnić można następujące ruchy własne:

$\lambda_1 = \xi_1$ - słabo tłumiony aperiodyczny ruch podłużny o prawie stałym współczynniku tłumienia. Ruch ten odpowiada pionowym ruchom śmigłowca (zaburzenia prędkości w), które ze wzrostem prędkości lotu silnie sprzęgają się z zaburzeniami prędkości postępowej u i słabo z pochyleniem kadłuba (prędkość kątowna q). Ruch ten jest tłumiony w wyniku powstawania na wirniku nośnym i kadłubie siły pionowej o zwrocie przeciwnym niż przyrost prędkości.

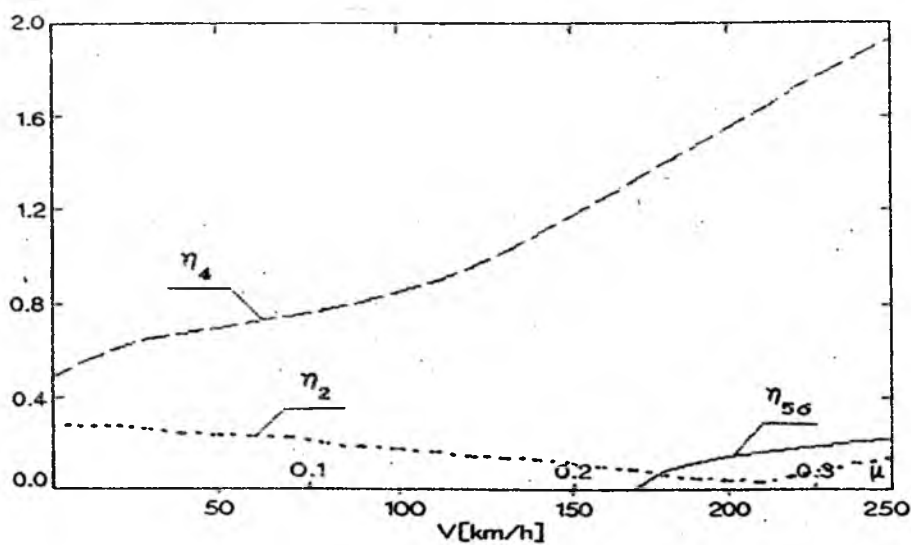
$\lambda_2 = \xi_2 \pm \eta_2 i$ - słabo rozbieżny oscylacyjny długookresowy ruch podłużny o stałym współczynniku pobudzenia, odpowiadający zaburzeniom prędkości postępowej u , które dla małych prędkości lotu sprzężone są z pochyleniem kadłuba, zaś dla dużych prędkości sprzęgają się również z zaburzeniami prędkości pionowej w .

$\lambda_3 = \xi_3$ - silnie tłumiony aperiodyczny ruch podłużny o w przybliżeniu stałym współczynniku tłumienia, odpowiadający pochyleniu kadłuba (prędkość kątowna q) sprzężonemu z zaburzeniami prędkości postępowej u . Wraz ze wzrostem prędkości lotu obserwuje się silne sprzęganie pochylenia z ruchem pionowym (prędkość w).

$\lambda_4 = \xi_4 \pm \eta_4 i$ - periodyczny ruch boczny słabo rozbieżny dla małych prędkości. Ze wzrostem prędkości tłumienie bardzo silnie rośnie. Jest to ruch krótkookresowy o malejącym okresie reprezentujący zaburzenia prędkości bocznej v sprzężone z odchyleniem i przechyleniem. Ze wzrostem prędkości lotu bardzo silnie wzrasta udział przechylania. Ruch ten odpowiada holendrowaniu samolotu.



Rys. 2. Współczynnik tłumienia dla ruchów własnych śmigłowca – stały rozkład pola prędkości indukowanej, wariant 1



Rys. 3. Częstość oscylacji dla ruchów własnych śmigłowca – stały rozkład pola prędkości indukowanej, wariant 1

$\lambda_5 = \xi_5$ – słabo tłumiony aperiodyczny ruch boczny o w przybliżeniu stałym współczynniku tłumienia, odpowiadający odchyłaniu śmigłowca (zaburzenia prędkości kątowej r) sprzężonemu z zaburzeniami prędkości bocznej v . Ze wzrostem prędkości lotu zaznacza się sprzężenie z przechyleniem (prędkość kątowa p). Ruch ten odpowiada spiralnemu ruchowi samolotu.

$\lambda_6 = \xi_6$ – aperiodyczny ruch boczny silnie tłumiony dla małych prędkości lotu i słabo tłumiony dla większych prędkości lotu związany z przechyleniem śmigłowca. Przechylenie to sprzężone jest z odchyleniem i zaburzeniami prędkości bocznej.

$\lambda_{56} = \xi_{56} \pm \eta_{56}i$ – słabo tłumiony periodyczny długookresowy ruch boczny powstający dla współczynnika prędkości $\mu > 0.24$ w wyniku sprzęgnięcia się ruchów λ_5 i λ_6 .

W wyniku obliczeń otrzymano też zerową wartość własną $\lambda_7 = 0$ nie pokazaną na rysunkach 2 i 3, a odpowiadającą kątowi odchylenia śmigłowca. Istnienie tego pierwiastka równania charakterystycznego oznacza, że śmigłowiec nie ma wyróżnionego kierunku ruchu.

Z powyższego wynika, że w całym zakresie prędkości lotu śmigłowiec jest niestateczny w ruchu podłużnym (ruch nr.2). Jest to niestateczność o charakterze oscylacyjnym długookresowym. Także w zawisie i w jego pobliżu mamy do czynienia z ruchem niestatecznym bocznym (ruch nr.4), oscylacyjnym krótkookresowym.

Podobne obliczenia przeprowadzono dla wariantu 2 otrzymując w całym zakresie prędkości lotu następujące wartości własne:

– dla ruchu podłużnego:

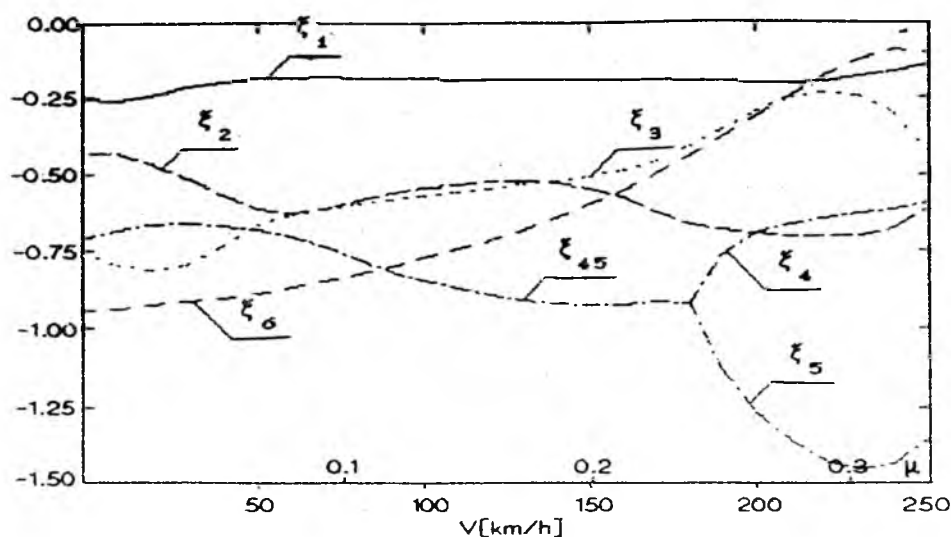
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.625, \\ \lambda_2 &= -0.833, \\ \lambda_{3,4} &= -0.45 \mp 0.2179i,\end{aligned}$$

– dla ruchu bocznego:

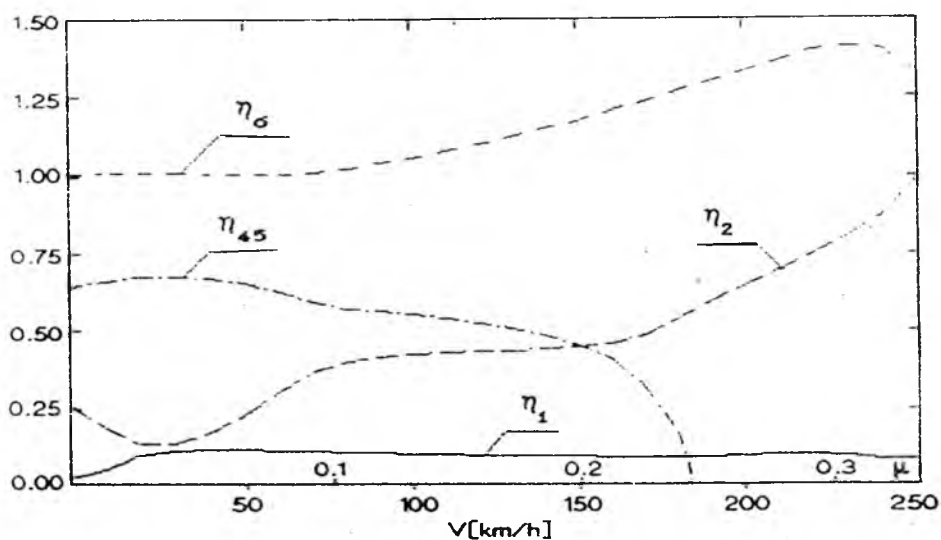
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.5 \mp 0.224i, \\ \lambda_2 &= -1.0, \\ \lambda_{3,4} &= -0.6428 \mp 0.3113i.\end{aligned}$$

Są to wartości własne zgodne z założonymi przy określaniu współczynników wzmocnienia w prawach sterowania (2.14). Oznacza to, że przy braku sprzężeń między ruchami – podłużnym i bocznym, autopilot spełnia stawiane przed nim zadania.

Dla wariantu 3 tzn. śmigłowiec z autopilotem, ruchy sprzężone, otrzymuje się przebiegi przedstawione na rys.4 i 5. Na podstawie wyników wyróżnić można następujące ruchy własne:



Rys. 4. Współczynnik tłumienia dla ruchów własnych śmigłowca – stały rozkład pola prędkości indukowanej, wariant 3



Rys. 5. Częstość oscylacji dla ruchów własnych śmigłowca – stały rozkład pola prędkości indukowanej, wariant 3

$\lambda_1 = \xi_1 \pm \eta_1 i$ – słabo tłumiony ruch periodyczny długookresowy o stałym współczynniku tłumienia, odpowiadający zaburzeniom prędkości postępowej u sprzężonym z zaburzeniami prędkości bocznej v oraz z odchyłaniem, zaś dla dużych prędkości lotu także z przechyłaniem. Sprzężenie z prędkością boczną jest bardzo silne.

$\lambda_2 = \xi_2 \pm \eta_2 i$ – tłumiony ruch periodyczny dla małych prędkości długookresowy, dla dużych zaś krótkookresowy o rosnącym tłumieniu i malejącym okresie opisujący wzajemnie sprzężone zaburzenia prędkości bocznej, odchyłania i przechyłania. Dla małych prędkości lotu przeważa odchyłanie, a dla dużych prędkości przechyłanie.

$\lambda_3 = \xi_3$ – ruch aperiodyczny dla małych prędkości tłumiony silnie zaś dla dużych słabo. Odpowiada on zaburzeniom prędkości pionowej w sprzężonym w całym zakresie prędkości lotu z prędkością boczną v . Dla małych prędkości ruch ten sprzężony jest z odchyłaniem, a dla dużych z przechyłaniem.

$\lambda_{45} = \xi_{45} \pm \eta_{45} i$ – silnie tłumiony ruch periodyczny krótkookresowy występujący w zakresie $\mu = 0 \div 0.24$, a dalej rozdzielający się na dwa ruchy aperiodyczne λ_4 i λ_5 . Ruch ten odpowiada pochyłaniu śmigłowca sprzężonemu bardzo silnie z prędkością boczną v oraz dla małych prędkości z dominującym odchyłaniem i przechyłaniem zaś dla dużych prędkości z dominującym przechyłaniem i odchyłaniem.

$\lambda_4 = \xi_4$ – silnie tłumiony ruch aperiodyczny, opisujący pochyłanie sprzężone z zaburzeniami prędkości bocznej v , pionowej w oraz z odchyłaniem i przechyłaniem.

$\lambda_5 = \xi_5$ – silnie tłumiony ruch aperiodyczny odpowiadający pochyłaniu sprzężonemu z zaburzeniami prędkości bocznej, przechyłaniem i odchyłaniem.

$\lambda_6 = \xi_6 \pm \eta_6 i$ – tłumiony ruch periodyczny krótkookresowy, dla małych prędkości tłumiony silnie, a dla dużych słabo. Ruch ten opisuje przechyłanie sprzężone z zaburzeniami prędkości bocznej.

Widać, że ze zmianą prędkości lotu w sposób istotny zmieniają się współczynniki tłumienia i częstości oscylacji ruchów własnych – zmieniają się dynamiczne własności układu śmigłowiec-autopilot. Należy zwrócić uwagę, że w całym analizowanym zakresie prędkości lotu współczynniki tłumienia są ujemne, co oznacza, że ruchy własne układu śmigłowiec-autopilot są tłumione, chociaż autopilot działa wg. praw sterowania określonych w oparciu o rozdzielone równania ruchu.

4. Wnioski końcowe

Na podstawie otrzymanych wyników sformułować można następujące wnioski:

1. Śmigłowiec bez autopilota w całym zakresie prędkości lotu jest niestateczny. Do prędkości około 50 km/h występuje niestateczność zarówno w ruchu

podłużnym jak i w ruchu bocznym. Niestateczności te mają charakter oscylacyjny. Dla większych prędkości lotu niestateczność w ruchu bocznym znika.

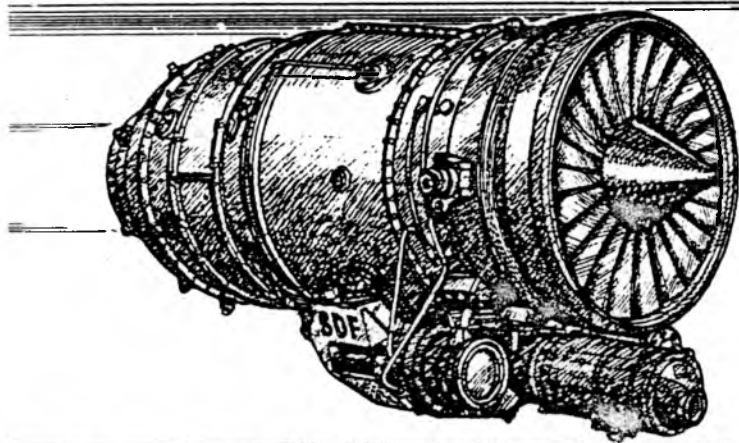
2. Uwzględnienie sprzężeń między ruchami – podłużnym i bocznym jest konieczne ze względu na wpływ tych sprzężeń na przebieg wartości własnych i wektorów własnych.
3. Określony w oparciu o rozdzielone równania ruchu model matematyczny autopilota nie zapewnia utrzymania, po zastosowaniu go w pełnych równaniach ruchu, żądanych wartości własnych układu śmigłowiec-autopilot. Natomiast spełniony jest podstawowy wymóg, aby ruchy własne były tłumione – części rzeczywiste wszystkich wartości własnych są ujemne.

Literatura

1. ESAULOV S., 1977, *Vertolet kak ob'ekt upravljenja*, Maszynostroenie, Moskwa
2. KOWALECZKO G., 1990, *Metodyka obliczania parametrów lotu ustalonego dla śmigłowca jednowirnikowego*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 28, 3-4, Warszawa
3. KOWALECZKO G., 1992, *Analiza dynamiki przestrzennego ruchu śmigłowca z uwzględnieniem wpływu autopilota*, Rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny WAT, Warszawa
4. KOŽEVNIKOV V.A., 1977, *Avtomatičeskaja stabilizacija vertoletov*, Maszynostroenie, Moskwa
5. FADEEVA D.K., 1960, *Wyčislitelnye metody linejnoj algebry*, GIF-ML, Moskwa
6. GÓRECKI H., *Algorytmy i programy sterowania*, WNT, Warszawa

D-18A

PIERWSZY POLSKI SILNIK
DWUPRZEPŁYWOWY



 INSTITUTE OF AVIATION

ZASTOSOWANIE DYSKRETNEGO MODELU DYNAMICZNEGO DO ANALIZY DRGAŃ I PRĘDKOŚCI KRYTYCZNYCH PODWÓJNEGO WIRNIKA LOTNICZEGO SILNIKA TURBINOWEGO¹

ZBIGNIEW DŻYGADŁO

IDZI NOWOTARSKI

ALEKSANDER OLEJNIK

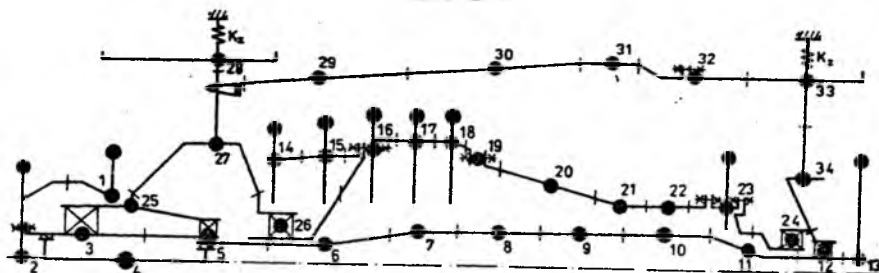
PIOTR ZALEWSKI

BOGUSŁAW MROZEK

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wstęp

Podwójny wirnik lotniczego dwuprzepływowego turbinowego silnika odrzutowego jest interesującym obiektem do badań dynamiki układów wirujących.



Rys. 1.

W niniejszej pracy wykorzystano niektóre rezultaty badań zamieszczone w sprawozdaniu [1] i przedstawiono metodę oraz wyniki numerycznej analizy drgań własnych oraz krytycznych prędkości obrotowych modelu podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego o postaci pokazanej na rys.1.

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Problem rozwiązano metodą elementów skończonych. Opracowano dyskretny model dynamiczny rozpatrywanego układu. Równania ruchu wyznaczono metodą sił [2]. Uwzględniono masy oraz momenty bezwładności średnicowe i biegunowe poszczególnych elementów wirnika, co umożliwiło zbadanie wpływu precesji na prędkości krytyczne modelu silnika [3,4].

Zakładamy, że rozpatrywany model składa się z dwóch wirników oraz korpusu (rys.1), które są ciałami osiowosymetrycznymi o konstrukcji powłokowo-tarczowej. Zespoły modelu są poddane działaniu nieosiowosymetrycznych obciążeń zginających.

Powyższe założenia umożliwiają budowę sztywnościowego modelu zdyskretyzowanego układu za pomocą elementów w postaci powłoki stożkowej o liniowo zmiennej grubości. Usztywnienia elementów korpusu uwzględniono za pomocą elementów belkowych (por.[1]).

Dyskretny model masowy układu zawiera skupione masy oraz masowe momenty bezwładności średnicowe i biegunowe poszczególnych elementów.

Równania ruchu sprowadzono do jednorodnego układu liniowych równań algebraicznych, który rozwiązano znaną metodą iteracyjną [5].

Z rezultatów obliczeń wynika, że uwzględnienie precesji ma istotny wpływ na postać drgań i wielkość prędkości krytycznych badanego modelu silnika.

2. Równania ruchu modelu podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego

Model rozpatrywanego układu pokazany na rys.1 składa się z wirnika niskiego ciśnienia, wirnika wysokiego ciśnienia i korpusu, w którym oba wirniki są ułożyskowane. Został on podzielony na skończone elementy, co zaznaczono na rys.1.

Równania ruchu zdyskretyzowanego układu wyznaczono metodą sił [2]. Metoda ta w zastosowaniu do teorii drgań polega na wyrażeniu uogólnionych przemieszczeń mas układu przez wszystkie siły działające na układ.

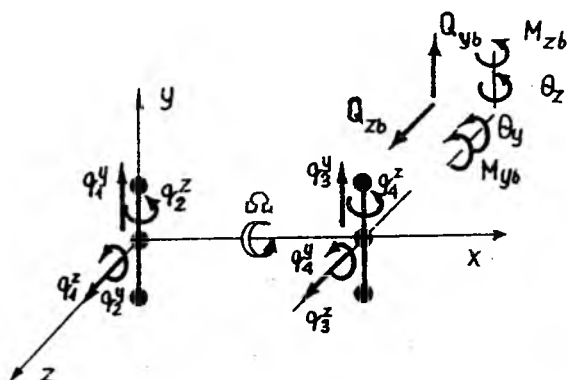
W tym celu wyznaczono współczynniki wpływu δ_{jk} stosując metodę elementów skończonych (por.[1]), gdzie współczynnik δ_{jk} jest równy uogólnionemu przemieszczeniu q_j , które wynikało na skutek działania uogólnionej siły $Q_k = 1$, przyłożonej na kierunku q_k i skierowanej zgodnie z dodatnim zwrotem tej współrzędnej.

Rozpatrzmy układ o n stopniach swobody przy założeniu, że jego ruch jest opisany za pomocą n współrzędnych uogólnionych q_j , $j = 1, 2, \dots, n$, z których każda przedstawia przemieszczenie uogólnione (przemieszczenie lub kąt obrotu) jednej z mas układu.

Oznaczmy przez B_j i Q_j , $j = 1, 2, \dots, n$, uogólnione siły (siły lub momenty sił) bezwładności i zewnętrzne działające na masy układu, odpowiadające poszczególnym współrzędnym q_j . Wykorzystując współczynniki wpływu δ_{jk} możemy dla rozpatrywanego układu napisać zależność macierzową (por.[2]):

$$q_j = \delta_{jk}(B_k + Q_k), \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

gdzie q_j jest wektorem współrzędnych uogólnionych, $(B_k + Q_k)$ – wektorem uogólnionych sił bezwładności i zewnętrznych, δ_{jk} jest macierzą współczynników wpływu. Zależność (2.1) zastosujemy do wyznaczenia równań drgań modelu wirnika pokazanego na rys.1.



Rys. 2.

Rozpatrzmy przykładowo prosty dwumasowy układ wirujący z prędkością kątową Ω dookoła osi x nieruchomego układu współrzędnych xyz (rys.2). Przemieszczenia uogólnione mas w kierunku lub dookoła osi y i z spełniają zależności [2,3]:

$$\begin{aligned} q_j^y &= \delta_{jk} B_k^y, \\ q_j^z &= \delta_{jk} B_k^z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} B_k^y &= -m_{(k+1)/2} \frac{d^2 q_k^y}{dt^2}, \\ B_k^z &= -m_{(k+1)/2} \frac{d^2 q_k^z}{dt^2}, \end{aligned} \quad \text{dla } k = 1, 3, \dots, \quad (2.3)$$

$$B_k^y = -I_{1k/2} \frac{d^2 q_k^y}{dt^2} + \Omega I_{0k/2} \frac{dq_k^z}{dt}, \quad \text{dla } k = 2, 4, \dots, \quad (2.4)$$

$$B_k^z = -I_{1k/2} \frac{d^2 q_k^z}{dt^2} - \Omega I_{0k/2} \frac{dq_k^y}{dt},$$

m_k jest masą zredukowaną do punktu k , I_{1k} – masowy moment bezwładności k -tego elementu względem średnicy, I_{0k} – masowy moment bezwładności k -tego elementu względem osi obrotu.

Równania (2.2) można zastosować do analizy drgań i krytycznych prędkości obrotowych modelu wirnika pokazanego na rys. 1.

Założymy, że po dyskretyzacji model ten ma n stopni swobody i wprowadzimy oznaczenia:

$$q_j(t) = q_j^y(t) + i q_j^z(t), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.5)$$

oraz przyjmujemy:

$$q_j(t) = q_{0j} e^{i p t}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

Uwzględniając zależności (2.3) ÷ (2.6) w równaniach (2.2) otrzymamy:

$$q_{0j} = \delta_{jk} (p^2 M_{1j} + \Omega p M_{0j}) q_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

gdzie macierze M_{1j} oraz M_{0j} są diagonalnymi macierzami o postaci:

$$M_{1j} = \text{diag}[m_1, I_{11}, \dots, m_{n/2}, I_{1n/2}], \quad (2.8)$$

$$M_{0j} = \text{diag}[0, I_{01}, \dots, 0, I_{0n/2}].$$

Równanie (2.7) przekształcimy do postaci:

$$B_j q_{0j} = \lambda q_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

gdzie oznaczono:

$$\lambda = \frac{1}{p^2}, \quad (2.10)$$

oraz:

$$B_j = \delta_{jk} M_j, \quad (2.11)$$

$$M_j = \text{diag}[m_1, I_{11} + k I_{01}, \dots, m_{n/2}, I_{1n/2} + k I_{0n/2}]. \quad (2.12)$$

W macierzy (2.12) wprowadzono współczynnik:

$$k = \frac{\Omega}{p}, \quad (2.13)$$

który przyjmuje różne wartości w zależności od położenia elementu układu:

$$k = k_1 = \Omega_n/p \quad - \quad \text{dla elementów wirnika niskiego ciśnienia,}$$

$$k = k_2 = \Omega_w/p \quad - \quad \text{dla elementów wirnika wysokiego ciśnienia,}$$

$$k = k_3 = 0 \quad - \quad \text{dla elementów korpusa wirnika,}$$

gdzie Ω_n i Ω_w oznaczają prędkości wirowania wirnika niskiego i wysokiego ciśnienia, odpowiednio.

Równanie (2.9) wraz z zależnościami (2.10)÷(2.13) zostało wykorzystane do analizy częstości i postaci drgań własnych oraz prędkości krytycznych modelu podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego.

3. Wyniki obliczeń numerycznych

Częstości własne i prędkości krytyczne rozpatrywanego modelu podwójnego wirnika lotniczego dwuprzepływowego silnika odrzutowego wyznaczono rozwiązując zagadnienie na wartości własne dla równań (2.9), (2.10)÷(2.13). W tym celu zastosowano znaną metodę iteracyjną [5]. Dane wyjściowe przyjęto na podstawie [1].

Obliczenia wykonano dla dwóch wariantów podparcia korpusu wirnika:

- gdy podpory są sztywne,
- gdy podpory są odkształcalne przy określonych, założonych wartościach współczynników sztywności obu podpór.

Drgania rozpatrzono w przypadku, gdy w macierzy (2.12) współczynniki $k = k_1 = k_2 = k_3 = 0$, to jest bez uwzględnienia momentów giroskopowych i precesji wirników, a także w przypadku, gdy:

$$k = k_1 = 1,$$

$$k = k_2 = 1.2,$$

$$k = k_3 = 0,$$

to jest przy uwzględnieniu momentów giroskopowych i precesji współbieżnej synchronicznej z obrotami wirnika niskiego ciśnienia.

Niektóre wyniki obliczeń przedstawiono na rys.3 ÷ 12¹, które podają częstości drgań lub krytyczne prędkości obrotowe oraz pokazują odpowiadające im postacie drgań układu. Rysunki 3 ÷ 6 zawierają rezultaty obliczeń modelu wirnika na sztywnych podporach, a rys.7 ÷ 12 – wirnika przy uwzględnieniu odkształcalności podpór.

¹Rysunki zamieszczono na końcu pracy

W przypadku analizy drgań bez uwzględnienia momentów giroskopowych (rys.3,4), przy pierwszej częstotliwości drgań dominuje odkształcenie wirnika niskiego ciśnienia (rys.3), a przy drugiej częstotliwości (rys.4) – odkształcenie wirnika wysokiego ciśnienia.

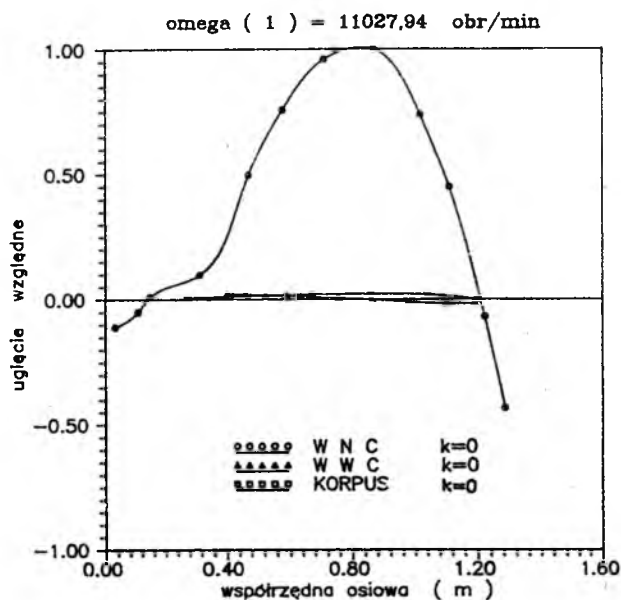
Uwzględnienie efektów giroskopowych i precesji współbieżnej (rys.5,6) powoduje nie tylko zwiększenie krytycznych prędkości obrotowych lecz również zmieniają się postacie drgań. Przy pierwszej częstotliwości dominuje odkształcenie wirnika wysokiego ciśnienia (rys.5), a przy drugiej – niskiego ciśnienia (rys.6).

Rozpatrując wirnik na odkształcalnych podporach (rys.7 ÷ 12) stwierdzamy, że w przypadku pierwszych dwóch częstotliwości drgań i krytycznych prędkości obrotowych bez uwzględnienia momentów giroskopowych (rys.7,8) i po uwzględnieniu tych efektów przy precesji współbieżnej (rys.9,10) dominują przemieszczenia układu jako sztywnego i nie występują większe różnice ilościowe oraz jakościowe.

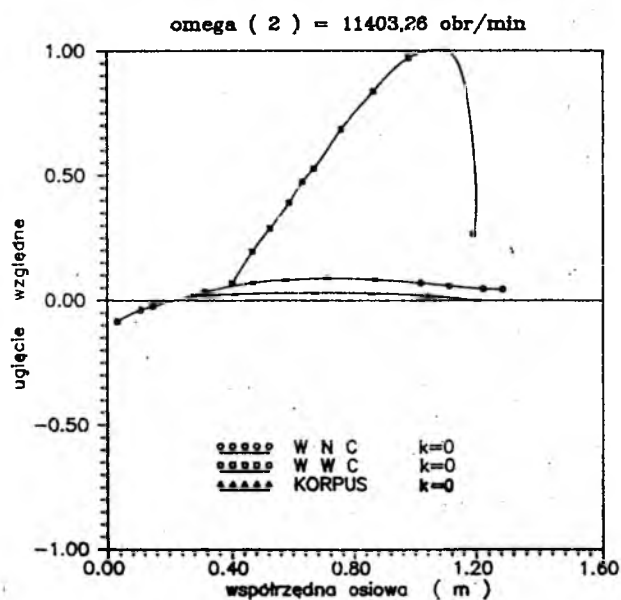
W przypadku trzeciej częstotliwości drgań i krytycznej prędkości obrotowej (rys. 11,12), uwzględnienie momentów giroskopowych przy precesji współbieżnej powoduje istotną zmianę częstotliwości oraz postaci drgań układu.

Literatura

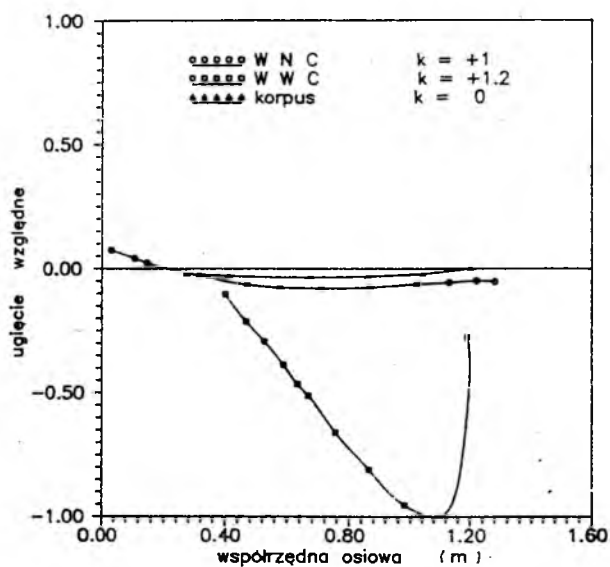
1. DŻYGADŁO Z., NOWOTARSKI I., OLEJNIK A., MROZEK B., ZALEWSKI P., 1990, *Obliczenia dynamiki modelu silnika D18A*, Sprawozdanie z pracy, WAT, ITL, Warszawa
2. DŻYGADŁO Z., KALISKI S., SOLARZ L., WŁODARCZYK E., 1966, *Drgania i fale w ciałach stałych*, pod red. S.Kaliskiego, PWN, Warszawa
3. DŻYGADŁO Z., 1981, *Numerical analysis of flexural vibrations of rotors resting on elastic supports*, J.Tech.Phys., 4, 22
4. DŻYGADŁO Z., LYŻWIŃSKI M., OTYŚ J., SZCZECIŃSKI S., WIATREK R., 1982, *Napędy Lotnicze. Zespoły wirnikowe silników turbinowych*, WKŁ, Warszawa
5. ZIENKIEWICZ O.C., 1972, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa



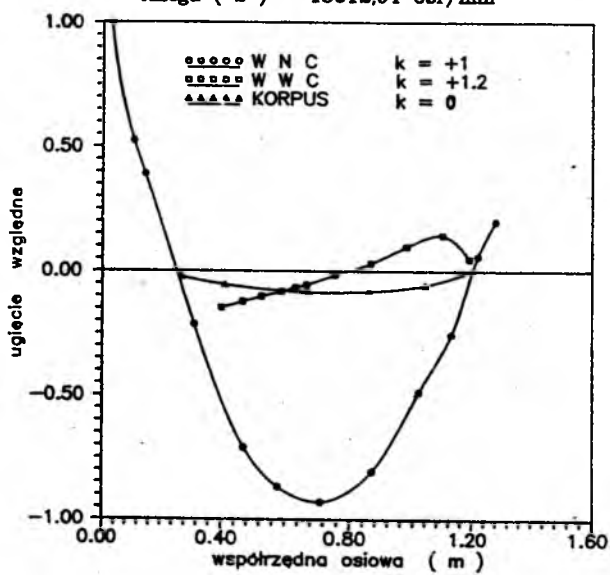
Rys. 3.



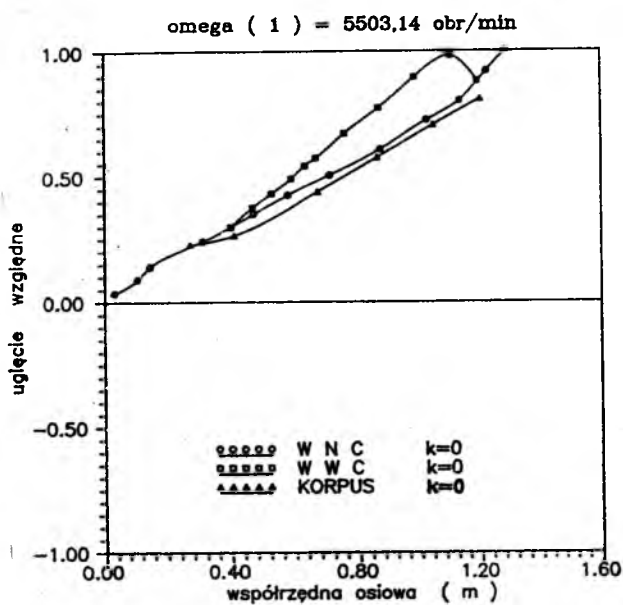
Rys. 4.

$\omega (1) = 11974,94 \text{ obr/min}$


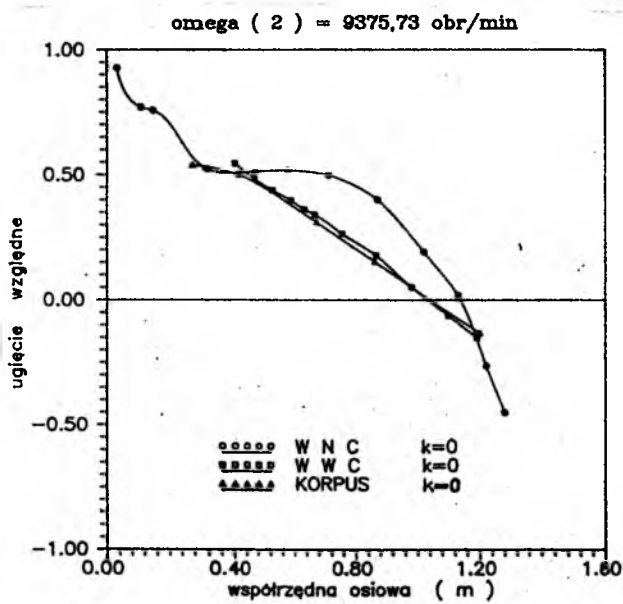
Rys. 5.

 $\omega (2) = 15612,94 \text{ obr/min}$


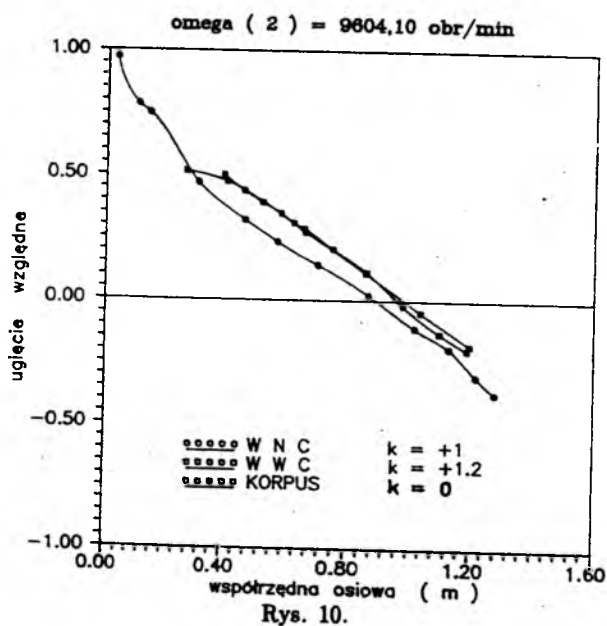
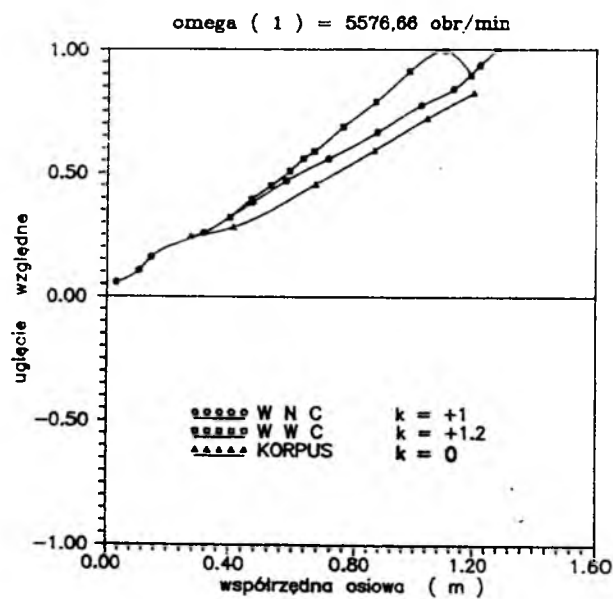
Rys. 6.

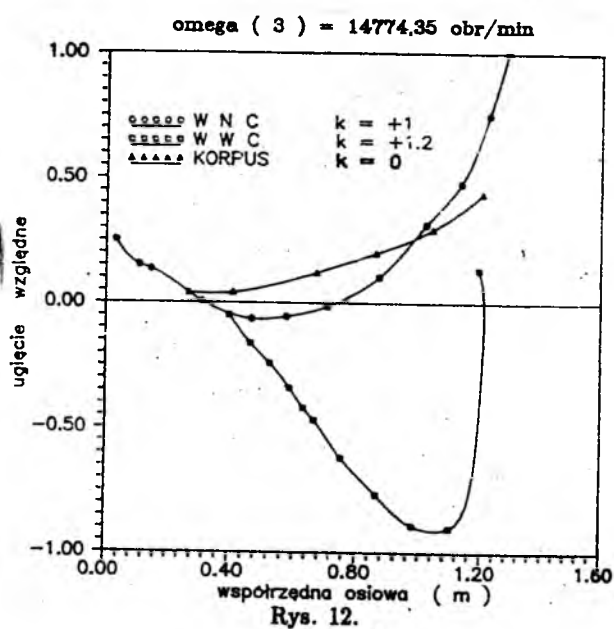
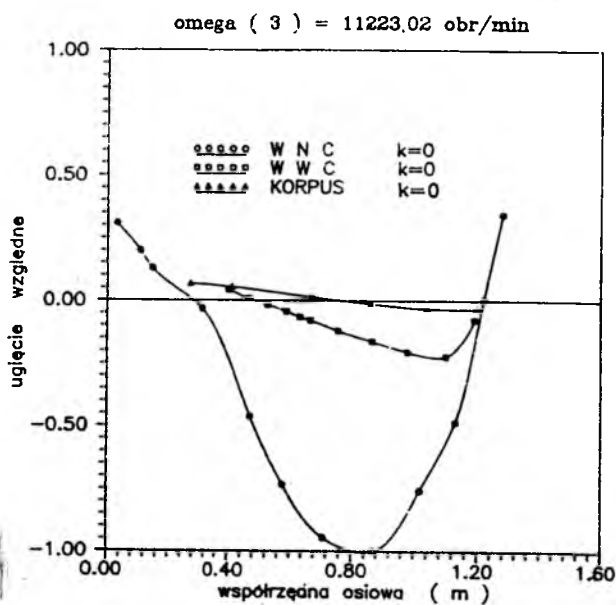


Rys. 7.



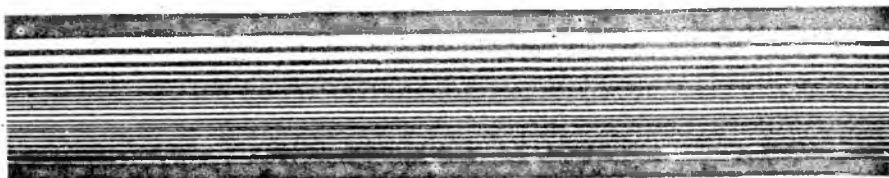
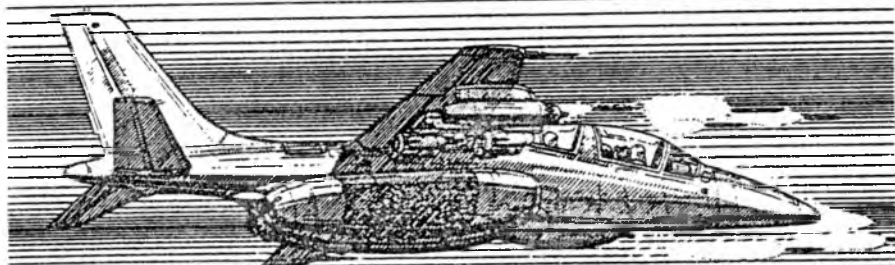
Rys. 8.





PZL I-22 "IRYDA"

ODRZUTOWY SAMOLOT
SZKOLNO-TRENINGOWY



INSTITUTE OF AVIATION

WPLYW USKOKU WIATRU TYPU "MICROBURST" NA LOT STARTUJĄCEGO SAMOŁOTU¹

JERZY MARYNIAK

JIMOH PEDRO

Politechnika Warszawska

W pracy przedstawiono modelowanie fizyczne i matematyczne wpływu uskoku wiatru na dynamikę sterowanego samolotu podczas startu. Wypro-
wadzono równania ruchu samolotu stosując równania Boltzmann-Hamela.
Obliczenia zmian sił i momentów sił aerodynamicznych wywołanych usko-
kiem wiatru wykonano w oparciu o aerodynamikę ustaloną. Opracowano
pełne sterowania we wszystkich kanałach autopilota. Wykonano oblicze-
nia przykładowe dla różnych parametrów charakteryzujących uskok wiatru.
Otrzymane wyniki ujawniały możliwość złagodzenia wpływu uskoku wiatru
na dynamikę samolotu za pomocą odpowiedniej strategii sterowania.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

a	– prędkość dźwięku,
A	– macierz bezwładności,
B	– macierz sztywności,
c	– średnia cięciwa aerodynamiczna płata,
C	– macierz sił i momentów zewnętrznych,
C_x^w, C_y^w, C_z^w	– bezwymiarowe współczynniki sił aerodynamicznych z udziałem wiatru w układzie samolotowym,
C_L^w, C_M^w, C_N^w	– bezwymiarowe współczynniki momentów aerody- namicznych z udziałem wiatru w układzie samo- lotowym,
g	– przyspieszenie ziemskie,
h	– wysokość lotu,
J_i	– wskaźnik jakości sterowania,
L, M, N	– momenty zewnętrzne działające na samolot w uk- ładzie 0xyz,

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

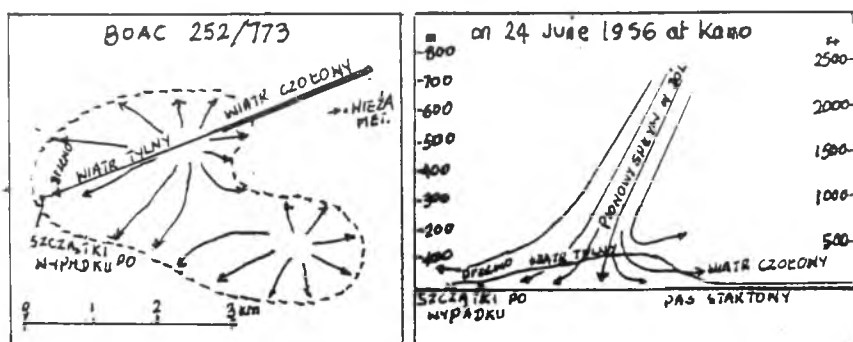
$\mathbf{r}_A = \text{col}[x_A, y_A, z_A]$	– wektor położenia bieguna A względem O w układzie $Oxyz$,
$\mathbf{r}_c = \text{col}[x_c, y_c, z_c]$	– wektor położenia środka masy samolotu względem O w układzie $Oxyz$,
$\mathbf{r}_1 = \text{col}[x_1, y_1, z_1]$	– wektor położenia samolotu w układzie ziemskim,
$\mathbf{r}_T = \text{col}[x_T, y_T, z_T]$	– wektor położenia silnika względem O w układzie $Oxyz$,
$\mathbf{r}_w = \text{col}[x_w, y_w, z_w]$	– wektor położenia jądra uskoku wiatru w układzie ziemskim,
S, S_H, S_v	– powierzchnie nośne: głównego płata, usterzenia poziomego i pionowego,
T_i	– ciąg i -tego silnika,
V_A	– prędkość opływu,
V_0	– prędkość lotu samolotu,
$\mathbf{W} = \text{col}[W_x, W_y, W_z]$	– wektor prędkości wiatru w układzie $Oxyz$,
X, Y, Z	– siły zewnętrzne działające na samolot w układzie $Oxyz$,
α	– kąt natarcia,
α_w	– zmiana kąta natarcia wywołana uskokiem wiatru,
α_{zH}	– kąt zaklinowania statecznika poziomego,
β	– kąt ślizgu,
β_w	– zmiana kąta ślizgu wywołana uskokiem wiatru,
γ	– kąt toru lotu samolotu,
$\delta_H, \delta_v, \delta_L$	– kąt wychylenia sterów: wysokości, kierunku i lotek,
φ_T	– kąt zaklinowania silnika w pionie,
θ, ϕ, ψ	– kąty: pochylenia, przechylenia i odchylenia samolotu,
ω_T	– prędkość kątowa wirowania silnika,
$\mathbf{\Omega} = \text{col}[P, Q, R]$	– wektor kątowej prędkości samolotu,
$\mathbf{\Omega}_w = \text{col}[P_w, Q_w, R_w]$	– wektor kątowej prędkości wiatru.

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest symulacja numeryczna lotu samolotu podczas startu



Rys. 1. Źródło i własności uskoku wiatru "microburst"

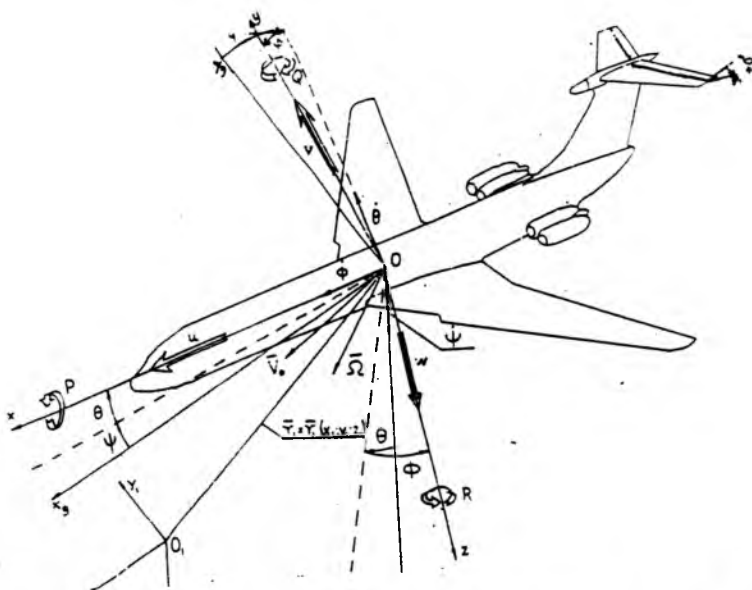


Rys. 2. Wypadek samolotu BOAC 252/113 podczas startu

z uwzględnieniem wpływu wiatru typu "microburst". Uskok wiatru typu "microburst" występuje przeważanie przy burzach konwekcyjnych. Microburst jest szczególnie śmiertelną formą uskoku wiatru na małej wysokości. W 1671r. angielski naukowiec Bohun opisał po raz pierwszy pewne zakłócenie atmosferyczne posiadające charakterystyczne cechy uskoku wiatru microburst [1].

Spotkanie microburst podczas startu jest bardzo niebezpieczne, ponieważ wtedy samolot leci z małą prędkością na małej wysokości. Przykładem tego zagrożenia jest wypadek, który się zdarzył w Kano w Nigerii podczas startu 36 lat temu (rys.2) [2].

2. Model fizyczny i matematyczny samolotu



Rys. 3. Przyjęte układy odniesienia wraz ze składowymi prędkości lotu

Rozpatrzono przestrzenny ruch samolotu o napędzie odrzutowym. Założono że: samolot jest bryłą sztywną o sześciu stopniach swobody; masa samolotu jest stała w czasie analizy; obowiązuje aerodynamika ustalona i efekty ściśliwości są pomijalnie małe, gdyż podczas startu $V_A \ll a$.

Równania ruchu samolotu wyprowadzono w układzie sztywno związanym z samolotem $Oxyz$, stosując równania Boltzmanna-Hamela dla układów mechanicz-

nych o więzach holonomicznych [3,4]. Po pewnym przekształceniu i uproszczeniu otrzymano równania ruchu w postaci macierzowej:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{X}), \quad (2.1)$$

gdzie:

- $\mathbf{X}$ - wektor stanu,
- $\mathbf{A}$ - macierz bezwładności,
- $\mathbf{B}$ - zmodyfikowana macierz sztywności,
- $\mathbf{C}$ - macierz obciążeń zewnętrznych pochodzących od grawitacji, napędu, sił i momentów aerodynamicznych (także od przypadkowych zakłóceń zewnętrznych) oraz od sterowania.

Efekty uskoku wiatru na dynamikę samolotu podczas startu przejawiają się w postaci dodatkowych sił i momentów sił aerodynamicznych w macierzy $\mathbf{C}$ [5]:

$$\mathbf{C} = \text{col}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}], \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^g + \mathbf{X}^T - \frac{1}{2}\rho V_A^2 S C_x^w + X_Q(Q - Q_w) + X_{\delta_H}\delta_H + X_{\alpha_{zH}}\alpha_{zH}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2}\rho V_A^2 S C_y^w + Y_P(P - P_w) + Y_R(R - R_w) + Y_{\delta_L}\delta_L + Y_{\delta_v}\delta_v, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^g + \mathbf{Z}^T - \frac{1}{2}\rho V_A^2 S C_z^w + Z_Q(Q - Q_w) + Z_{\delta_H}\delta_H + Z_{\alpha_{zH}}\alpha_{zH}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^{Tg} + \frac{1}{2}\rho V_A^2 S (-z_A C_y^w - c C_L^w) + L_P(P - P_w) + L_R(R - R_w) + \\ & + L_{\delta_L}\delta_L + L_{\delta_v}\delta_v, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \mathbf{M}^g + \mathbf{M}^T + \mathbf{M}^{Tg} + \frac{1}{2}\rho V_A^2 S (-z_A C_x^w + x_A C_z^w + c C_M^w) + M_{\dot{w}}(\dot{W} - \dot{W}_z) + \\ & + M_Q(Q - Q_w) + M_{\delta_H}\delta_H + M_{\alpha_{zH}}\alpha_{zH}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = & \mathbf{N}^T + \mathbf{N}^{Tg} + \frac{1}{2}\rho V_A^2 S (x_A C_y^w - c C_N^w) + N_P(P - P_w) + N_R(R - R_w) + \\ & + N_{\delta_L}\delta_L + N_{\delta_v}\delta_v. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bezwymiarowe współczynniki sił i momentów sił aerodynamicznych z udziałem uskoku wiatru w układzie $Oxyz$ zależą od kątów: natarcia α^w , ślizgu β^w oraz liczb: Macha i Reynoldsa:

$$C_x^w, C_y^w, C_z^w, C_L^w, C_M^w, C_N^w = f(\alpha^w, \beta^w, Ma, Re). \quad (2.9)$$

Określono rozkład wiatru i jego gradienty z modelu Bray'a. To jest model uskoku wiatru pochodzący z ośrodka badawczego NASA w USA [6]. Wektor chwilowej prędkości kątovej wiatru jest związany z wektorem liniowej prędkości wiatru zależnością [7,8,11]:

$$\Omega_w = \begin{bmatrix} P_w \\ Q_w \\ R_w \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \nabla \times W. \quad (2.10)$$

Zmiana prędkości wiatru "widziana" przez samolot jest określona wzorem:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial r_1} \frac{dr_1}{dt}. \quad (2.11)$$

Kąty aerodynamiczne z udziałem wiatru α^w i β^w określono następująco:

- kąt natarcia:

$$\alpha^w = \alpha + \alpha_w = \arcsin\left(\frac{W - W_z}{V_A}\right), \quad (2.12)$$

- kąt ślizgu:

$$\beta^w = \beta + \beta_w = \arcsin\left(\frac{V - W_y}{V_A}\right), \quad (2.13)$$

przy czym:

- prędkość opływu:

$$V_A^2 = V_0^2 + W^2 + 2V_0W \cos(V_0, W). \quad (2.14)$$

Uzupełniono równania ruchu samolotu związkami kinematycznymi w postaci ogólnej:

$$\dot{r} = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] = F[V_0, \Omega, W, \Omega_w], \quad (2.15)$$

na przykład:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \Lambda_v^{-1} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{xg} \\ W_{yg} \\ W_{zg} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

gdzie:

$$h = -z_1. \quad (2.17)$$

Opisano dynamikę silnika turbo-odrzutowego równaniem [7]:

$$T_i = T_{0i}(n_T) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{0.7} (A_s + B_s Ma + C_s Ma^2), \quad (2.18)$$

przy czym A_s , B_s i C_s zależą od charakterystyki danego silnika.

Przyjęto następujące prawa sterowania w poszczególnych kanałach autopilota [10]:

- kanał przechylenia:

$$\delta_L = \delta_{L0} + K_{1L}(\phi - \phi_z) + K_{2L}(P - P_z) + K_{3L}(\psi - \psi_z) + K_{4L}(y_1 - y_{1z}), \quad (2.19)$$

- kanał pochylenia:

$$\delta_H = \delta_{H0} + K_{1H}(H - H_z) + K_{2H}(\dot{H} - \dot{H}_z) + K_{3H}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_z) + K_{4H}(U - U_z), \quad (2.20)$$

- kanał odchylenia:

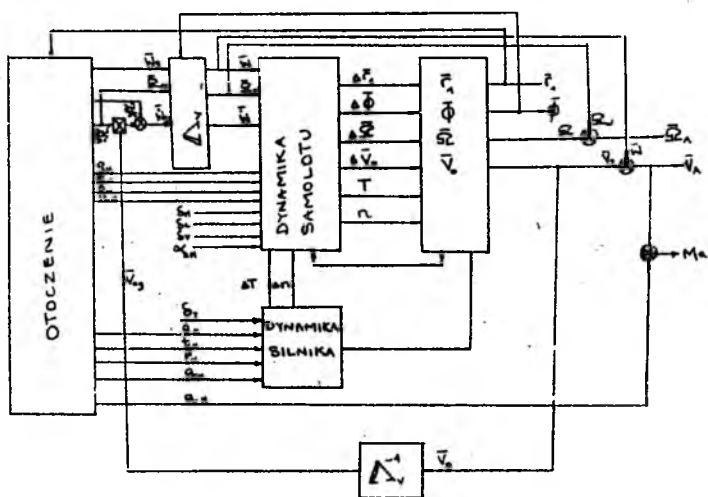
$$\delta_v = \delta_{v0} + K_{1v}(\psi - \psi_z) + K_{2v}(R - R_z) + K_{3v}(y_1 - y_{1z}), \quad (2.21)$$

- kanał prędkości:

$$\delta_T = \delta_{T0} + K_{1T}(U - U_z) + K_{2T}(\theta - \theta_z) + K_{3T}(H - H_z). \quad (2.22)$$

Przy doborze współczynników wzmocnienia autopilota korzystano z całkowego, kwadratowego kryterium jakości sterowania oraz uzupełniono je oceną procesów przejściowych we wszystkich kanałach autopilota:

$$J_i = \int_0^{t_k} (X - X_z)^2 dt = \min. \quad (2.23)$$



Rys. 4. Schemat blokowy modelu matematycznego samolotu po wejściu w podmuch

Na rys.4 przedstawiono schemat blokowy modelu matematycznego sterowanego samolotu w dowolnym locie przestrzennym po wejściu w podmuch wiatru. Istnieją trzy główne sprzężenia pomiędzy ruchem: samolotu a powietrza:

1. wektor położenia liniowego samolotu $r_1(t)$ określa lokalny rozkład wiatru i jego gradienty,
2. wektor położenia kąтового samolotu $\phi(t)$ umożliwia transformację wektorów prędkości liniowej i kątovej wiatru z układu ziemskiego na układ samolotowy,
3. wektor prędkości lotu samolotu $V_0(t)$ wpływa na chwilową zmianę wektora prędkości wiatru (2.11).

3. Analiza numeryczna

Opracowano program w języku Fortran do całkowania numerycznego równania (2.1) wraz z zależnościami (2.2) ÷ (2.23). Wykonano obliczenia przykładowe dla lotu wznoszenia samolotu pasażerskiego IL-62M podczas startu z włączonym autopilotem. Przeprowadzono symulację numeryczną dla kąta toru lotu $\gamma_z = 3^\circ$ oraz prędkości lotu $V_0 = 90$ m/s. Przyjęto również, że klapy są wychylone o kąt 30° i podwozie jest wypuszczone. Początek układu ziemskiego pokrywa się z progiem pasa startowego. Warunki początkowe są takie zapewniające lot ustalony podczas startu oraz jądro uskoku wiatru znajduje się w punkcie o współrzędnych $x_w = 1000$ m i $y_w = 200$ m. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów na rys. 5 ÷ 16¹.

Na podstawie przebiegów składowych prędkości wiatru rys. 10 przedstawiony ruch można podzielić na trzy główne etapy:

Etap pierwszy obejmujący fazę wystąpienia jedynie wiatru czołowego i boczno-bocznego. W wyniku tego samolot zaczyna nabierać wysokości, gdyż wzrasta prędkość opływu V_A . Ten etap trwa do 4 s lotu przy maksymalnej wartości prędkości wiatru czołowego ($W_{zg \max} = 15$ m/s dla $x_1 = 300$ m).

Etap drugi obejmuje okres od 4 s do 20 s. Jest to faza lotu, w której całkowicie zanika wiatr czołowy i pojawia się wiatr tylny, trwająca aż do momentu osiągnięcia jego maksymalnej wartości. W tym okresie podmuch pionowy osiąga swoją największą wartość $W_{zg \max} = 2.5$ m/s. Na skutek tego nagle zaczyna stracić wysokość. W tej fazie lotu występują silne oscylacje prędkości kątovej pochylania Q oraz wzrost kąta pochylenia θ w celu zmniejszenia dalszej utraty wysokości. Można zauważyć bardzo niebezpieczne zjawisko (rys. 8 i 12), pomimo przekroczenia maksimum ciągu, jakie silnik może rozwijać, prędkość lotu spada do prędkości krytycznej. To oznacza przekroczenie aerodynamicznej możliwości osiągnięcia tego samolotu podczas startu. Przypadek ten stanowi najtrudniejszy start samolotu pod wpływem uskoku wiatru i jest podobny do wypadku lotu samolotu PAA Flight 759 [2].

¹Rysunki zamieszczono na końcu pracy

Etap trzeci. To jest etap wyjścia z niebezpiecznej strefy uskoku wiatru. W tej fazie lotu pewnemu tłumieniu ulegają wartości prędkości kątowych samolotu a kąty: pochylenia θ , natarcia α , toru lotu γ ustalają się na pewnym ustalonym poziomie blisko ich wartości w stanie równowagi przed wejściem w podmuch.

Wykonano dodatkową analizę numeryczną w celu ujawnienia wpływu: natężenia wiatru W_{z0} , położenia jądra uskoku wiatru (x_w, y_w) oraz autopilota; na dynamikę samolotu podczas startu przez centrum podmuchu wiatru (rys.13 ÷ 16).

4. Uwagi końcowe

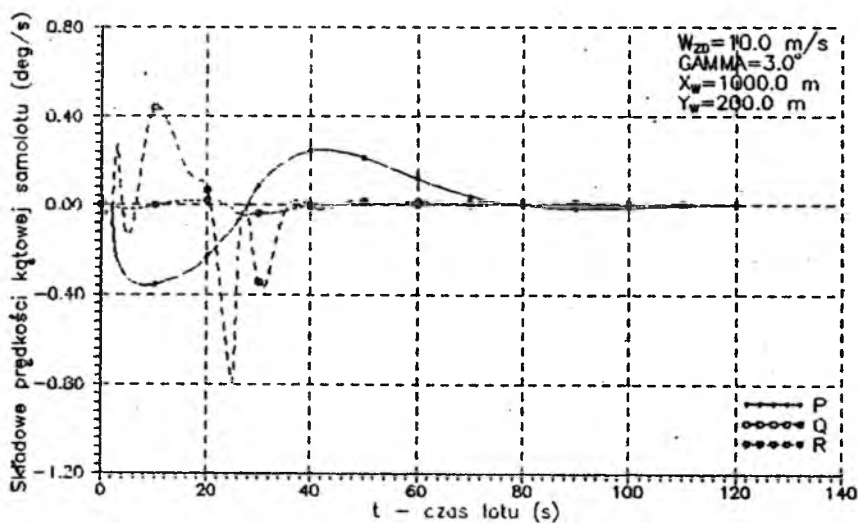
W oparciu o przedstawione wyniki analizy można stwierdzić, że:

- Czynnikiem krytycznym jest wysokość lotu samolotu podczas przejścia przez centrum uskoku wiatru w czasie startu;
- Pionowy podmuch W_{zg} związany z uskokiem wiatru microburst nie musi być wielki aby zagrozić bezpieczeństwu lotu samolotu. Zagrożenie dla odrzutowca leży w kombinacji średniej wartości podmuchu pionowego (około 4 m/s) z podłużnym gradientem wiatru;
- Można łagodzić skutki uskoku wiatru za pomocą odpowiedniej strategii sterowania oraz wcześniejszego poinformowania pilota o wystąpieniu uskoku wiatru. Mimo wszystko najbezpieczniej jest unikać silnego uskoku wiatru!

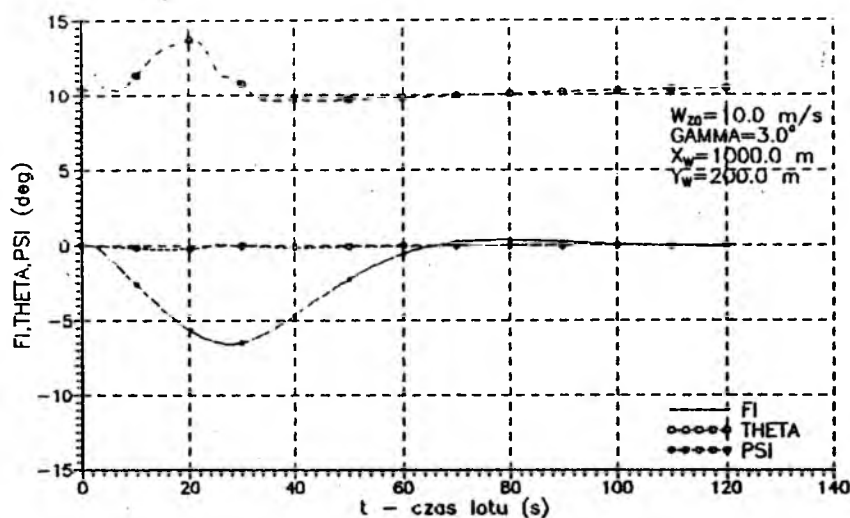
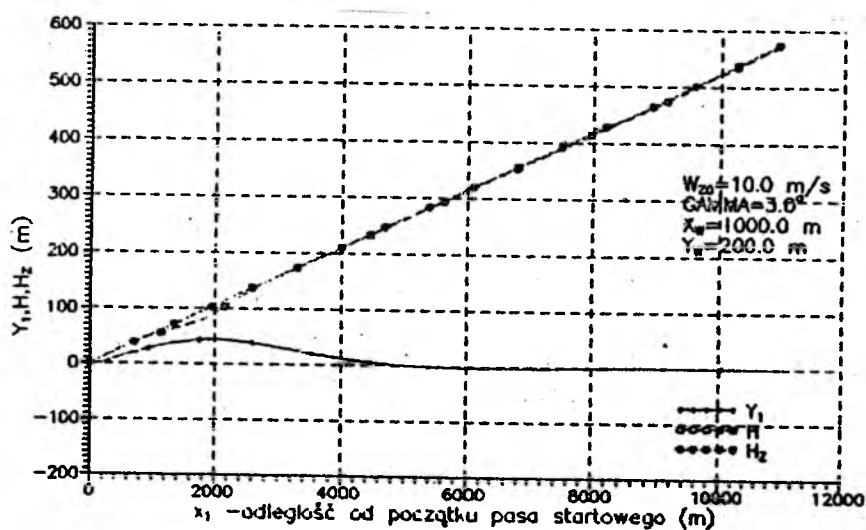
Literatura

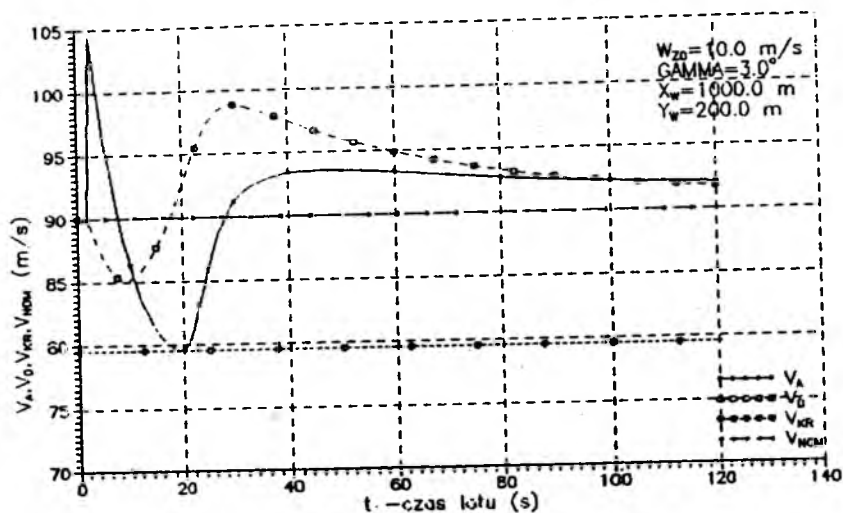
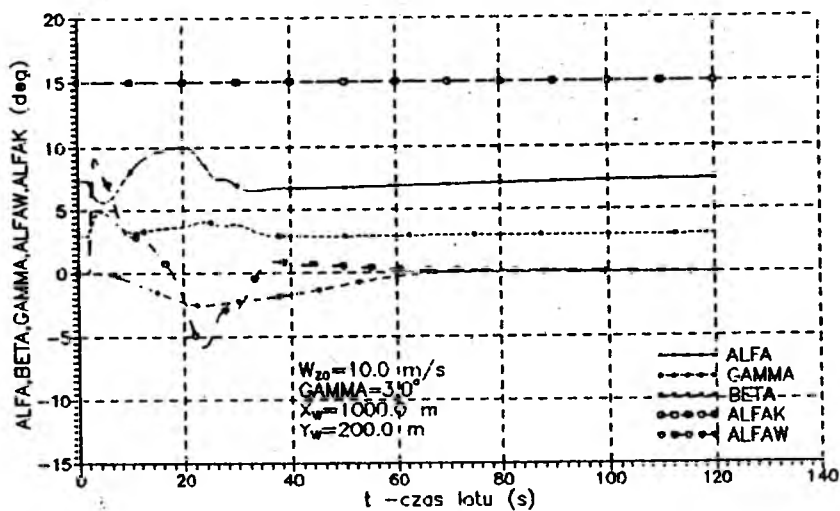
1. BOHUN, R., 1671, *A Discourse Concerning Origine and Properties of Wind*, Oxford University, by W.Hall for Thomas Bowman
2. FUJITA T.T., 1985, *The Downburst*, SMRP Research Paper 210, University of Chicago
3. MARYNIAK J., 1985, *Ogólny model symulacji samolotu*, Sprawozdanie nr. 140/85
4. GUTOWSKI R., 1971, *Mechanika analityczna*, PWN Warszawa
5. MARYNIAK J., PEDRO J., 1992, *Modelowanie matematyczne wpływu zmiennego ruchu powietrza na dynamikę lądującego samolotu*, XXXI Sympozjon "Modelowanie w Mechanice", Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika, 107, Gliwice
6. BRAY R.S., 1985, *A method for three-dimensional modelling of windshear environments for flight simulator applications*, NASA TM85969
7. BOWLES R.L. AND FROST W., 1987, *Windshear/Turbulence Inputs to Flight Simulation and Systems Certification*, NASA CP-2474

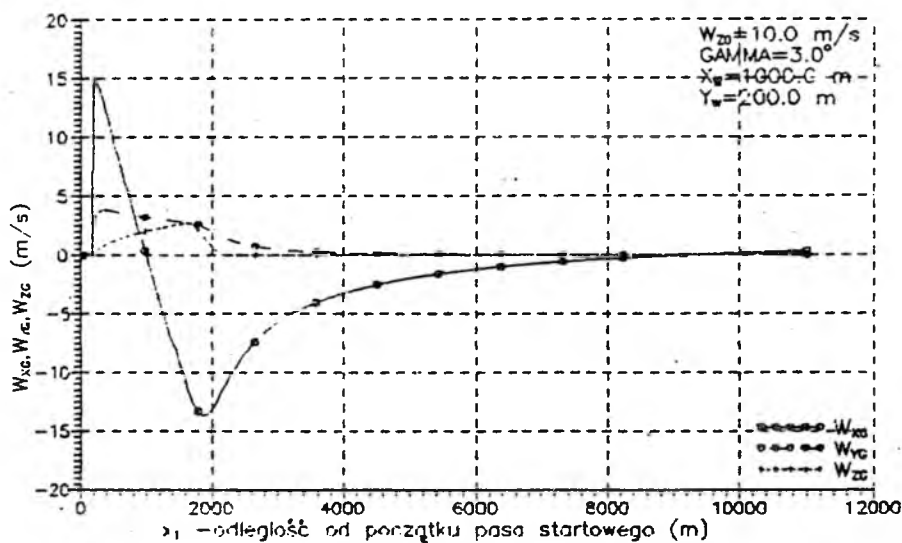
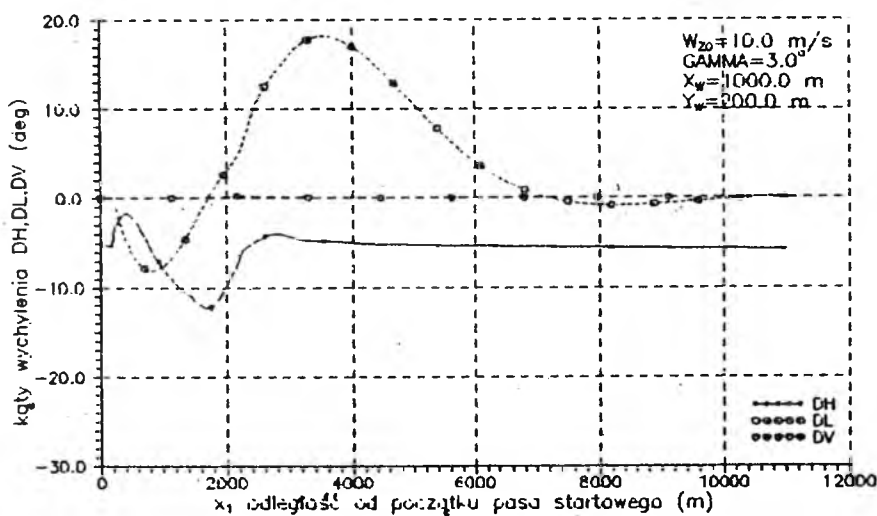
8. BROCKHAUS R., 1987, *A mathematical multi-point model for aircraft motion in moving air*, ZFW 11
9. FISZDON W., 1961, *Mechanika Lotu*, PWN, Warszawa-Lódź
10. MARYNIAK J., 1991, *Modelowanie matematyczne automatycznie sterowanych obiektów ruchomych*, Materiały III Krajowej Konferencji Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania, Gdynia
11. ETKIN B., 1972, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley & Sons, New York

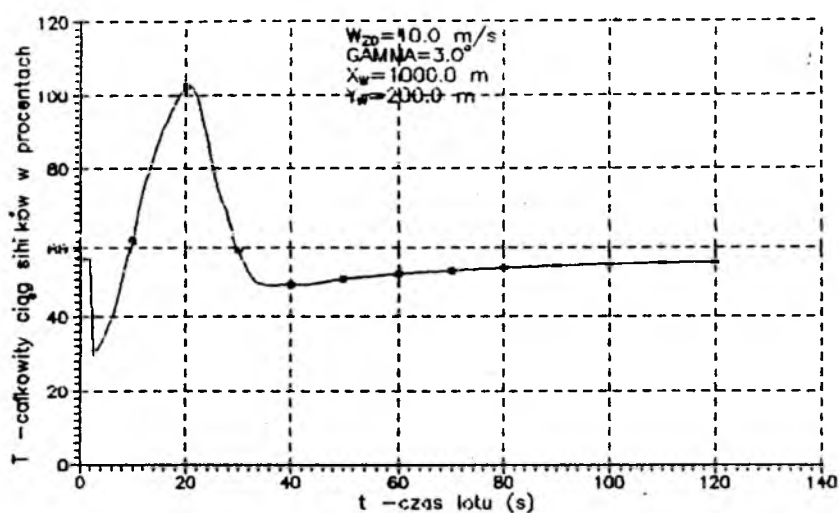


Rys. 5. Przebiegi składowych prędkości w czasie

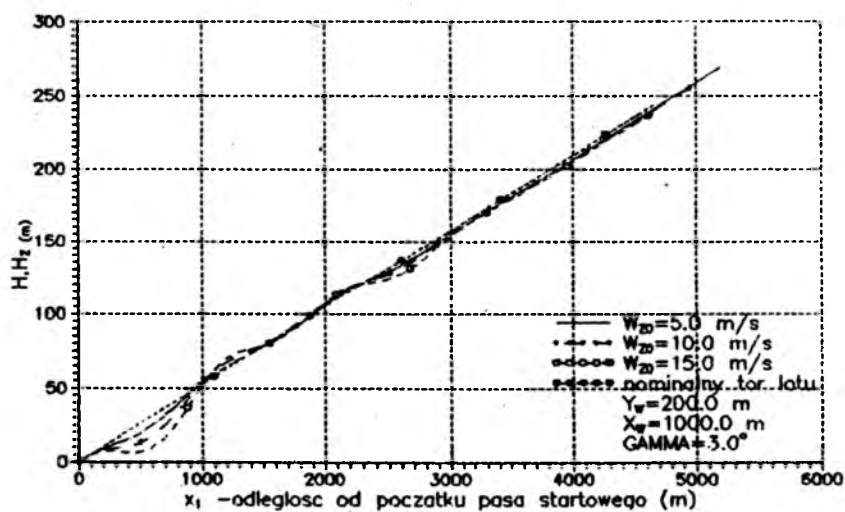
Rys. 6. Przebiegi kątów θ , ϕ , ψ w czasieRys. 7. Przebiegi y_1 , H , H_2 w funkcji odległości x_1

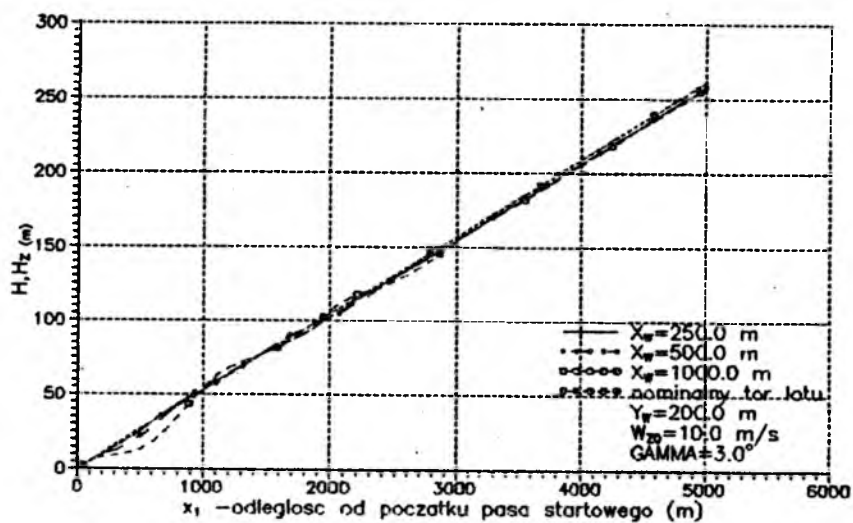
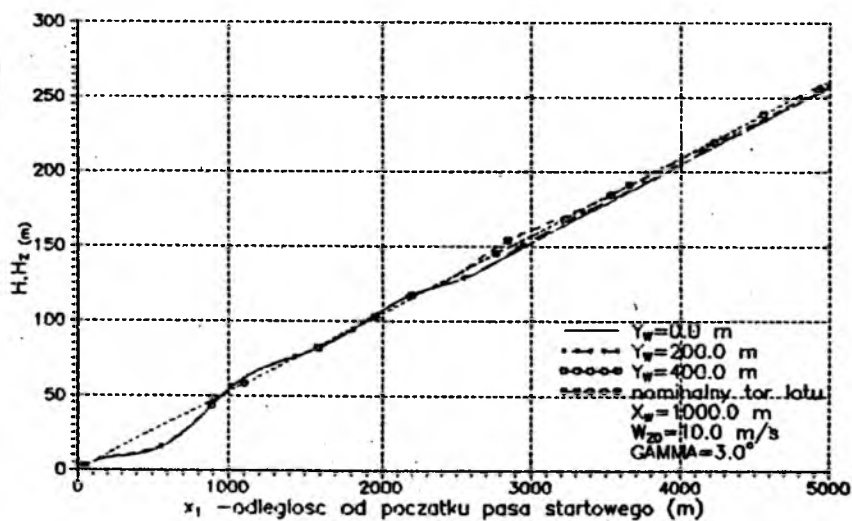
Rys. 8. Przebiegi prędkości V_A , V_0 , V_{KR} , V_{NOM} w czasieRys. 9. Przebiegi kątów α , β , γ , α_w i α_k w czasie

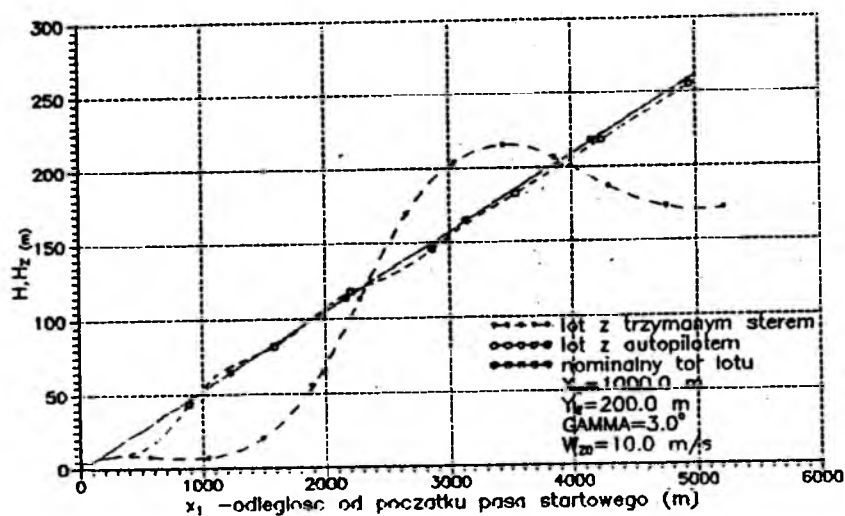
Rys. 10. Przebiegi składowych prędkości wiatru w funkcji x_1 Rys. 11. Przebiegi kątów wychYLENIA $\delta_H, \delta_v, \delta_L$ w funkcji x_1



Rys. 12. Przebieg ciągu silnika w czasie

Rys. 13. Trajektoria lotu dla różnych wartości W_{20}

Rys. 14. Trajektoria lotu dla różnych wartości x_w Rys. 15. Trajektoria lotu dla różnych wartości y_w



Rys. 16. Trajektoria lotu z autopilotem oraz ze sterem trzymanym

MODELOWANIE DYNAMIKI PRZESTRZENNEGO RUCHU SAMOLOTU PO USZKODZENIU USTERZENIA WYSOKOŚCI¹

ZBIGNIEW DŻYGADŁO

KRZYSZTOF SIBILSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wstęp

Rozpatrzono dynamikę przestrzennego ruchu samolotu o napędzie odrzutowym, zaburzonego awarią (urwaniem się) steru wysokości [1]. Równania ruchu środka masy samolotu zapisano w prędkościowym układzie współrzędnych, natomiast równania ruchu obrotowego samolotu względem środka masy zapisano w układzie współrzędnych związanych z samolotem.

Uwzględniono wpływ momentów giroskopowych wirujących mas silnika na dynamikę ruchu samolotu.

Przeprowadzono przykładowe obliczenia numeryczne, których wyniki umożliwiają analizę ruchu samolotu w założonym stanie awaryjnym lotu.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

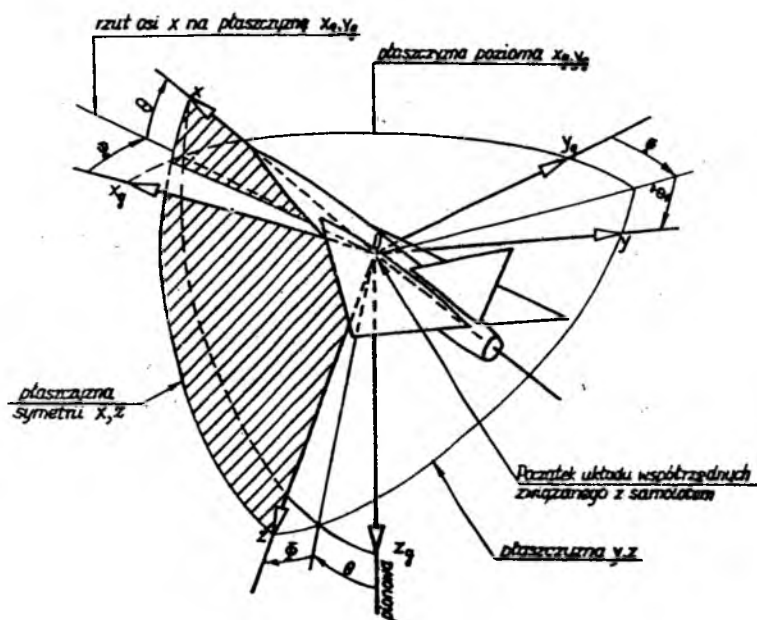
C_{ZH}	– współczynnik siły nośnej usterzenia,
F	– ciąg silnika,
g	– przyspieszenie ziemskie,
I_X, I_Y, I_Z, I_{XZ}	– momenty bezwładności samolotu,
I_0	– biegunowy moment bezwładności wirujących mas silnika,
L	– moment przechylający,
L_F	– moment przechylający pochodzący od silnika,

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

L_{GIR}	-	giroskopowy moment przechylający,
L^p	-	pochodna momentu przechylającego względem kątowej prędkości przechylania,
L^r	-	pochodna momentu przechylającego względem kątowej prędkości odchyłania,
L^β	-	pochodna momentu przechylającego względem kąta ślizgu,
$L^{\delta v}$	-	pochodna momentu przechylającego względem kąta wychylenia steru kierunku,
$L^{\delta L}$	-	pochodna momentu przechylającego względem kąta wychylenia lotek,
m	-	masa samolotu,
M	-	moment pochylający,
M_{bu}	-	moment pochylający samolotu bez usterzenia,
M_F	-	moment pochylający pochodzący od silnika,
M_{GIR}	-	giroskopowy moment pochylający,
M^q	-	pochodna momentu pochylającego względem kątowej prędkości pochylania,
M^α	-	pochodna momentu pochylającego względem prędkości zmian kąta natarcia,
N	-	moment odchylający,
N_F	-	moment odchylający pochodzący od silnika,
N_{GIR}	-	giroskopowy moment odchylający,
N^p	-	pochodna momentu odchylającego względem prędkości kątowej przechylania,
N^β	-	pochodna momentu odchylającego względem kąta ślizgu,
p	-	prędkość kątowa przechylania,
P_{xa}	-	siła oporu aerodynamicznego,
P_{ya}	-	aerodynamiczna siła boczna,
P_{za}	-	siła nośna,
q	-	prędkość kątowa pochylania,
r	-	prędkość kątowa odchyłania,
S_H	-	powierzchnia statecznika poziomego,
$S_{\delta H}$	-	powierzchnia steru wysokości,
V	-	prędkość lotu,
α	-	kąt natarcia samolotu,
α_H	-	kąt natarcia usterzenia poziomego,
δ_H	-	kąt wychylenia steru wysokości,

- δ_L - kąt wychylenia lotek,
- δ_V - kąt wychylenia steru kierunku,
- γ - kąt pochylenia toru lotu samolotu,
- ρ - gęstość powietrza,
- Θ - kąt pochylenia samolotu,
- Φ - kąt przechylenia samolotu,
- φ - kąt zawarty między wektorem ciągu a podłużną osią kadłuba,
- Ψ - kąt odchylenia samolotu,
- ω - prędkość kątowa wirnika silnika.

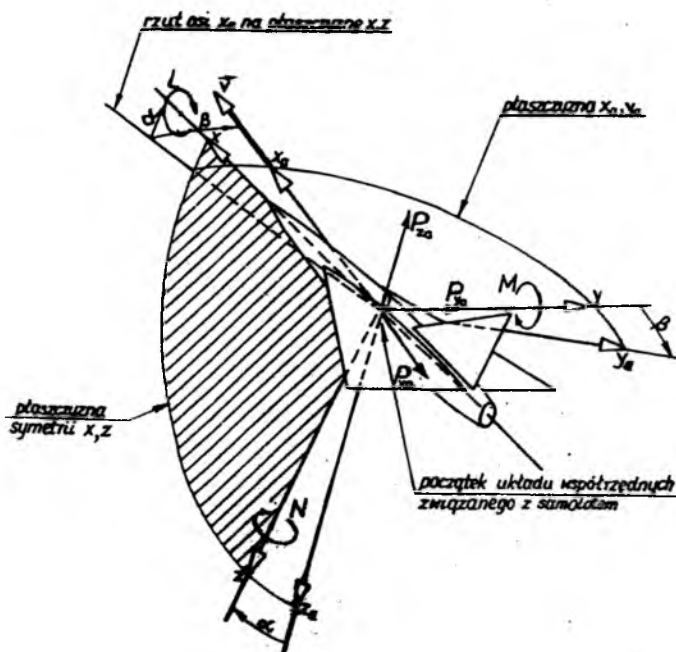
2. Sformułowanie problemu



Rys. 1.

Rozpatrzmy przestrzenny, zaburzony ruch samolotu o napędzie odrzutowym. Przyjmijmy, że równania ruchu środka masy samolotu zapisane będą w układzie współrzędnych związanych z przepływem, zaś równania ruchu obrotowego samolotu względem środka masy dane będą w układzie współrzędnych związanych z

samolotem (rys.1, 2).



Rys. 2.

Założymy, że samolot jest bryłą. Układ sterowania samolotu jest nieodkształcalny.

Dodatknie zwroty sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot przyjmujemy jak na rys.2.

Równania ruchu samolotu przyjmujemy w postaci (por. [2] ÷ [8]):

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \{ [F \cos(\alpha + \varphi) - mg(\sin \Theta \cos \alpha - \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha)] \cos \beta + \\
 &\quad + mg \cos \Theta \sin \Phi \sin \beta - P_{xa} \} / m, \\
 \frac{d\alpha}{dt} &= q - (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \\
 &\quad - \frac{F \sin(\alpha + \varphi) - mg(\sin \Theta \sin \alpha - \cos \Theta \cos \Phi \cos \alpha) - P_{za}}{mV \cos \beta}, \\
 \frac{d\beta}{dt} &= p \sin \alpha - r \cos \alpha - \{ [F \cos(\alpha + \varphi) - mg(\sin \Theta \cos \alpha - \\
 &\quad - \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha)] \sin \beta - mg \cos \Theta \sin \Phi \cos \beta - P_{ya} \} / mV,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
I_X \frac{dp}{dt} - I_{XZ} \left(\frac{dr}{dt} + pq \right) + qr(I_Z - I_Y) &= L + L_F + L_{GIR}, \\
I_Y \frac{dq}{dt} - I_{XZ}(r^2 - p^2) + pr(I_X - I_Z) &= M + M_F + M_{GIR}, \\
I_Z \frac{dr}{dt} - I_{XZ} \left(\frac{dp}{dt} - qr \right) + pq(I_Y - I_X) &= N + N_F + N_{GIR}.
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Równania (2.1)÷(2.2) należy uzupełnić równaniami związków kinematycznych:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{r \cos \Phi + q \sin \Phi}{\cos \Theta}, \\
\frac{d\Theta}{dt} &= q \cos \Phi - r \sin \Phi, \\
\frac{d\Phi}{dt} &= p + (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \operatorname{tg} \Theta,
\end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_g}{dt} &= u \cos \Theta \cos \Psi + v(\sin \Theta \sin \Phi \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\
&+ w(\sin \Theta \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi), \\
\frac{dy_g}{dt} &= u \cos \Theta \sin \Psi + v(\sin \Theta \sin \Phi \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi) + \\
&+ w(\sin \Theta \cos \Phi \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi), \\
\frac{dz_g}{dt} &= -u \sin \Theta + v \cos \Theta \sin \Phi + w \cos \Theta \cos \Phi,
\end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
u &= V \cos \alpha \cos \beta, \\
v &= V \sin \beta, \\
w &= V \sin \alpha \cos \beta.
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Sily aerodynamiczne dane są w prędkościowym układzie współrzędnych, przy czym:

– opór aerodynamiczny

$$P_{xa} = A_0(Ma) + A_1(Ma)\alpha + A_2(Ma)\alpha^2 + A_3(Ma)\alpha^3, \quad (2.6)$$

gdzie współczynniki $A_0 \div A_3$ są funkcjami liczby Macha i aproksymowano je odcinkami liniowo,

– siła boczna

$$P_{ya} = P_{ya}^\beta \beta + P_{ya}^{\delta_v} \delta_v, \quad (2.7)$$

przy czym funkcje:

$$P_{ya}^\beta = f_1(Ma), \quad P_{ya}^{\delta_v} = f_2(Ma),$$

są aproksymowane odcinkami liniowo,
– siła nośna samolotu

$$P_{za} = P_{zabu} + P_{zH}, \quad (2.8)$$

$$P_{zabu} = P_{z0}(Ma) + P_z^\alpha(Ma)\alpha.$$

W zakresie nieliniowej zmiany $C_Z(\alpha)$ siłę nośną samolotu aproksymowano podobnie jak siłę oporu.

Siła nośna usterzenia P_{zH} liczona była z zależności:

$$P_{zH} = P_{zH}^{\alpha_H} \alpha_H + P_{zH}^{\delta_H} \delta_H, \quad (2.9)$$

przy czym:

$$\alpha_H = \alpha + \alpha_{zH} - \varepsilon, \quad (2.10)$$

α_{zH} – kąt zaklinowania statecznika,

$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon^\alpha \alpha_H$ – kąt odchylenia strug na stateczniku poziomym,

$$P_{zH}^{\alpha_H} = \frac{1}{2} \rho k_1 S_H V_H^2 a_{1H}, \quad (2.11)$$

$$a_{1H} = z_k \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H},$$

gdzie z_k jest współczynnikiem korekcyjnym,

$$k_1 = \frac{S_H - S_{zH}}{S_H}. \quad (2.12)$$

Momenty aerodynamiczne L , M , N (rys.2) samolotu obliczono z zależności:

$$L = L^\beta \beta + L^p p + L^r r + L^{\delta_L} \delta_L + L^{\delta_v} \delta_v,$$

$$M = M_{bu}(\alpha, Ma) + M^q q + M^\alpha \frac{d\alpha}{dt} - l_H P_{zH}, \quad (2.13)$$

$$N = N^\beta \beta + N^p p + N^r r + N^{\delta_L} \delta_L + N^{\delta_v} \delta_v.$$

Pochodne aerodynamiczne L^β , L^p , ..., N^{δ_L} , N^{δ_v} będące funkcjami liczby Macha aproksymowano odcinkami liniowo.

Moment giroskopowy wirujących mas silnika liczymy z zależności:

$$M_{GIR} = I_0 \omega \times \Omega, \quad (2.14)$$

gdzie:

$$\omega = [\omega \cos \varphi, 0, -\omega \sin \varphi]^T,$$

$$\Omega = [p, q, r]^T.$$

3. Ustalenie warunków początkowych oraz warunków równowagi

Przyjmujemy, że przed awarią samolot poruszał się ruchem krzywoliniowym w płaszczyźnie symetrii.

Zakładamy, że w chwili awarii ruch odbywał się ze współczynnikami przeciążenia:

- normalnego do toru lotu n_{za} ,
- stycznego do toru lotu n_{xa} .

Ponadto przyjmujemy, że:

$$n_{ya} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\Phi} = 0.$$

Przy powyższych założeniach można przyjąć, że (por. [1,8]):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= n_{xa}g - g \sin \gamma, \\ q_A = q &= \frac{n_{xa}g}{V} - \frac{g}{V} \cos \gamma, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{g^2}{V^2}(n_{xa} - \sin \gamma)(n_{xa} - \cos \gamma). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Równania równowagi sił zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} mgn_{xa} &= F \cos(\alpha + \varphi) - P_{xa}, \\ P_{ya} &= 0, \\ mgn_{za} &= F \sin(\alpha + \varphi) + P_{za}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Równania równowagi momentów przyjmą postać:

$$\begin{aligned} L + L_F + L_{GIR} &= 0, \\ M + M_F + M_{GIR} &= I_y \frac{dq}{dt}, \\ N + N_F + N_{GIR} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Z równań (3.2) otrzymamy:

$$F = P_{xa} \cos(\alpha + \varphi) - P_{za} \sin(\alpha + \varphi) + mg[\sin(\alpha + \varphi)(n_{xa} + \cos \gamma) + \cos(\alpha + \varphi)(n_{xa} + \sin \gamma)], \quad (3.4)$$

$$P_{za} \cos(\alpha + \varphi) + P_{xa} \sin(\alpha + \varphi) - mg[\cos(\alpha + \varphi)(n_{xa} + \cos \gamma) - \sin(\alpha + \gamma)(n_{xa} + \sin \gamma)] = 0. \quad (3.5)$$

Równanie (3.5) rozwiązujemy metodą bisekcji.

Na podstawie (3.3) i (2.13) otrzymujemy następującą zależność:

$$\delta_H = \frac{1}{l_H P_{zH}^{\delta_H}} \left[M_{bu}(\alpha, Ma) - l_H P_{zH}^{\alpha_H} \alpha_H + \frac{n_{zag}}{V} \left(M^q + I_Y \frac{n_{zag}}{V} \right) + M_F \right]. \quad (3.6)$$

Kąty wychYLENIA steru kierunku, lotek i kąt ślizgu wyliczamy z układu równań:

$$\begin{aligned} P_Y^{\delta_v} \delta_v + P_Y^{\beta} \beta &= 0, \\ L^{\delta_L} \delta_L + L^{\delta_v} \delta_v + L^{\beta} \beta &= -L_F, \\ N^{\delta_L} \delta_L + N^{\delta_v} \delta_v + N^{\beta} \beta &= -\left(N_F + I_0 \omega \cos \varphi \frac{n_{zag}}{V} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Rozwiązując układ równań (3.7) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \delta_L &= \frac{L_F \left(N^{\delta_v} - \frac{P_Y^{\delta_v}}{P_Y^{\beta}} N^{\beta} \right) - \left(N_F + I_0 \omega \cos \varphi \frac{n_{zag}}{V} \right) \left(L^{\delta_v} - \frac{P_Y^{\delta_v}}{P_Y^{\beta}} L^{\beta} \right)}{L^{\delta_L} \left(N^{\delta_v} - \frac{P_Y^{\delta_v}}{P_Y^{\beta}} N^{\beta} \right) - N^{\delta_L} \left(L^{\delta_v} - \frac{P_Y^{\delta_v}}{P_Y^{\beta}} L^{\beta} \right)}, \\ \delta_v &= \frac{L^{\delta_L} \left(N_F + I_0 \omega \cos \varphi \frac{n_{zag}}{V} \right) - N^{\delta_L} L_F}{L^{\delta_L} \left(N^{\delta_v} - \frac{P_Y^{\delta_v}}{P_Y^{\beta}} N^{\beta} \right) - N^{\delta_L} \left(L^{\delta_v} - \frac{P_Y^{\delta_v}}{P_Y^{\beta}} L^{\beta} \right)}, \\ \beta &= -\frac{P_Y^{\delta_v}}{P_Y^{\beta}} \delta_v. \end{aligned} \quad (3.8)$$

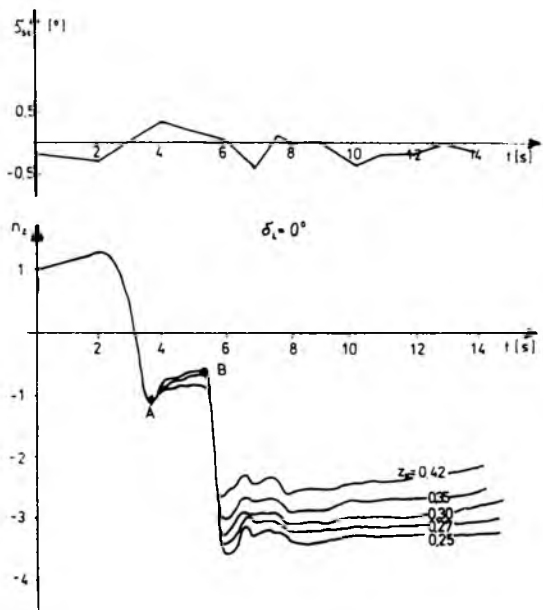
4. Przykładowe wyniki obliczeń

Numeryczne obliczenia przeprowadzono dla samolotu TS-11 "Iskra". Awarię usterzenia modelowano w następujący sposób:

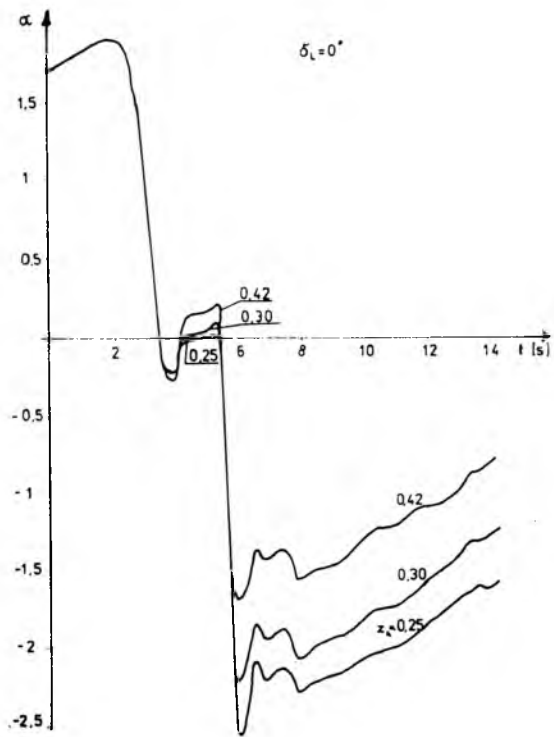
1. Założono, że w czasie awarii występuje samoczynne przestawienie statecznika od kąta $-0.3^\circ \div 0.4^\circ$ i następnie jak pokazano na rys.3.
2. Przyjęto, że na pochyłym odcinku krzywej n_z (rys.3) usterzenie poziome traci efektywność (np. z powodu awarii steru) i w związku z tym współczynnik a_{1H} wynosi:

$$a_{1H} = a_{1H0} z_k, \quad a_{1H0} = \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H},$$

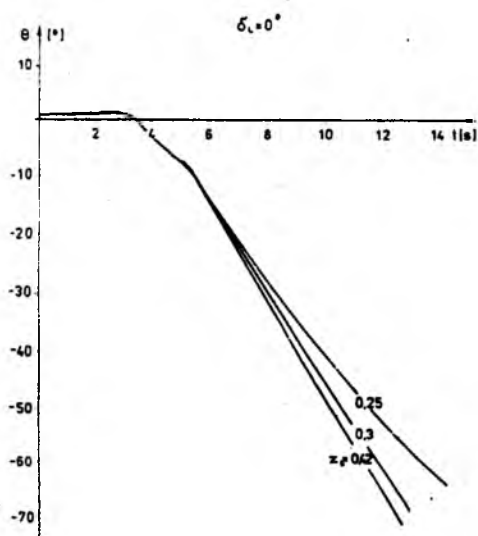
gdzie z_k jest współczynnikiem korekcyjnym.



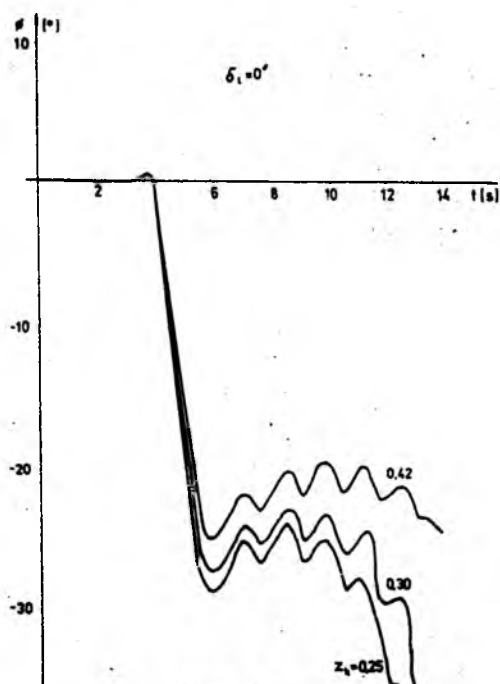
Rys. 3.



Rys. 4



Rys. 5.



Rys. 6.

3. W punkcie A (rys.3) prawa połówka steru traci całkowicie efektywność, a w punkcie B traci efektywność lewa połówka (np. urywając się). Wówczas siła nośna na usterzeniu zmienia się proporcjonalnie do:

$$k_1 = \frac{S_H - S_{sH}}{S_H}.$$

Wyniki tych obliczeń pokazano na rys.3÷6. Na rys.4 przedstawiono przebieg zmian kąta natarcia α , na rys.5 zmianę kąta pochylenia samolotu Θ , a na rys.6 zmianę kąta przechylenia Φ samolotu w funkcji czasu.

Kąt przechylenia Φ (rys.6) przyjmuje wartości ujemne – to jest patrząc w kierunku lotu samolot zaczyna obracać się w lewą stronę między punktami A i B (rys.3).

Analizując wyniki obliczeń, można stwierdzić, że w przypadku tak zamodelowanej awarii usterzenia, pilot praktycznie nie ma szans, by wyprowadzić samolot do lotu poziomego i bezpiecznie wylądować. Prawidłową decyzją jest jak najszybsze opuszczenie samolotu, (najlepiej przed czasem osiągnięcia punktu B (rys.3), to jest przed chwilą w której następuje gwałtowne zmniejszenie współczynnika przeciążenia. Bardzo szybkie zmniejszanie się współczynnika przeciążenia połączone z szybkim pochyleniem kadłuba samolotu może poważnie utrudnić (lub wręcz uniemożliwić) opuszczenie samolotu w dalszej fazie lotu.

Literatura

1. DŻYGADŁO Z., SIBILSKI K., 1990, *Analiza dynamiki lotu samolotu w wybranym stanie awaryjnym*, Mech.Teor.i Stos., 3-4, 28
2. BEKEY G.A., KARPULUS W.J., 1976, *Obliczenia hybrydowe*, WNT, Warszawa
3. BJUSZGENS G.S., STUDENEW R.W., 1967, *Dynamika prostranstwennogo dwiżenija samoleta*, Moskwa
4. DŻYGADŁO Z., KRZYŻANOWSKI A., 1982, *Dynamika nieautonomicznego przestrzennego ruchu samolotu z nieruchomym układem sterowania*, Biul.WAT, XXXI, 12
5. ETKIN B., 1972, *Dynamics of Atmospheric flight*, Ed. John Willey, N.York
6. FISZDON W., 1961, *Mechanika Lotu, cz. I i II*, PWN, Warszawa
7. PASZKOWSKI N.M., 1975, *Ustojčiwost' i upravljaemost' samoleta*, Moskwa
8. DŻYGADŁO Z., SIBILSKI K., 1987, *Wpływ zrzuću ładunków na dynamikę przestrzennego ruchu samolotu*, Mech.Teoret.i Stos., 1/2, 25



SOKÓŁ MS

ŚMIGŁOWIEC
MYŚLIWSKO-
SZTURMOWY



METODA ANALIZY I SYNTEZY UKŁADU AUTOMATYCZNEGO STEROWANIA LOTEM SAMOŁOTU¹

CEZARY SZCZEPAŃSKI

Politechnika Warszawska

W pracy przedstawiono metodę analizy i syntezy układu automatycznego sterowania lotem samolotu. Zaproponowana metoda umożliwia syntezę układu wykonującego polecenia o strukturze takiej jak komendy wydawane pilotowi. Zaprojektowany w ten sposób układ automatycznego sterowania zapewnia wykonanie przez samolot dowolnej figury akrobacji lub dowolnego zadania pilotażowego.

1. Wprowadzenie

Zagadnienia analizy i syntezy układu automatycznego sterowania lotem samolotu, zwanego często autopilotem lub pilotem automatycznym, składają się w swojej istocie na problem zaprojektowania regulatora sterującego ruchem statku powietrznego. W taki też sposób, w klasycznym podejściu do zagadnienia projektowania takiego układu, traktowano autopilota [1,2,3]. Obiektem sterowania był wówczas nie tyle statek powietrzny (samolot), co wybrane jego funkcje np. stabilizacja wysokości lotu w wybranych fazach lotu, np. podczas przelotu długodystansowego. W istocie projektowano wówczas stosunkowo proste regulatory o ograniczonym zakresie funkcji i czasie działania. W tym celu wystarczające były liniowe modele obiektu sterowania i ogólnie znane metody projektowania regulatorów liniowych.

W miarę wzrostu komplikacji zadań wykonywanych przez samoloty wzrosły także wymagania wobec ich układów automatycznego sterowania. Autopiloty sterują już głównymi parametrami lotu: prędkością i wysokością lotu oraz kursem, podczas większości faz lotu. Przy projektowaniu takich autopilotów stosuje się już modele nieliniowe obiektów sterowania, a same autopiloty są także układami nieliniowymi [3,5,6,8].

W ostatnich latach pojawiła się nowa tendencja w projektowaniu układów automatycznego sterowania samolotami. Daje się ona zaobserwować szczególnie w przypadkach samolotów wojskowych i dużych samolotów pasażerskich. Polega ona

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

na całościowym projektowaniu systemu sterowania samolotem wraz z jego wszystkimi istotnymi układami i instalacjami, np. układami nawigacyjnymi, układami sterowania uzbrojeniem, instalacjami zasilania silników itd. W takim złożonym systemie autopilot jest jednym z elementów. Musi więc mieć dostosowane do pozostałych elementy wejścia i wyjścia, a także zgodny z nimi cykl pracy. Ze względu na duże znaczenie autopilota dla bezpieczeństwa lotu na ogół musi on poprawnie działać nawet przy częściowo niesprawnych pozostałych elementach.

Autopilot tego typu pobiera dane wejściowe z układów nawigacyjnych. Oprócz sygnałów sterujących odpowiednimi urządzeniami sterującymi lotem samolotu (stery, klapy, hamulce aerodynamiczne, itp.), musi także generować sygnały sterujące pracą innych systemów pokładowych, np. układem zasilania silników.

Sterowanie takiego autopilota jest wielowariantowe. Komendy, polecenia lub sygnały sterujące mogą być wprowadzane:

- bezpośrednio z pulpitu na pokładzie statku powietrznego,
- przez pokładowy komputer nawigacyjny, mający w pamięci zaprogramowaną uprzednio trasę lotu,
- przez naziemne, radiowe układy naprowadzania,
- głosem przez pilota lub naziemnego nawigatora.

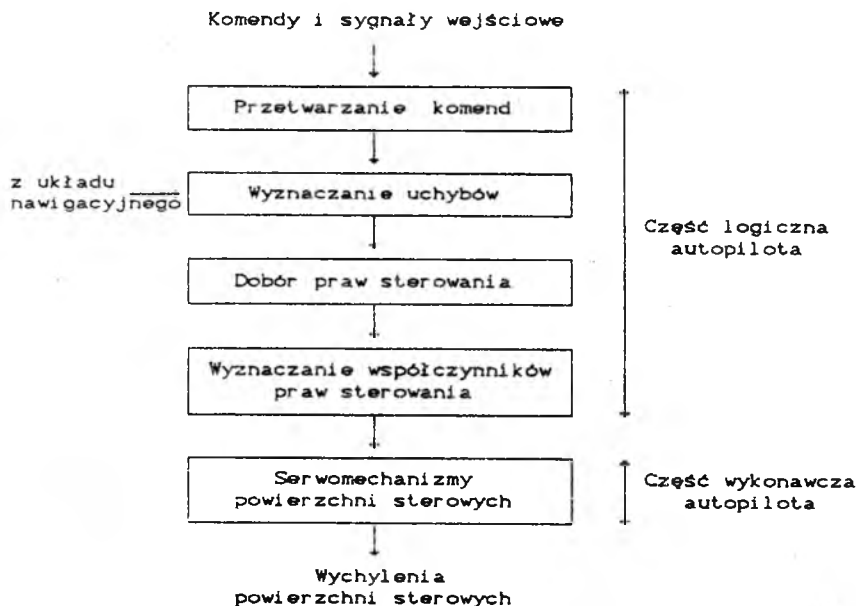
Struktura sygnału sterującego autopilota jest różna dla różnych źródeł tych sygnałów. Począwszy od sygnałów elektrycznych o jednoznacznej logice, w przypadku sterowania z komputera nawigacyjnego lub naziemnych układów radiowych, aż do sygnałów o złożonej logice, w przypadku sterowania głosem przez człowieka. Ze względu na wymaganie, by autopilot reagował na wszystkie wymienione powyżej źródła sterowania, musi on mieć strukturę przystosowaną do przypadku najbardziej złożonego.

Głównym problemem podczas projektowania układu automatycznego sterowania lotem statku powietrznego staje się więc opracowanie jego części logicznej, to znaczy tej, która jest odpowiedzialna za przetwarzanie informacji wejściowych na sygnały sterujące odpowiednimi układami wykonawczymi. Zagadnienie zaprojektowania odpowiednich serwo mechanizmów wykonujących "polecenia" części logicznej autopilota jest problemem inżynierskim, który nie będzie przedmiotem rozważań niniejszej pracy.

2. Struktura autopilota

Złożoność i różnorodność informacji wejściowych, w tym szczególnie komend sterujących, implikuje rozbudowę części logicznej nowoczesnych autopilotów, w

stosunku do ich starszych generacji. Strukturę takiego autopilota pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Struktura autopilota

Każda z komend ma swoją ściśle określoną postać, zrozumiałą przez człowieka, lecz zupełnie nieprzydatną dla układu automatycznego sterowania. Pierwszą funkcją autopilota jest więc przetworzenie komend wydanych przez pilota lub naziemnego nawigatora do postaci zrozumiałej dla układu automatycznego sterowania lotem. Na podstawie rozkodowanych komend następuje wyznaczenie uchybów. Minimalizując uchyby, to znaczy sprowadzając wartości aktualne parametrów lotu do ich wartości zadanych, uzyskuje się pożądaný stan ruchu przestrzennego sterowanego obiektu.

Wyznaczone uchyby są podstawowymi składnikami praw sterowania w poszczególnych kanałach sterowania. W teorii sterowania lotem samolotu wyróżnia się cztery kanały sterowania: prędkości i wysokości lotu, odchylenia i przechylenia samolotu. Wysterowując odpowiednio kanały odchylenia i przechylenia uzyskuje się pożądaný kurs samolotu. W każdym z kanałów sterowania wyznacza się sygnały sterujące serwomechanizmami wychylającymi odpowiednie powierzchnie sterowe; w przypadku kanału prędkości jest to serwomechanizm przedstawiający dźwignie sterowania ciągiem zespołu napędowego.

Wartości współczynników praw sterowania dla ograniczonych zakresów parametrów lotu mogą być stałe. W ogólnym przypadku zależą jednak od aktualnych

wartości parametrów lotu, a przede wszystkim od prędkości i wysokości lotu [6].

3. Metoda analizy i syntezy autopilota

3.1. Analiza układu

Zakres funkcji i jakość ich realizacji przez autopilota zależy przede wszystkim od struktury części logicznej. Z tego względu analiza układu automatycznego sterowania ruchem statku powietrznego dotyczy właściwie analizy jego części logicznej.

Kluczowym punktem analizy jest wydzielenie modułów podstawowych w zbiorze komend sterowania autopilotem lub w zbiorze trajektorii lotów, które ma on realizować. Pod pojęciem modułu podstawowego rozumie się tu element komendy lub trajektorii, możliwy do zrealizowania przez układ automatycznego sterowania. Moduły podstawowe powinny mieć następujące cechy:

- powinny tworzyć, o ile jest to możliwe, zamknięte całości odpowiadające podstawowym manewrom sterowanego statku powietrznego,
- powinny umożliwiać komponowanie z nich dowolnych manewrów lub trajektorii,
- muszą zapewnić właściwą reakcję statku powietrznego na wszystkie możliwe komendy, polecenia lub sygnały sterujące,
- sposób wykonania przez sterowany obiekt manewrów powinien być na tyle zbliżony do sposobu pilotowania przez człowieka, aby mógł on w dowolnym momencie przejąć sterowanie od układu automatycznego (ten warunek odnosi się szczególnie do statków powietrznych pilotowanych przez człowieka),
- manewry wykonywane przez statek powietrzny sterowany autopilotem muszą być bezpieczne dla jego konstrukcji i ładunku,
- powinno się dążyć do minimalizacji ilości modułów podstawowych, co znacznie uprości strukturę części logicznej autopilota.

Jak stąd widać tworzenie modułów podstawowych nie jest celem samym w sobie, a ma służyć optymalizacji układu automatycznego sterowania. Trudno jest jednoznacznie określić co może być modułem podstawowym, jaka trajektoria czy komenda. Zależy to od rodzaju zadań stawianych przed autopilotem i zakresu jego pracy, a także od typu sterowanego statku powietrznego. Każdorazowo, w zależności od zmian w funkcjach autopilota lub cech sterowanego obiektu, należy

od nowa przeprowadzić analizę układu automatycznego sterowania pod kątem wydzielenia nowego zestawu modułów podstawowych.

Etap analizy jest niezwykle ważny dla całego procesu projektowania autopilota. Niezbędne jest w nim pewne doświadczenie w dziedzinie automatyzacji sterowania ruchem statków latających oraz znajomość zjawisk zachodzących podczas lotu obiektu sterowania.

3.2. Synteza układu

Synteza powinna zakończyć się sformułowaniem praw sterowania serwomechanizmami wychylającymi odpowiednie powierzchnie sterowe lub organy sterowania statku powietrznego. Można w niej wyróżnić następujące etapy:

- łączenie modułów podstawowych w sekwencje umożliwiające wykonanie przez obiekt sterowania najprostszych manewrów. Tworzy się w ten sposób prawa sterowania służące do automatycznego sterowania statkiem powietrznym podczas tych manewrów,
- łączenie tak wygenerowanych prostych praw sterowania w bardziej rozbudowane ich sekwencje, wspólne dla wielu rodzajów manewrów statku powietrznego. Ten etap przebiega na przemian z analizą sposobu i jakości realizacji tych faz lotu.

Dążenie do prostoty praw sterowania wynika z doświadczenia. Na ogół im prostsza jest postać praw sterowania tym łatwiej i w bardziej kontrolowany sposób można dokonać syntezy układu sterowania silnie nieliniowym obiektem, jakim jest statek powietrzny.

4. Przykład zastosowania metody

4.1. Analiza układu

4.1.1. Blok przetwarzania komend

Wykorzystując opisaną metodę analizy i syntezy opracowano autopilota sterującego lotem poddźwiękowego samolotu bojowego. Omawiany autopilot był projektowany dla symulatorów walki powietrznej i szkolenia nawigatorów naprowadzania, do sterowania samolotami-celami i samolotami walczącymi z ćwiczącymi pilotami [7]. W rzeczywistym naprowadzaniu mamy do czynienia z zestawem 140 komend, a każdą z nich autopilot musi "rozumieć". Komendy mają różną postać, od najprostszej "Zwiększ wysokość o h metrów", poprzez złożone "Zwiększ

wysokość o h metrów, z prędkością wznoszenia w m/s, zmieniając prędkość do V km/h, z wyjściem na kurs ψ° , z przechyleniem φ° ; aż do komend wykonania akrobacji lotniczych lub złożonych manewrów typu "Wykonaj półprzewrót do wysokości h m" lub "Wejść na drugi krąg".

Dla celów syntezy autopilota należy wyodrębnić spośród wszystkich komend pewne podstawowe, wspólne elementy, które umożliwiłyby prawidłowe wykonanie komend nawigatora. Na podstawie analizy komend wyodrębniono następujące podstawowe moduły komend:

- zmień parametr lotu (wysokość, prędkość lub kurs samolotu) do wartości ...,
- zmień parametr lotu o ...,
- zmień parametr lotu z prędkością zmiany ...,
- zmień prędkość zmiany parametru lotu o ...,
- kierunek zmiany parametru lotu,
- charakterystyki obszaru, nad którym symuluje się loty.

Wszystkie komendy zrealizowano jako kombinacje tych podstawowych modułów. Wymagało to opracowania efektywnego algorytmu analizy komend i ich przekształcenia.

4.1.2. Wyznaczanie uchybów

Z punktu widzenia łatwości analizy jakości sterowania korzystnie jest, gdy w poszczególnych prawach sterowania mamy możliwie mało sygnałów uchybu. W tym przypadku minimalna ilość sygnałów uchybu była wyznaczana przez strukturę komend instruktora. Należało tak dobrać sekwencje wykonywanych modułów komend, by nie nastąpiło zaburzenie stabilności lotu samolotu. Uchyby wyznaczane były z ogólnej zależności:

$$\text{uchyb} = \text{wartość zadana} - \text{wartość aktualna}.$$

Wartość zadana była wprowadzona bezpośrednio jako parametr komendy instruktora lub wyznaczana w bloku przetwarzania komend według odpowiednich algorytmów. Wartość aktualna parametru lotu wyliczana była w programie symulacji lotu sterowanego samolotu-celu.

4.2. Synteza układu

Dokonując syntezy układu automatycznego sterowania lotem samolotu zgodnie z metodą opisaną w rozdziale 3 uzyskano prawa sterowania wysokością i prędkością

lotu oraz przechyleniem i odchyleniem samolotu. Prawa sterowania w poszczególnych kanałach mają postać:

— w kanale prędkości

$$\dot{\gamma}_v = K_v(V_z - V_c) - T_{\dot{v}}\dot{V}_c, \quad (4.1)$$

gdzie:

- $\dot{\gamma}_v$ — prędkość zmian położenia dźwigni sterowania silnikami,
- K_v — współczynnik wzmocnienia,
- $T_{\dot{v}}$ — współczynnik tłumienia,
- V_z — prędkość zadana,
- V_c — prędkość aktualna lotu,

— w kanale wysokości

$$\dot{\gamma}_w = K_H(H_z - H) + K_{\dot{H}}(\dot{H}_z - \dot{H}) - T_{\ddot{H}}\ddot{H} + K_{\theta}(\theta_z - \theta) - T_{\dot{\theta}}\dot{\theta}, \quad (4.2)$$

gdzie:

- $\dot{\gamma}_w$ — prędkość zmian wychylenia drążka w kierunku podłużnym,
- K_i — współczynniki wzmocnienia,
- T_i — współczynniki tłumienia,
- H_z — wysokość zadana,
- H — aktualna wysokość lotu,
- $\dot{H}_z$ — zadana prędkość pionowa,
- $\dot{H}$ — prędkość pionowa,
- $\ddot{H}$ — przyspieszenie pionowe,
- θ_z — zadany kąt pochylenia,
- θ — aktualny kąt pochylenia,
- $\dot{\theta}$ — prędkość kątowa pochylenia,

— w kanale odchylenia

$$\dot{\gamma}_k = K_K\beta - T_{\dot{\psi}}\dot{\psi}, \quad (4.3)$$

gdzie:

- $\dot{\gamma}_k$ — prędkość wychylania sterownicy nożnej,
- β — kąt ślizgu,
- $\dot{\psi}$ — prędkość kątowa odchylenia,
- K_K — współczynnik wzmocnienia,
- $T_{\dot{\psi}}$ — współczynnik tłumienia,

— w kanale przechylania

$$\dot{\gamma}_l = K_L(\Psi_z - \Psi) + K_\Phi(\Phi_z - \Phi) - T_{\dot{\Phi}}\dot{\Phi} - T_{\ddot{\Phi}}\ddot{\Phi}, \quad (4.4)$$

gdzie:

- $\dot{\gamma}_l$ — prękość wychylania lotek,
- Ψ_z — zadany kurs,
- Ψ — aktualny kurs,
- Φ_z — zadany kąt przechylenia,
- Φ — aktualny kąt przechylenia,
- $\dot{\Phi}$ — prędkość kątowa przechylania,
- $\ddot{\Phi}$ — przyspieszenie kątowe przechylania,
- K_i — współczynniki wzmocnienia,
- T_i — współczynniki tłumienia.

5. Wnioski

1. Opisana metoda analizy i syntezy układu automatycznego sterowania samolotem umożliwia zaprojektowanie systemu sterowania lotem współpracującego z innymi układami pokładowymi, jak na przykład: układ nawigacyjny, układ sterowania uzbrojeniem pokładowym, naziemne systemy radiowe. Można w ten sposób stworzyć zintegrowany system automatycznie sterujący całym lotem samolotu.
2. Autopilot zaprojektowany opisaną metodą może być sterowany za pomocą różnych źródeł informacji. Umożliwia to jego zastosowanie w różnych istniejących i nowo projektowanych typach samolotów.
3. Zaproponowana metoda może znaleźć zastosowanie przy projektowaniu układów automatycznego sterowania ruchem innych obiektów, jak na przykład śmigłowce, rakiety, pojazdy.
4. Opisana metoda projektowania układu automatycznego sterowania lotem samolotu oraz opracowany zgodnie z nią model autopilota mogą znaleźć szersze zastosowanie. Mogą one stanowić podstawę teoretyczną do:
 - syntezy systemu automatycznego sterowania złożonym ruchem przestrzennym samolotu (np. podczas akrobacji, walki powietrznej),
 - syntezy systemu automatycznego sterowania lotem samolotu za pomocą komend wydawanych głosem, mających taką strukturę jak komendy wydawane pilotowi.

5. Dużym ułatwieniem w stosowaniu tej metody byłoby opracowanie specjalizowanego języka służącego do programowania autopilotów, zbliżonego w swoich funkcjach do języków programowania robotów. W znacznym stopniu zautomatyzowałoby to proces syntezy autopilota i umożliwiło projektowanie jego elastycznej struktury bezpośrednio przez użytkowników. Jednak to zagadnienie wymaga jeszcze wielu dodatkowych badań.

Literatura

1. BODNER V.A., 1979, *Sistemy upravlenija letatelnyimi apparatami*, Maszynostroenie, Moskva
2. ETKIN B., 1972, *Dynamics of atmospheric flight*, John Wiley & Sons, New York & oth.
3. GAJDA J., SZCZEPAŃSKI C., 1988, *Optymalizacja komputerowych modeli dynamiki lotu myśliwca i celu sterowanych przez autopilota*, ITWL, Warszawa
4. KRASOVSKIJ A.A., 1973, *Sistemy avtomatycznego upravlenija poletom i ich analiticheskoe konstruirowanie*, Nauka, Moskva
5. NOVOSELOV A.S., BOLNOKIN V.E., CZINAEV P.I., JUREV A.N., 1987, *Sistemy adaptivnogo upravlenija letatelnyimi apparatami*, Maszynostroenie, Moskva
6. SZCZEPAŃSKI C., 1987, *Modelowanie i badanie zamkniętego układu sterowania lotem samolotu*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa
7. SZCZEPAŃSKI C., GAJDA J., ZAGDAŃSKI Z., 1990, *System symulatora walki powietrznej*, IV Ogólnopolska Konferencja "Mechanika w lotnictwie", Warszawa
8. VOGT R., SZCZEPAŃSKI C., GAJDA J., 1988, *Modelowanie systemów sterowania lotem samolotów dla potrzeb projektowania*, X Krajowa Konferencja Automatyki, T.II, str. 229-239, Lublin



CENTRUM KSZTAŁCENIA JĘZYKOWEGO KADR BANKOWYCH I FINANSOWYCH

Centrum prowadzi kształcenie językowe – języki angielski i niemiecki, kadr bankowych od poziomu podstawowego do zaawansowanego. Nasi absolwenci bez problemów zdają egzaminy resortowe, a najlepsi są przygotowani do zdania egzaminu Cambridge Certificate – pierwszy stopień. Centrum działa drugi rok, a najwyższy poziom kształcenia ukończyło 330 osób. Naszymi klientami są PKO Bank Państwowy, Bank PEKAO S.A., Bank Handlowy, Powszechny Bank Kredytowy S.A., Bank Gospodarki Żywnościowej i wiele innych.

Kształcenie odbywa się w ośrodku szkoleniowym oddalonym od centrum Warszawy o 13 km.

Centrum posiada specjalistyczne wyposażenie dydaktyczne znacznie ułatwiające i przyspieszające naukę języków. Programy kształcenia zostały opracowane przy współpracy angielskich partnerów.

Kadrę Centrum stanowią specjaliści językowi z jednej z najlepszych firm językowych Europy – EUROCENTRES

oraz pracownicy Uniwersytetu Warszawskiego, Szkoły Głównej Handlowej i kilku innych szkół wyższych.

Zajęcia organizowane są przy pomocy różnorodnych technik łącznie z wykorzystaniem komputerów, sprzętu audiowizualnego oraz SITA LEARNING SYSTEM.

Kursy organizowane są w układzie trzydniowych, tygodniowych i dwutygodniowych zjazdów. Terminy zjazdów i ich ilość dostosowana jest do potrzeb klienta i poziomu uczestników. Podstawowe formy kształcenia to kurs specjalistyczny, który trwa 560 godzin i kurs podstawowy, który trwa 360 godzin.

Pod koniec 1992r. po raz pierwszy organizowane będą w Centrum mieszane kursy przygotowawcze do egzaminów Cambridge Certificate – pierwszy i drugi stopień.

W IV kwartale 1992r. również po raz pierwszy wspólnie z Polskim Biurem Podróży „ORBIS” S.A. rozpoczniemy pełny zestaw kursów dla pracowników branży turystycznej. Kursy te odbywać się będą na poziomie podstawowym, średniozaawansowanym i specjalistycznym.

00-828 WARSZAWA
AL. JANA PAWŁA II NR 13
TEL. 20-25-51, 20-03-51/261
FAX 24-35-65

SYSTEM SYMULATORA WALKI POWIETRZNEJ¹

CZARY SZCZEPAŃSKI

JANUSZ GAJDA

Politechnika Warszawska

ZBIGNIEW ZAGDAŃSKI

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa

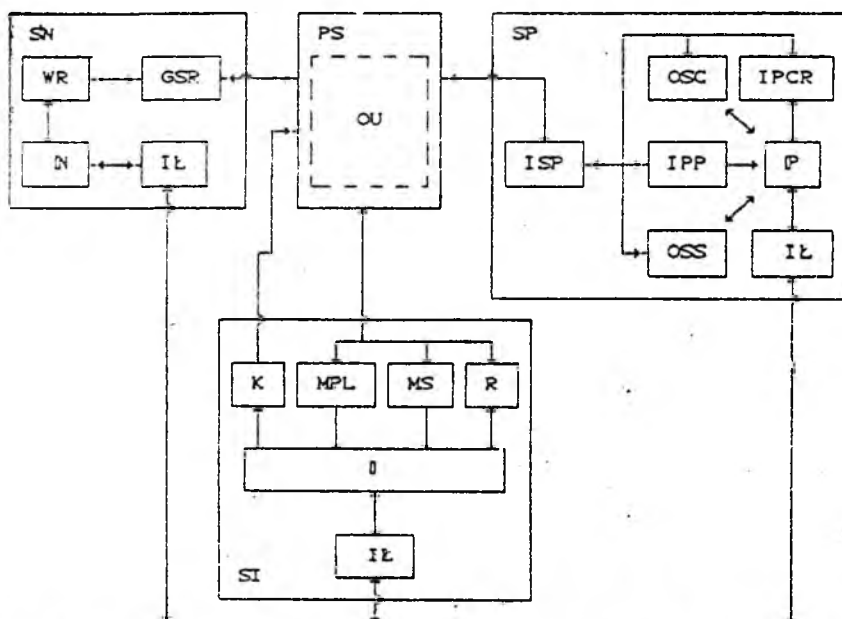
1. Wstęp

Metoda treningu walki powietrznej na rzeczywistym obiekcie latającym i naziemnym systemie radiolokacyjnym jest droga, nieefektywna i nie zapewnia właściwego poziomu bezpieczeństwa trenujących zespołów ludzkich. Aby zapewnić możliwość treningu walki powietrznej przy tej metodzie należy postawić w stan gotowości co najmniej parę samolotów, naziemny system radiolokacyjny i służby lotniskowe na czas nie krótszy niż 4 godziny. Metoda ta nie pozwala ponadto na trening walki powietrznej z potencjalnym przeciwnikiem, jak również na zastosowanie szeregu podstawowych środków walki radioelektronicznej. Z uwagi na konieczność ekonomizacji metod treningu lotniczego i poprawę jego efektywności jedynym rozwiązaniem jest trening z wykorzystaniem środków naziemnych – symulatorów walki powietrznej. Przedstawiony w pracy system symulatora walki powietrznej jest jednym z wielu możliwych rozwiązań tego problemu – dla walki powietrznej toczonej z wykorzystaniem pokładowego celownika radiolokacyjnego i naziemnych systemów naprowadzania.

2. Koncepcja budowy symulatora

Schemat blokady symulatora walki powietrznej umożliwiającego trening zespołu: pilot samolotu myśliwskiego – nawigator naprowadzania – instruktor przedstawiony został na rys.1.

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

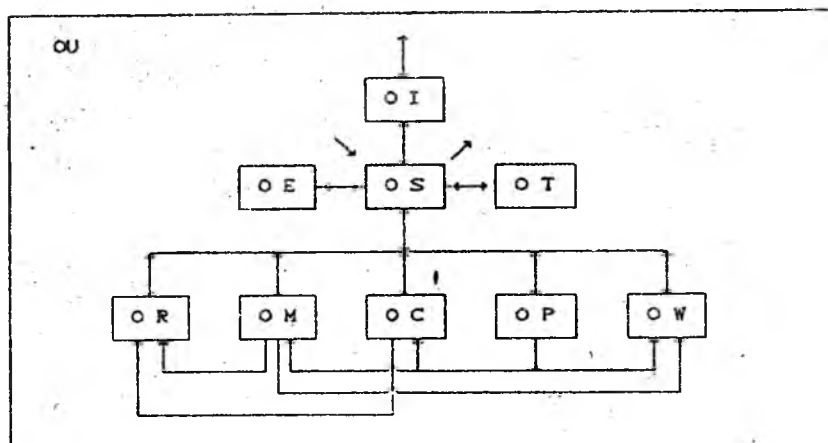


Rys. 1. Schemat blokowy symulatora walki powietrznej, gdzie: SP – stanowisko pilota, SI – stanowisko instruktora, SN – stanowisko nawigatora, PS – przelicznik symulatora,

ISP – interfejs stanowiska pilota, IPCR – imitator pokładowego celownika radiolokacyjnego, IPP – imitator przyrządów pokładowych, OSC – organy sterowania pokładową stacją radiolokacyjną, OSS – organy sterowania samolotem, P – pilot, WR – wskaźnik radiolokacyjny, GSR – generator sygnałów radiolokacyjnych, N – nawigator parametrów lotu, MPL – monitor parametrów lotu, MS – monitor systemowy, R – rejestrator (drukarki lub plotter), K – klawiatura, I – instruktor, IL – imitator łączności radiowej, OU – oprogramowanie użytkowe.

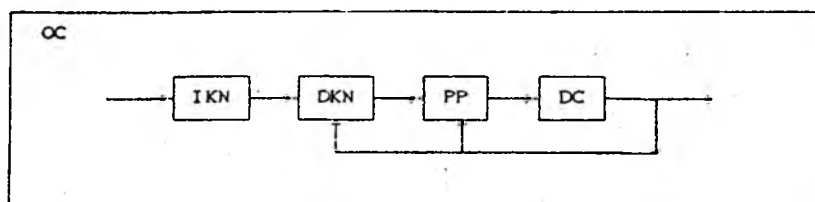
Symulator posiada budowę modułową i składa się z następujących modułów stanowiska pilota (SP), stanowiska nawigatora (SN), przelicznika (PS) i stanowiska instruktora (SI) i oprogramowania użytkowego (OU). Stanowisko pilota wyposażone jest w podstawowe organy sterowania lotem samolotu (OSS), organy sterowania pokładową stacją radiolokacyjną (OSC) imitator pokładowego celownika radiolokacyjnego (IPCR) i imitator lotniczych przyrządów pokładowych (IPP). Stanowisko to jest uproszczoną kopią architektoniczną kabiny samolotu bojowego danego typu. Dynamiczna tablica przyrządów (IPP) i celownik pokładowy (IPCR) odwzorowywane są na dwóch monitorach ekranowych pracujących w trybie graficznym. Stanowisko (SP) połączone jest przez specjalistyczny interfejs (ISP) z przelicznikiem (PS) a poprzez imitator łączności radiowej (IL) ze stanowiskiem nawigatora (SN) i instruktora (SI). Przelicznik (PS) jest zespołem 2 mikrokomputerów klasy IBM PC XT i AT wyposażonych w koprocesory, karty graficzne

Hercules i CGA, dyski twarde i elastyczne oraz karty wejścia – wyjścia. Przelicznik współpracuje ze stanowiskiem nawigatora (SN) i instruktora (SI). Stanowisko nawigatora (SN) wyposażone jest we wskaźnik radiolokacyjny (oryginalny lub imitator – WR) i generator sygnałów radiolokacyjnych (GSR) będący specjalistycznym interfejsem dla oryginalnego wskaźnika radiolokacyjnego. Stanowisko instruktora (SI) wyposażone jest w standardowe urządzenia informatyki. Są to: klawiatura sterująca (K), monitory pracujące w trybie graficznym – (MR) i (MS) oraz rejestrator (R). Monitor (MPL) służy do prezentacji obrazu – celownika radiolokacyjnego lub dynamicznej tablicy przyrządów myśliwca; (MS) jest monitorem systemowym. Rolę rejestratora może pełnić drukarka lub plotter. Oprogramowanie użytkowe (OU) zawarte w pamięci przelicznika zawiera następujące bloki programowe: oprogramowanie systemowe (OS), oprogramowanie wskaźnika radiolokacyjnego (OW), oprogramowanie stanowiska instruktora (OI), oprogramowanie celownika radiolokacyjnego (OR), oprogramowanie dynamiki myśliwca (OM), oprogramowanie dynamiki celu powietrznego (OC), oprogramowanie oceny wyników treningu (OT) i oprogramowanie testujące (OE) (por. rys.2).



Rys. 2. Schemat blokowy oprogramowania użytkowego symulatora walki powietrznej, gdzie: OU – oprogramowanie użytkowe, OS – oprogramowanie sterujące, OT – oprogramowanie oceny wyników treningu, OI – oprogramowanie stanowiska instruktora, OW – oprogramowanie stanowiska nawigatora, OR – oprogramowanie symulujące pracę pokładowej stacji radiolokacyjnej, OM – oprogramowanie symulujące dynamikę lotu myśliwca, OC – oprogramowanie symulujące dynamikę lotu celu powietrznego, OE – oprogramowanie testujące, OP – oprogramowanie warunków początkowych i scenariusza treningu

W bloku symulującym dynamikę celu powietrznego (OC) wyróżnia się programy: dynamiki lotu celu (DC), identyfikacji komend nawigatora (IKN), dekodowania komend nawigatora (DKN) i 4 kanałowego pseudopilota (PP) – (por.rys.3).



Rys. 3. Schemat blokowy oprogramowania symulującego dynamikę celu powietrznego, gdzie: OC – oprogramowanie symulujące dynamikę celu powietrznego, IKN – program identyfikacji komend nawigatora, DKN – program dekodowania komend nawigatora, PP – pseudopilot, DC – dynamika lotu celu powietrznego

3. Zasada działania symulatora

Po zainicjowaniu pracy systemu przez instruktora i sprawdzeniu gotowości urządzeń za pomocą oprogramowania testującego (OE) instruktor określa warunki treningu, wprowadzając typy symulowanego celu, początkowe parametry lotu celu i myśliwca. Wówczas na wskaźniku radiolokacyjnym (WR) pokaże się zobrazowanie przestrzeni powietrznej ze wzajemnym położeniem celu i myśliwca, na wskaźniku celownika (IPCR) radiolokacyjny obraz przestrzeni widzianej przez pokładową stację radiolokacyjną (jeżeli pilot włączył imitator), na tablicy przyrządów (IPP) – dynamiczny obraz podstawowych przyrządów pokładowych myśliwca, a na monitorach instruktora – obraz wg żądanej opcji. Pilot sterujący samolotem za pomocą organów sterowania generuje ciąg sygnałów przetwarzanych przez oprogramowanie myśliwca (OM) na ciąg parametrów kinematycznych określających lot samolotu, na podstawie których oprogramowanie celownika (OR) określa przestrzeń powietrzną obserwowaną przez pokładową stację radiolokacyjną, a oprogramowanie wskaźnika (OW) – położenie myśliwca na ekranie wskaźnika nawigatora. Nawigator obserwując na ekranie wskaźnika (WR) wzajemne położenie przestrzenne myśliwca i celu naprowadza myśliwiec na cel za pomocą komend przekazywanych fonią z wykorzystaniem imitatora łączności (IL) i steruje celem podając instruktorowi (I) fonią za pomocą imitatora łączności komendy ze standardowego zestawu komend nawigatora naprowadzania. Pilot wykonuje komendy nawigatora sterując myśliwcem aż do uzyskania kontaktu radiolokacyjnego z celem, po czym steruje wg sytuacji powietrznej obserwowanej na wskaźniku celownika pokładowego aż do uzyskania przechwycenia celu i wykonania ataku. Instruktor może w trakcie treningu zasymulować różne postacie zakłóceń radiolokacyjnych z uprzednio określonego zestawu.

Instruktor steruje lotem celu powietrznego, wprowadzając z klawiatury (K) komendy otrzymywane od nawigatora (NN) – wg standardowego schematu.

Komendy te przejmowane przez program (IKN) są identyfikowane a następnie

dekodowane przez program (DKN) do postaci (3.1):

$$\delta(t) = [V(t), H(t), \psi(t), \varphi(t), \theta(t)], \quad (3.1)$$

gdzie:

- $\delta(t)$ – wektor sterowania,
- V – prędkość lotu,
- H – wysokość lotu,
- ψ, φ, θ – kąty lotnicze,
- t – czas.

Tak określony wektor sterowania z uwzględnieniem sprzężenia zwrotnego (por. rys.3) przekazywany jest do programu symulacji pseudopilota (PP) sterującego lotem celu powietrznego.

Pseudopilot jest czterokanałowym modelem adaptacyjnego autopilota uwzględniającego charakterystyki dynamiczne pilota i mechanizmów wykonawczych.

Postać (3.1) wektora sterowania $\delta(t)$ przetwarzana jest przez program symulacji pseudopilota (PP) na postać (3.2) z uwzględnieniem sprzężenia zwrotnego (por. rys.3):

$$\delta_p(t) = [\delta_H(t), \delta_V(t), \delta_L(t), \delta_T(t)], \quad (3.2)$$

gdzie:

- $\delta_p(t)$ – wektor sterowania lotem celu,
- δ_H – kąt wychylenia steru wysokości,
- δ_V – kąt wychylenia steru kierunku,
- δ_L – kąt wychylenia lotek,
- δ_T – kąt DSS,
- t – czas.

Na podstawie postaci (3.2) wektor $\delta_p(t)$ programu symulacji dynamiki lotu celu powietrznego określa położenie przestrzenne celu i parametry jego lotu w czasie:

$$A(t) = \begin{bmatrix} X_c(t) & Y_c(t) & H_c(t) \\ V_{rzc}(t) & V_{pc}(t) & V_{wc}(t) \\ n_{xc}(t) & n_{yc}(t) & n_{zc}(t) \\ \varphi_c(t) & \psi_c(t) & \theta_c(t) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

gdzie:

- $A(t)$ – macierz stanu celu,
- $X(t), Y(t), H(t)$ – współrzędne liniowe celu,
- $V_{rzc}(t), V_{pc}(t), V_{wc}(t)$ – prędkości liniowe celu: rzeczywista, przyrzadowa, wznoszenia,
- $n_{xc}(t), n_{yc}(t), n_{zc}(t)$ – przyspieszenia liniowe,
- $\varphi_c(t), \psi_c(t), \theta_c(t)$ – współrzędne katowe celu,
- t – czas.

Współrzędne celu przekazywane są do programów: symulacji wskaźnika radiolokacyjnego (OW), pokładowej stacji radiolokacyjnej (OR) i instruktora (OI), gdzie generowane jest zobrazowanie przestrzenne celu i wyświetlane na imitatorze celownika, wskaźnika nawigatora i monitorze instruktora.

Instruktor może zatrzymać pracę systemu, ponownie uruchomić, powtórzyć wielokrotnie daną sytuację oraz zarejestrować przebieg treningu. Po zakończeniu treningu instruktor uruchamia oprogramowanie oceny wyników treningu (OT), które analizuje i ocenia jego przebieg oraz archiwizuje potrzebne dane. Cały system pracuje w czasie rzeczywistym.

4. Problemy naukowo-badawcze

Warunki pracy systemu symulatora w czasie rzeczywistym na powszechnie dostępnym w kraju sprzęcie mikrokomputerowym (IBM PC XT i AT) wymagają specyficznego podejścia przy tworzeniu modeli cyfrowych poszczególnych modułów systemu i rozwiązania wielu zagadnień kardwareowych.

Podstawowym zagadnieniem przy tworzeniu takiego systemu było zamodelowanie automatycznego sterowania celem powietrznym i ręcznie sterowanego myśliwca.

4.1. Sterowanie myśliwcem

Należało rozwiązać następujące problemy:

1. opracowanie programu graficznego, pracującego w czasie rzeczywistym, imitującego dynamiczną tablicę przyrządów pokładowych,
2. opracowanie hardwarowego interfejsu obsługi organów sterowania samolotem,
3. opracowanie programu obsługującego transmisję danych pomiędzy mikrokomputerami IBM PC XT – AT oraz (SP) i (SI),
4. opracowanie programu symulacji dynamiki lotu myśliwcem na IBM PC AT pracującego w czasie 0.4 r.t.

Na szczególną uwagę zasługuje problem przedstawiony w punkcie (4). Wymóg 0.4 r.t. przy realizacji pętli programowej spowodował konieczność przeprowadzenia badań jakościowych modelu dynamiki symulowanego samolotu. Dysponując modelem opracowanym wg klasycznych zasad dynamiki lotu, zweryfikowanym w oparciu o badania w locie, przeprowadzono badania wpływu poszczególnych elementów składowych tego modelu na dokładność symulacji lotu samolotu. Badania

przeprowadzono dla kolejnych manewrów przestrzennych takich jak: lot ustalony, zakręty, rozpędzanie, wznoszenie, pętla, zawrót bojowy. Porównywano parametry lotu modelu w kolejnych uproszczeniach z parametrami modelu pierwotnego określając optymalny poziom uproszczeń tak potraktowanego modelu. Następny krok to opracowanie szybkiej procedury całkującej równania ruchu samolotu za pomocą metody stałokrokowej typu predyktor-korektor. Taki tok postępowania pozwolił – w języku Fortran – na osiągnięcie założonego czasu obliczeń pojedynczej pętli programowej, przy założonych warunkach sprzętowych i wymaganej wierności symulacji. Przejście na język C pozwoliło zmniejszyć ten czas dwukrotnie bez optymalizacji programu.

4.2. System automatycznego sterowania celem powietrznym

Należało opracować

- program symulujący dynamikę lotu celu powietrznego, sterowanego zestawem 180 standardowych komend nawigatora naprowadzania, pracujący w czasie 0.6 r.t. na mikrokomputerze IBM PC AT, przy założeniu, że dokładność określania współrzędnych liniowych celu będzie o rząd mniejsza niż dla myśliwca.

Przy określaniu modelu dynamiki lotu celu przyjęto metodę postępowania jak dla myśliwca (por. pkt.4.1).

Oprócz tego należało opracować programy: identyfikacji komend nawigatora, dekodowania tych komend na postać zrozumiałą dla pseudopilota oraz program symulacji pseudopilota sterującego lotem celu powietrznego wg zadanej komendy. Ze względu na zakres zmian parametrów lotu (4.4):

$$\begin{aligned}
 \psi_c &= n360^\circ & n &\in (-\infty, +\infty) [\text{deg}] , \\
 \varphi_c &= n180^\circ & n &\in (-\infty, +\infty) [\text{deg}] , \\
 \theta_c &= n90^\circ & n &\in (-\infty, +\infty) [\text{deg}] , \\
 H_c &\in < 0, 15000 > [\text{m}] , \\
 V_c &\in < 60, 220 > [\text{m/s}] , \\
 V_{wc} &\in < -30, 30 > [\text{m/s}] ,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

oraz na konieczność wykonywania skomplikowanych manewrów przestrzennych (pętla, zwrot bojowy, spirala, przewrót, półpętla, wywrót) okazało się niemożliwe opracowanie jednolitej struktury 4 kanałowego autopilota o stałych lub modyfikowanych nastawach dla realizacji założonego celu w całym zakresie parametrów lotu.

Niezbędne okazało się opracowanie szeregu autopilotów o różnej strukturze, realizujących różne prawa sterowania o modyfikowanych nastawach – w zależności od rodzaju wykonywanego manewru i aktualnych parametrów lotu (H, V).

Tak opracowany zestaw autopilotów uzupełnionych o charakterystyki mechanizmów wykonawczych i pilota operatora stanowi model pseudopilota sterującego celem powietrznym.

Model pseudopilota wraz z pozostałymi modelami stanowił merytoryczne rozwiązanie problemu symulacji sterowanego lotu przestrzennego celu powietrznego uwzględniającego dynamikę realnego samolotu. Zespół programów: pseudopilota, identyfikacji i dekodowania komend oraz dynamiki lotu celu zrealizowanych w języku Fortran pozwolił na osiągnięcie założonego czasu trwania pojedynczej pętli programu przy założonych warunkach sprzętowych i wymaganej dokładności symulacji.

Przejście na język C pozwoliło zmniejszyć ten czas dwukrotnie – bez optymalizacji programu.

5. Wnioski

1. Przedstawione w pracy rozwiązanie symulatora walki powietrznej jest jednym z możliwych rozwiązań technicznych problemu treningu personelu lotniczego w zakresie naprowadzania statków powietrznych i walki z wykorzystaniem pokładowego celownika radiolokacyjnego.
2. Modułowa budowa symulatora umożliwia rozwój i modyfikację systemu.
3. Zastosowanie powszechnie dostępnego sprzętu mikrokomputerowego umożliwia osiągnięcie niskiej ceny urządzenia i niskiego kosztu godziny treningu.
4. Szczególne znaczenie przy opracowaniu symulatora miało sformułowanie modelu dynamiki lotu celu powietrznego i modelu dynamiki lotu myśliwca, pracujących w czasie rzeczywistym, sterowanych za pomocą zestawu komend nawigatora.
5. Podana w pracy metoda formułowania modelu myśliwca i celu może znaleźć zastosowanie przy opracowaniu analogicznych modeli dla dowolnego typu samolotu.
6. Dla symulacji celu i myśliwca osiągnięto czas realizacji pojedynczej pętli programu na IBM PC AT równy 0.8 r.t. – równocześnie przy identycznie określonych modelach dynamiki lotu obu obiektów.

WPŁYW ZMIENNEGO WZDŁUŻ ROZPIĘTOŚCI ROZKŁADU WZGLĘDNEJ GRUBOŚCI SKRZYDŁA NA JEGO WŁASNOŚCI AERODYNAMICZNE W ZAKESIE PRĘDKOŚCI TRANSONICZNYCH¹

JERZY ŻÓLTAK

WOJCIECH KANIA

JAN GODLEWSKI

Instytut Lotnictwa, Warszawa

1. Wstęp

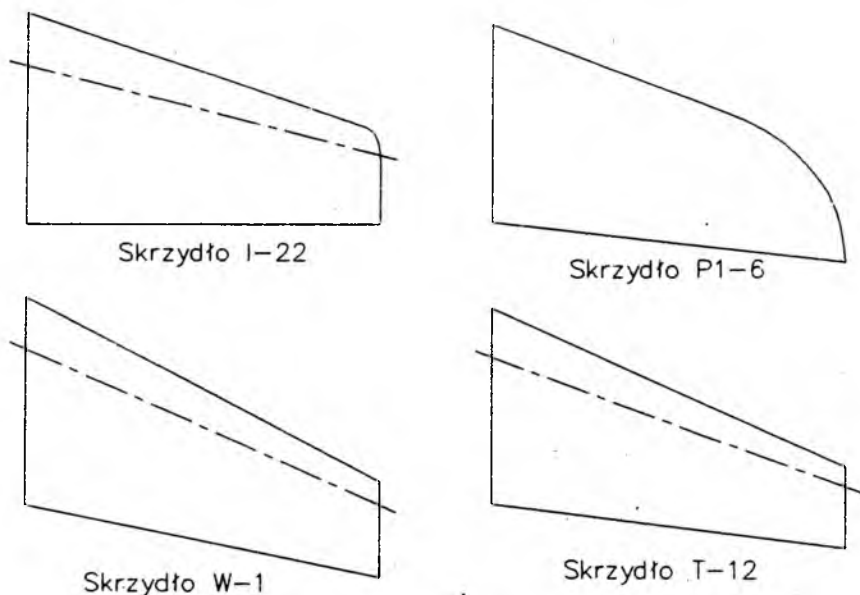
Jednym z podstawowych wymagań stawianych przed samolotami bojowymi jest uzyskanie wysokiej manewrowości. Pociąga to za sobą potrzebę uzyskania przez układ dostatecznie dużej siły nośnej. W przypadku dużych prędkości poddźwiękowych zakres użytecznej siły nośnej ograniczony jest wystąpieniem buffetingu na średnim lub silnym poziomie, bądź pogorszeniem czy też utratą stateczności.

Zastosowanie skrzydła skośnego umożliwia zwiększenie liczby Macha wzrostu oporu oraz liczby Macha początku buffetingu konstruowanego układu. Jednak na zewnętrznej części takiego skrzydła obserwujemy wystąpienie niekorzystnego tzw. efektu końcowego. Charakteryzuje się on między innymi tym, że w zewnętrznej, wzdułuż rozpiętości, części skrzydła obserwujemy szybszy wzrost podciśnień oraz przesunięcie się położenia maksymalnego podciśnienia w kierunku krawędzi natarcia. Powoduje to zmniejszenie bądź utratę skosu izobar w tej części skrzydła co w konsekwencji prowadzi do wcześniejszego wystąpienia fali, a następnie oderwania spowodowanego szybkim wzrostem intensywności fali. Wiąże się z tym wystąpienie buffetingu oraz pogorszenie, bądźże utrata efektywności lotek.

W ramach prac nad samolotem szkolno-bojowym opracowano w Instytucie Lotnictwa kilka wariantów skrzydeł – rys.1. Główne z nich to:

- najstarsze z zaprojektowanych skrzydło zbudowane na bazie klasycznych profili NACA 64A010 i NACA 64A210 [1] zastosowane na samolocie I-22,
- studialne skrzydło W-1 [2,3] realizujące koncepcję skrzydła "roof-top",

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Porównanie geometrii obrysu skrzydeł zaprojektowanych w Zakładzie Aerodynamiki w latach osiemdziesiątych

- skrzydło P1-6 [4,5] realizujące hybrydową koncepcję skrzydła "roof-top", ze skrzydłem typu "peake",
- studialne skrzydło T-12 [6,7] realizujące koncepcję skrzydła nadkrytycznego.

Wszystkie powyższe konstrukcje charakteryzują się stałym lub prawie stałym rozkładem grubości względnej wzdłuż rozpiętości. Badania obliczeniowe oraz eksperymentalne wskazy, że w zakresie dużych prędkości poddźwiękowych początek tworzenia się fali uderzeniowej oraz inicjalizacja oderwania przepływu następuje w części zewnętrznej skrzydła. Wyjątek stanowi skrzydło P1-6. Jednak w rozpatrywanym obszarze skrzydła jego obrys różni się zasadniczo od pozostałych konstrukcji. Ukształtowanie końcówki skrzydła według koncepcji Bagley'a [8] pozwoliło na osłabienie opisywanych niekorzystnych zjawisk.

Wydaje się, że możliwości poprawy pola przepływu w zakresie dużych prędkości poddźwiękowych i okołodźwiękowych można upatrywać w koncepcji aerodynamicznej skrzydła o zmiennej grubości względnej wzdłuż rozpiętości. Zmniejszenie grubości skrzydła w jego zewnętrznej części powinno obniżyć podciśnienia na krawędzi natarcia i poprawić układ izobar, co w konsekwencji powinno wpłynąć na własności aerodynamiczne skrzydła. Niejakim tego potwierdzeniem są wyniki analizy współczesnych konstrukcji samolotów szkolno-bojowych i szturmowych.

wych zamieszczonej w pracy [9]. Większość z nich, zwłaszcza projektowane na większe prędkości poddźwiękowe, ma skrzydła o zmiennej vzdłuż rozpiętości grubości względnej.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie metodami obliczeniowymi możliwości poprawy własności aerodynamicznych skrzydła w zakresie prędkości transonicznych, poprzez jego rekonstrukcję wprowadzającą zmienny vzdłuż rokładu grubości względnej. Do analizy wybrane zostało skrzydło nadkrytyczne T-12.

2. Skrzydło nadkrytyczne T-12

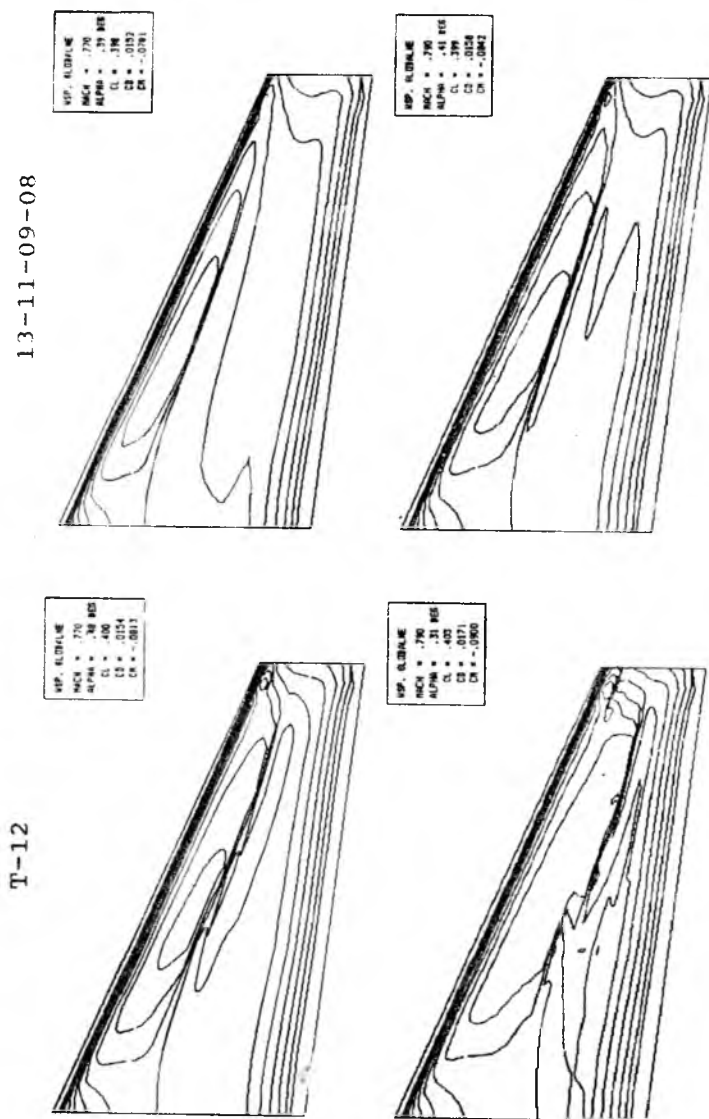
Jest to skrzydło trapezowe o skosie $\chi_{0.25} = 20^\circ$, wydłużeniu $A = 5.1$, zbieżności $\lambda = 0.42$ oraz stałej grubości procentowej równej 13%. Zostało ono zaprojektowane numerycznie [6] a następnie przebadane w tunelu N-3 w zakresie liczb Macha $M = 0.3 \div 0.9$ [7]. Uzyskane rezultaty wykazały, że zaprojektowane skrzydło spełniło żądane wymagania konstrukcyjne oraz zasadniczo posiadało dobre własności w zakresie pozakonstrukcyjnym. Badania wskazały również na pewne mankamenty zaprojektowanej konstrukcji:

- rozwój kryzyzu falowego i tworzenie się fali uderzeniowej następuje od zewnętrznej części skrzydła – rys.3 ÷ 5,
- dla $C_z \approx 0.0$ wskutek wcześniejszego (rysunki 3,4) tworzenia się fali uderzeniowej na dolnej powierzchni skrzydła niż na górnej, liczba Macha wzrostu oporu jest mniejsza niż możliwa do osiągnięcia mimo, że otrzymany rezultat spełnia postawione wymagania konstrukcyjne
 $M_{wo}(C_z = 0.0) \geq M_{wo}(C_z = 0.4)$ – rys.8.

Oczekiwać można, że rekonstrukcja skrzydła T-12, polegająca na wprowadzeniu zmiennej (zmniejszającej się) vzdłuż rozpiętości grubości względnej skrzydła, pozwoli na wyeliminowanie powyższych mankamentów oraz ogólne podwyższenie zarówno liczby Macha wzrostu oporu, jak liczby Macha początku buffingu.

3. Skrzydło 13-11-09-08

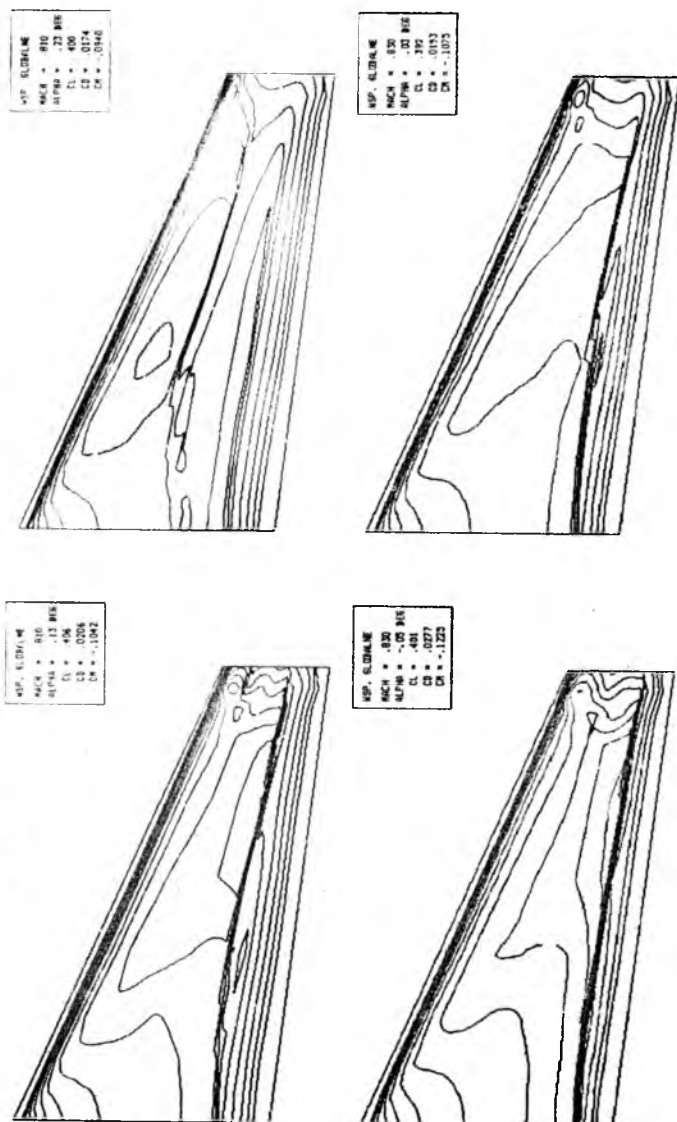
Przeprowadzono rekonstrukcję skrzydła T-12. Założono arbitralnie rozkład grubości względnej vzdłuż rozpiętości przyjmując w przekrojach opisujące powierzchnie skrzydła odpowiednio dla $\eta = 0.4, 0.8, 1.0$ wartości 11%, 9%, 8%. Przeskalowano profile definiujące skrzydło w powyższych przekrojach zachowując



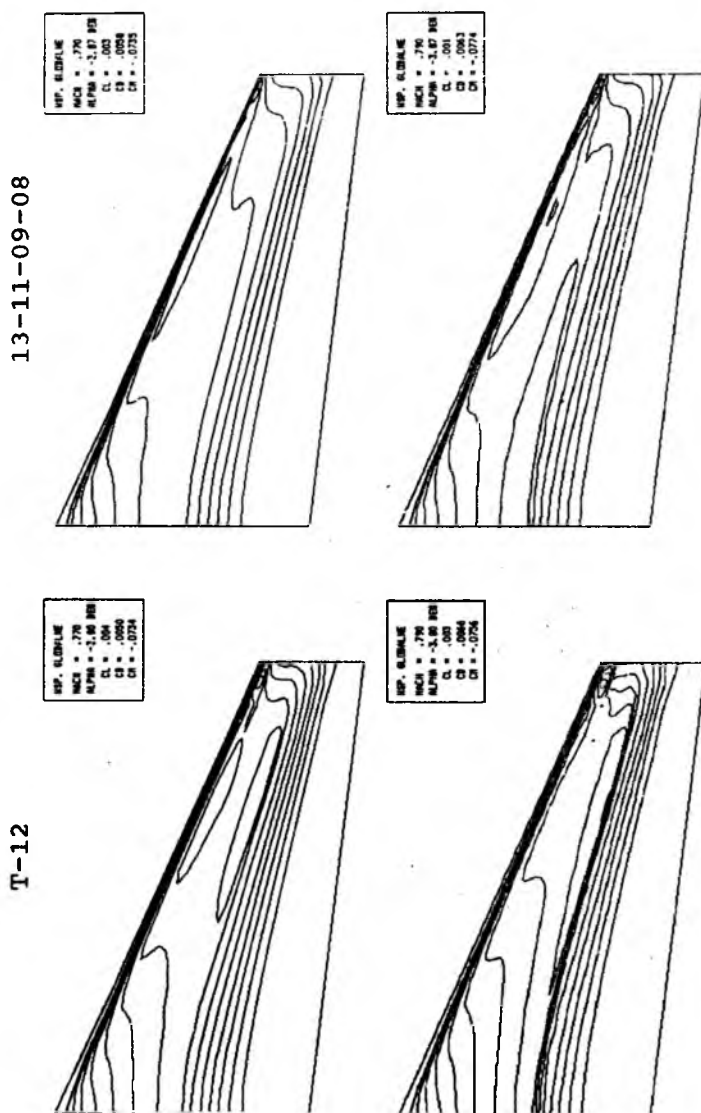
Rys. 2. Porównanie rozkładu wzorbar na górnej powierzchni skrzydeł T-12 i 13-11-09-08 dla współczynnika siły nośnej $C_z = 0.4$ i liczb Macha $M = 0.77, 0.79$

13-11-09-08

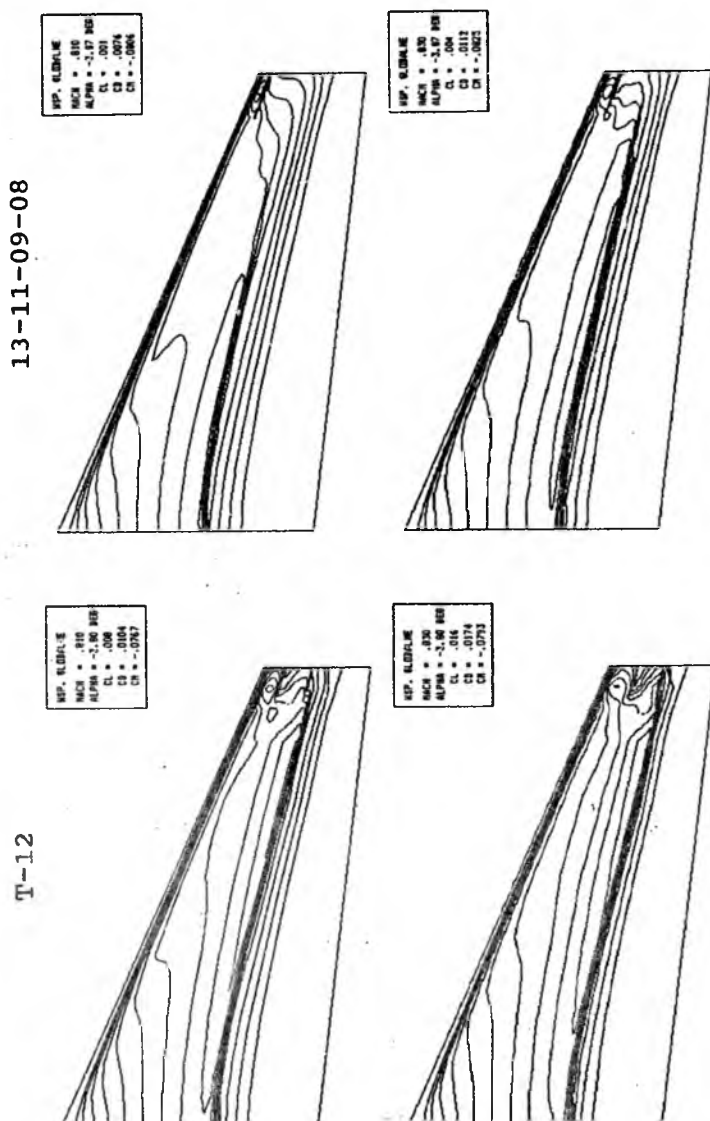
T-12



Rys. 3. Porównanie rozkładu izobar na górnej powierzchni skrzydeł T-12 i 13-11-09-08 dla współczynnika siły nośnej $C_z = 0.4$ i liczby Macha $M = 0.81, 0.83$



Rys. 4. Porównanie rozkładu izobar na dolnej powierzchni skrzydeł T-12 i 13-11-09-08 dla współczynnika siły nośnej $C_z = 0.0$ i liczb Macha $M = 0.77, 0.79$



Rys. 5. Porównanie rozkładu izobar na dolnej powierzchni skrzydeł T-12 i 13-11-09-08 dla współczynnika siły nośnej $C_z = 0.0$ i liczb Macha $M = 0.81, 0.83$

jednak pierwotny kształt powierzchni szkieletowej skrzydła T-12. Tak zdefiniowane skrzydło oznaczono jako 13-11-09-08.

Oba skrzydła poddano obliczeniom dla wybranych liczb Macha z przedziału $M = 0.6 \div 0.87$ oraz współczynników siły nośnej $C_z = 0.0$ i $C_z = 0.4$ (konstrukcyjna wartość współczynnika siły nośnej). Obliczenia przeprowadzono programem bazującym na rozwiązaniu równania potencjału zaburzeń opisującym przepływ okołodźwiękowy.

4. Analiza wyników obliczeń

Otrzymane wyniki obliczeń pozwoliły na ocenę wybranych własności aerodynamicznych badanych skrzydeł w zakresie prędkości okołodźwiękowych.

4.1. Optyw górnej powierzchni analizowanych skrzydeł

Dla konstrukcyjnej wartości współczynnika siły nośnej $C_z = 0.4$ i liczb Macha $M = 0.75, 0.77, 0.79, 0.81, 0.83, 0.85$ przeprowadzono porównanie rozkładu izobar na górnej powierzchni obu skrzydeł – rys.2 ÷ 5. Różnice w obrazie optywu zaznaczają się począwszy od liczby Macha $M = 0.77$. Na skrzydle T-12 obserwujemy początek tworzenia się fali uderzeniowej, podczas gdy na skrzydle 13-11-09-08 przepływu jest jeszcze całkowicie bezuderzeniowy. Dla kolejnych liczb Macha fala uderzeniowa widoczna jest na powierzchni obu skrzydeł. Różna jest jednak jej intensywność i lokalizacja. W przypadku skrzydła T-12 jest to obszar zewnętrzny (lotkowy) skrzydła. Natomiast na skrzydle 13-11-09-08 przesunięta jest w obszar środkowy, bliżej nasady skrzydła. Dla liczby Macha $M = 0.83$ fala uderzeniowa o umiarkowanej intensywności rozciąga się jedynie na części rozpiętości skrzydła podczas gdy na skrzydle T-12 obserwujemy silną falę uderzeniową rozciągającą się wzdłuż całej rozpiętości.

4.2. Optyw dolnej powierzchni analizowanych skrzydeł

Dla wartości współczynnika siły nośnej $C_z = 0.0$ i liczb Macha $M = 0.75, 0.77, 0.79, 0.81, 0.83, 0.85$ przeprowadzono porównanie rozkładu izobar na dolnej powierzchni obu skrzydeł – rys.4 ÷ 5. W obu przypadkach tworzenie fali uderzeniowej szybciej następuje na dolnej powierzchni skrzydła niż na górnej. Jednak na skrzydle T-12 obserwujemy to począwszy od liczby Macha $M = 0.79$. Zaś na skrzydle 13-11-09-08 uwidacznia się dopiero przy liczbie Macha $M = 0.82$. Istotne różnice także są widoczne w intensywności oraz lokalizacji fali uderzeniowej.

4.3. Liczba Macha początku bufftingu

Obliczenia opłwu oparte były na potencjalnym, nielepkim modelu matematycznym. Dlatego też wyniki obliczeń nie pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie granicy początku bufftingu. Analiza literatury wskazała jednak na możliwość oszacowania początku występowania oderwania przepływu na skrzydle spowodowanego falą uderzeniową, co bezpośrednio pociąga za sobą występowanie bufftingu. Do oszacowania liczby Macha początku bufftingu badanych skrzydeł użyto półempirycznych danych zaczerpniętych z pracy [10,11] (ciągła linia na rys.6 ÷ 7). Na rysunkach naniesiono maksymalne lokalne wartości liczby Macha przed falą w wybranych przekrojach obu skrzydeł. Oszacowania liczby Macha początku bufftingu dokonano przez zestawienia położenia wykreślonych wartości z danymi z pracy [10]. Tak uzyskane wartości skorygowano wprowadzając poprawkę uwzględniającą skos skrzydła [11]. Zestawienie otrzymanych wyników przedstawia poniższa tabela:

skrzydło	$C_z = 0.0$	$C_z = 0.4$
T-12	0.83	0.81
13-11-09-08	0.86	0.84

4.4. Liczba Macha wzrostu oporu

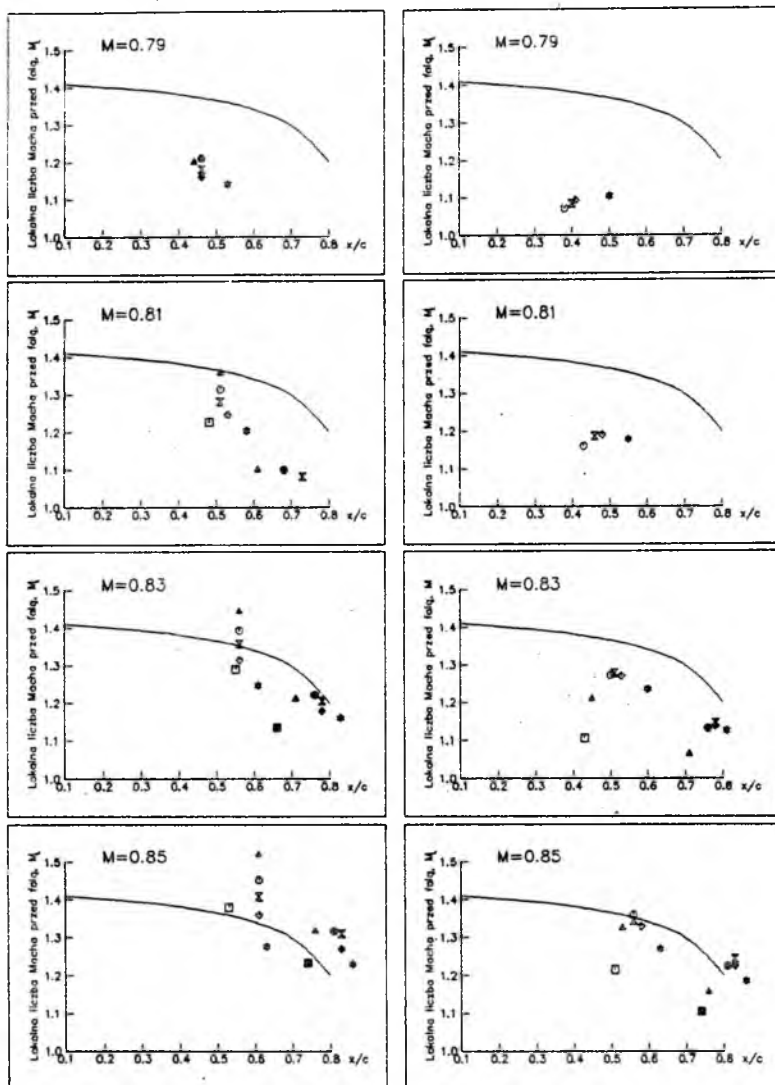
Analiza zależności współczynnika oporu falowego w funkcji liczby Macha pozwoliła na wyznaczenie wartości liczby Macha wzrostu oporu obu skrzydeł. Wyniki zestawiono w poniższej tabeli:

skrzydło	$C_z = 0.0$	$C_z = 0.4$
T-12	0.80	0.80
13-11-09-08	0.83	0.81

Nadmienić trzeba, że przedstawione w obu omówionych zestawieniach wyniki uzyskane dla skrzydła T-12 w przypadku współczynnika siły nośnej $C_z = 0.4$ dobrze korelują się z wartościami otrzymanymi w badaniach eksperymentalnych w tunelu N-3 - rys.8. W przypadku współczynnika siły nośnej $C_z = 0.0$ w obliczeniach uzyskano wartości niższe niż w badaniach w tunelu.

Skrzydło T-12

Skrzydło 13_11_09_08



Przekroje skrzydła :

powierzchnia gór. dol.

 $\eta = 0.000$ * * $\eta = 0.237$ ♦ ♦

Przekroje skrzydła :

powierzchnia gór. dol.

 $\eta = 0.376$ X X $\eta = 0.544$ ● ○

Przekroje skrzydła :

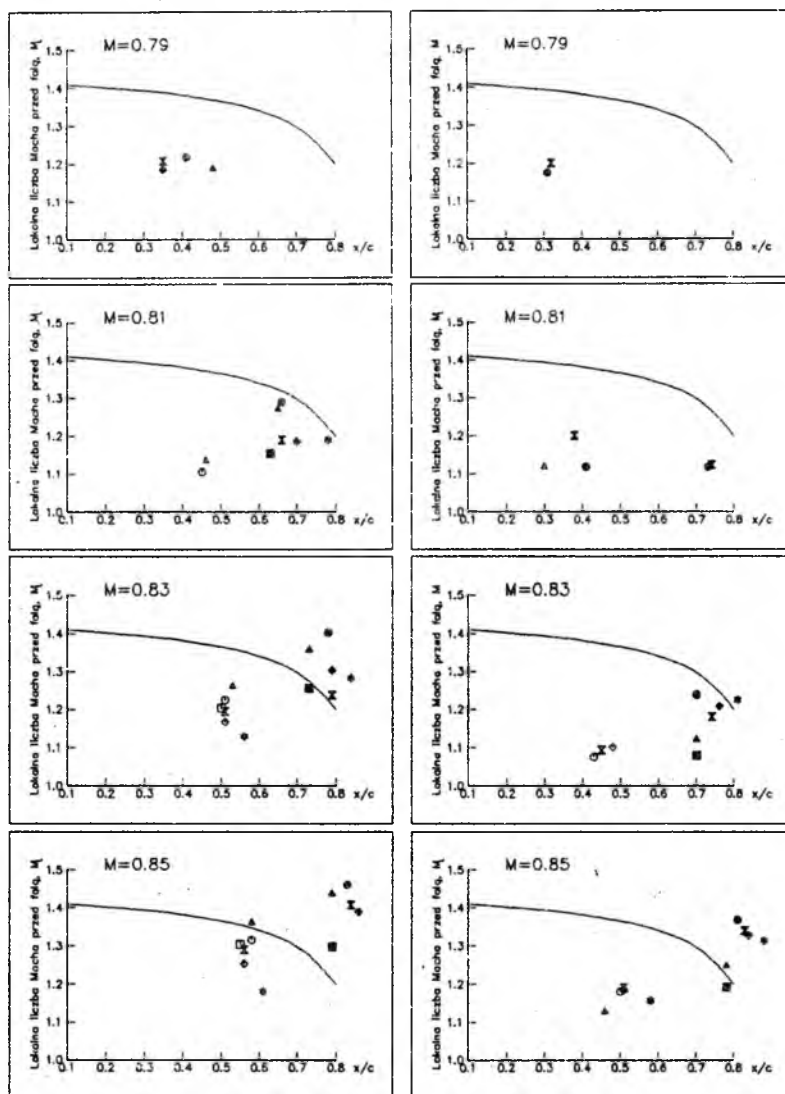
powierzchnia gór. dol.

 $\eta = 0.836$ ▲ ▲ $\eta = 0.907$ ■ □

Rys. 6. Porównanie lokalnej wartości liczby Macha przed falą i położenia fali na skrzydłach T-12 i 13-11-09-08 dla współczynnika siły nośnej $C_z = 0.0$ z zależnością charakteryzującą oderwanie przepływu za falą uderzeniową [10]

Skrzydło T-12

Skrzydło 13_11_09_08



Przekroje skrzydła :
powierzchnia gór. dol.

$\eta = 0.000$ * *
 $\eta = 0.237$ ◆ ◇

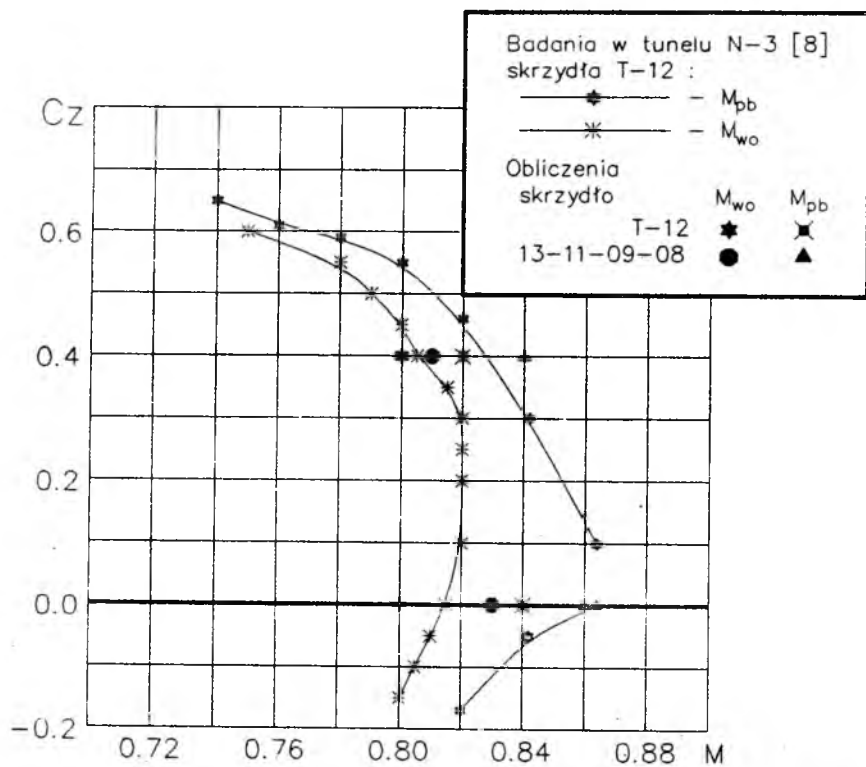
Przekroje skrzydła :
powierzchnia gór. dol.

$\eta = 0.376$ X X
 $\eta = 0.544$ ● ○

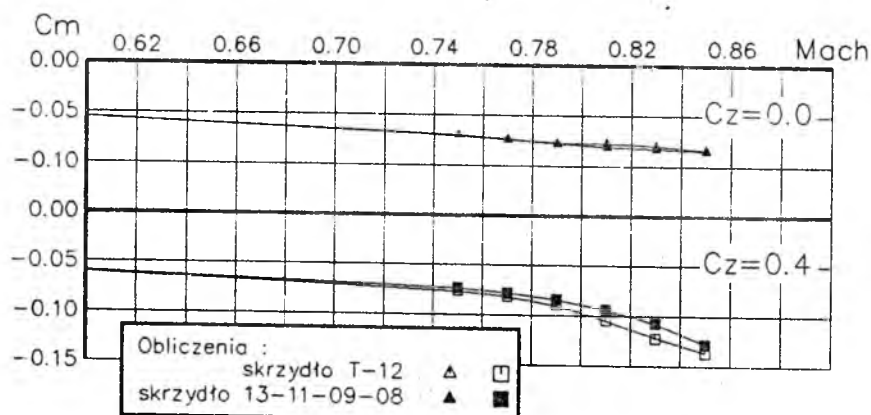
Przekroje skrzydła :
powierzchnia gór. dol.

$\eta = 0.836$ ▲ ▲
 $\eta = 0.907$ ■ ▣

Rys. 7. Porównanie lokalnej wartości liczby Macha przed falą i położenia fali na skrzydłach T-12 i 13-11-09-08 dla współczynnika siły nośnej $C_z = 0.4$ z zależnością charakteryzującą oderwanie przepływu za falą uderzeniową [10]



Rys. 8. Zależność liczby Macha wzrostu oporu i liczby Macha początku buffingu skrzydeł T-12 i 13-11-09-08



Rys. 9. Porównanie zależności współczynnika momentu pochylającego skrzydeł T-12 i 13-11-09-08

4.5. Współczynnik momentu pochylającego

Wpływ rekonstrukcji skrzydła na współczynnik momentu pochylającego skrzydła ilustruje rys.9. Dla współczynnika siły nośnej $C_z = 0.0$ różnice w wartościach są pomijalnie małe w całym zakresie badanych liczb Macha. Natomiast w przypadku współczynnika siły nośnej $C_z = 0.4$ korzystny wpływ rekonstrukcji zaznacza się zmniejszeniem wartości współczynnika momentu C_m dla liczb Macha powyżej $M = 0.75$.

5. Wnioski

W badaniach obliczeniowych porównano dwa skrzydła różniące się charakterem rozkładu grubości względnej wzdłuż rozpiętości. Pierwsze jest skrzydłem o stałej grubości względnej. Drugie zaś posiada zmienny rozkład grubości względnej. Analiza uzyskanych wyników wskazuje na korzystny wpływ drugiego z rozważanych rozkładów na własności aerodynamiczne skrzydła w zakresie prędkości okołodźwiękowych. Jego zastosowanie dało zwiększenie wartości liczby Macha wzrostu oporu oraz liczby Macha początku buffetingu. Uzyskano również korzystniejszy z punktu widzenia rozwoju kryzysu falowego rozkład izobar – osłabiono rozwój fali uderzeniowej w zewnętrznej, lotkowej, strefie skrzydła.

Spis literatury

1. KRZYSIAK A., 1980, *Charakterystyki aerodynamiczne oraz wizualizacja opływu modelu skrzydła zwichrzonego wyrobu 300*, Spr.wew. I.Lot., nr 17/RA/80/A
2. KUBRYŃSKI K., 1986, *Projektowanie aerodynamiczne skrzydła skośnego dla dużych prędkości poddźwiękowych*, Materiały VII Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów, Rydzyna
3. KUBRYŃSKI K., 1988, *Badania aerodynamiczne studialnej wersji skrzydła przydźwiękowego typu 'roof-top'*, Materiały VIII Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów, Białystok-Białowieża
4. KUBRYŃSKI K., 1988, *Opracowanie projektu aerodynamicznego skrzydła 'roof-top' rozwojowej wersji skrzydła I-22MS*, Spr.wew. I.Lot., nr 12/BA/88/H
5. SKOWROŃSKI J., 1990, *Modelowe badania tunelowe skrzydła P1-6 do rozwojowej wersji samolotu I-22MS*, Spr.wew. I.Lot., nr 20/BA/90/H
6. ŻÓŁTAK J., KANIA W., BARTLER T., ADYNOWSKI J., ANTOSIEWICZ M., 1991, *Numeryczne studium aerodynamicznego projektowania skrzydła nadkrytycznego samolotu szkolno-bojowego*, II Sympozjum Aerodynamika Lotnicza, Warszawa

7. KANIA W., 1990, *Modelowe badania tunelowe skrzydła nadkrytycznego wersji rozwojowej samolotu I-22 (I-22M) zaprojektowanego w pierwszym cyklu*, Spr.wew. I.Lot., nr 34/BA/90/III
8. BAGLEY J.A., 1962, *Some aerodynamic principles for design of swept wings*, Progress in Aeronautical Science, 3, Pergamon Press
9. ADYNOWSKI J., KANIA W., 1991, *Wybrane zagadnienia aerodynamiki współczesnych samolotów szkolno-bojowych i ich wersji szturmowych*, II Sympozjum Aerodynamika Lotnicza, Warszawa;
10. NIXON D., 1982, *Transonic aerodynamics*, Progress in Astronautic and Aeronautics, 81
11. ROGERS E.W., HALL J.M., 1960, *An introduction to flow about plane swept back wings in transonic speeds*, The Journal of Royal Aeronautics Society, 64, 596

EKSPERYMENTALNE BADANIA WPŁYWU PŁATOWCA NA WSPÓŁCZYNNIKI AERODYNAMICZNE PODWIESZEŃ¹

JAN KACPRZYK

Instytut Lotnictwa, Warszawa

1. Wstęp

Skrzydło oddziałując na opływ zawieszonych pod nim podwieszeń powoduje zmianę ich charakterystyk aerodynamicznych w stosunku do charakterystyk dla podwieszeń izolowanych.

Wpływ ten jest istotny nie tylko z uwagi na zmiany wartości współczynników aerodynamicznych, ale również z uwagi na zmiany jakościowe w charakterze przebiegu współczynników w funkcji kąta natarcia.

W pracy przedstawiono wyniki pomiarów 6-ciu składowych wypadkowej siły aerodynamicznej działającej na podwieszany pod skrzydłem zbiornik paliwa. Charakterystyki zostały pomierzone zarówno dla podwieszenia izolowanego jak i zawieszonego pod skrzydłem na mostku zewnętrznym dla kłap nie wychylonych i wychylonych na kąt 30° .

2. Warunki badań

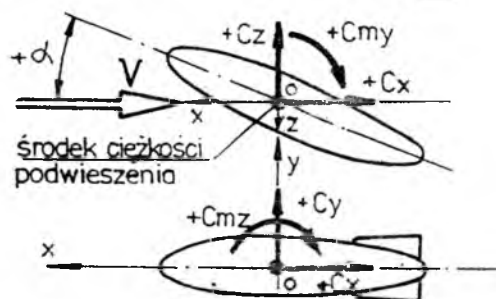
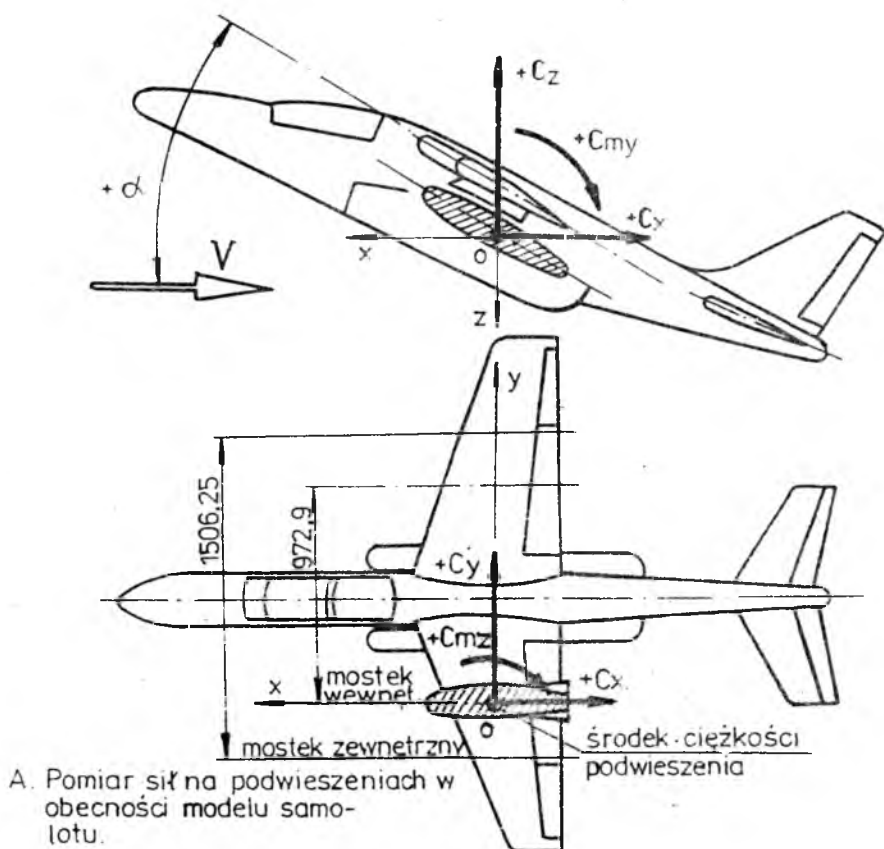
Pomiary przeprowadzono w tunelu aerodynamicznym o średnicy 5 m Instytutu Lotnictwa na modelu samolotu i podwieszeń wykonanych w skali 1:4 przy prędkości strumienia powietrza $V = 40$ m/sek. Liczba Reynoldsa odniesiona do cięciwy aerodynamicznej modelu samolotu wynosiła $Re_{ef} = 1.8 \cdot 10^6$ oraz przy odniesieniu do średnicy modelu zbiornika paliwa $Re_{ef} = 0.5 \cdot 10^6$.

Pomiary składowych siły aerodynamicznej wykonano przy użyciu 6-cio składowej wagi tensometrycznej wykonanej w Instytucie Lotnictwa do badań podwieszeń o zakresach:

siła nośna i boczna 80 N,

siła oporu 30 N,

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Układ odniesienia

moment przechylający 7 Nm,

momenty pochylający i odchylający 21 Nm,

Wymiary wagi: średnica 0.047 m; długość 0.181 m.

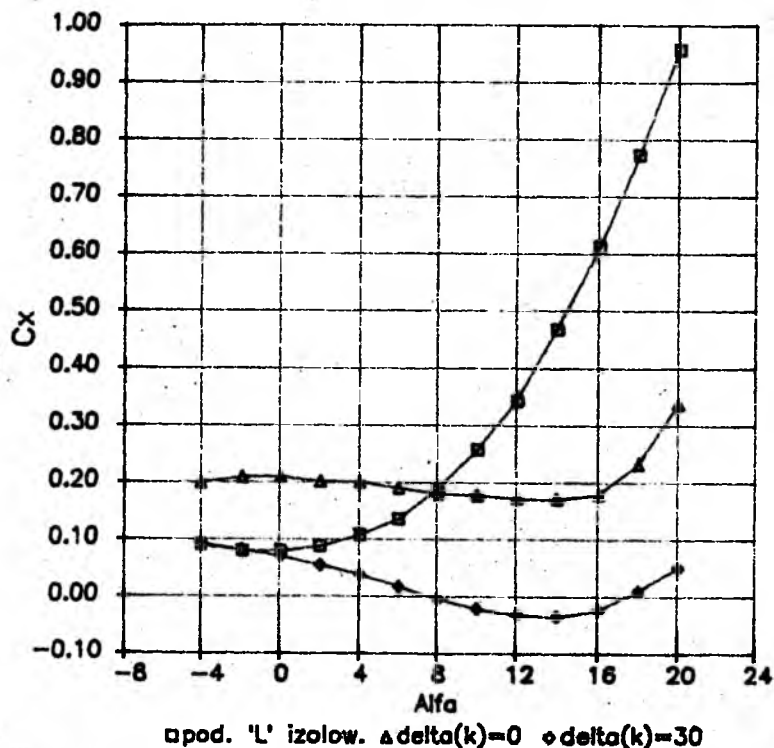
Wymiary modelu zbiornika paliwa: max średnica 0.131 m; długość 0.752 m.

Układ odniesienia przedstawiono na rys.1

Współczynniki aerodynamiczne odniesione zostały do powierzchni przekroju poprzecznego podwieszenia, oraz momenty do średnicy podwieszenia.

3. Wyniki badań

3.1. Współczynnik siły oporu C_x – rys.2

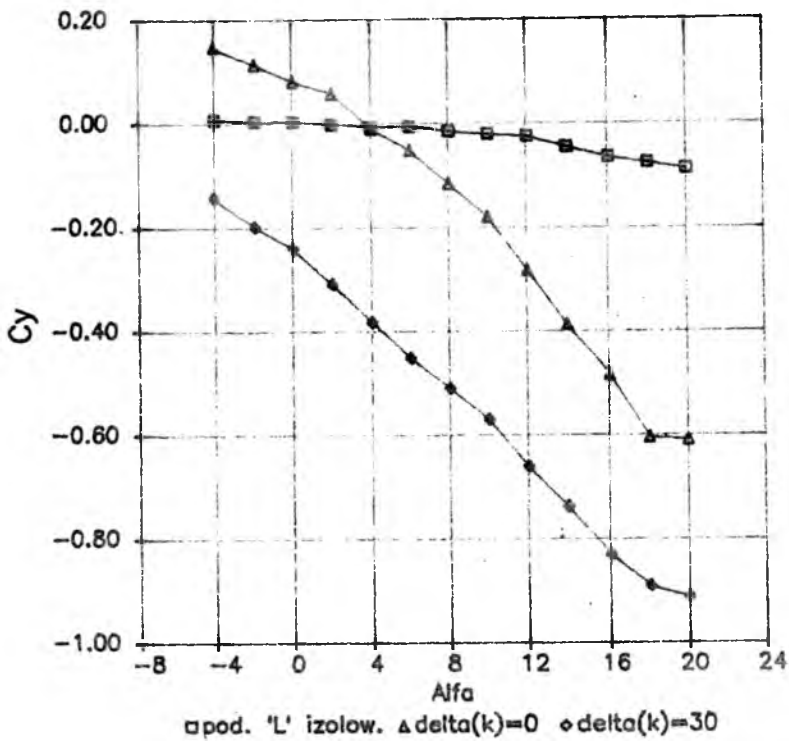


Rys. 2. Współczynnik siły oporu

Przebieg współczynnika siły oporu w funkcji kąta natarcia dla podwieszenia zawieszonego pod skrzydłem, w stosunku do izolowanego, stosunkowo niewiele zmienia się z kątem natarcia przy czym minimalna wartość współczynnika oporu wzrasta. Spowodowane jest to ukierunkowaniem i przyspieszeniem strug w pobliżu skrzydła przez co rzeczywisty kąt natarcia podwieszenia nie odpowiada kątowi natarcia modelu samolotu jak również zmienia się w mniejszym stopniu.

Wychylenie klap powodując zmianę rozkładu ciśnień, zwłaszcza na tylnej części podwieszenia, zmniejsza wartość współczynnika siły oporu.

3.2. Współczynnik siły bocznej – rys.3



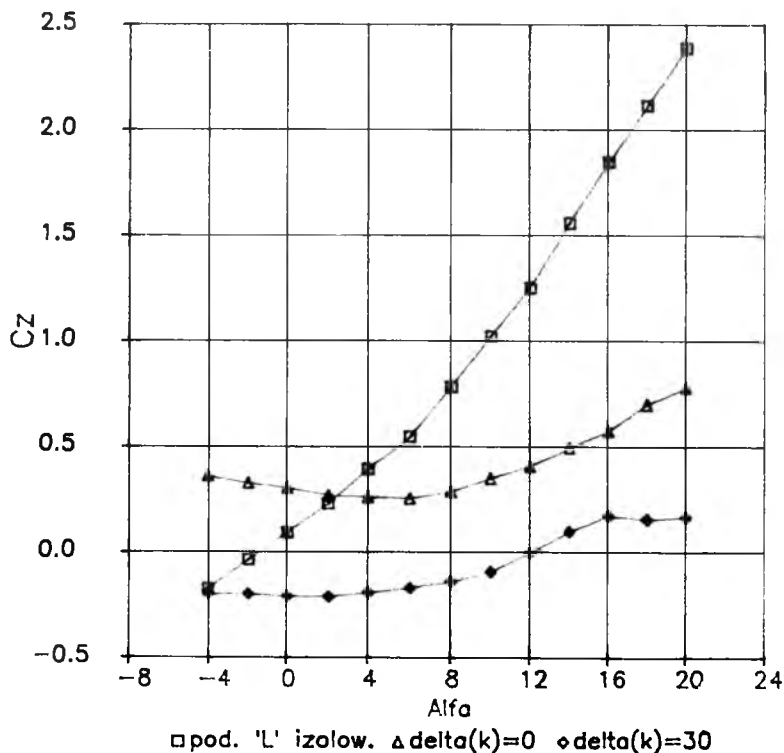
Rys. 3. Współczynnik siły bocznej

Dla podwieszeń izolowanych wartość współczynnika, w funkcji kąta natarcia wynosi zero. W badaniach eksperymentalnych jest to na ogół wartość zbliżona do zera z uwagi na skończoną dokładność wykonania podwieszeń oraz ustawienia

względem kierunku strumienia powietrza i wagi.

Dla podwieszenia zawieszonego pod skrzydłem współczynnik ten może przyjąć znaczne wartości. Pojawia się siła boczna działająca w kierunku na zewnątrz skrzydła (dla dodatniej siły nośnej modelu samolotu), która rośnie wraz ze wzrostem siły nośnej skrzydła (wzrost kąta natarcia i wychylenia klap).

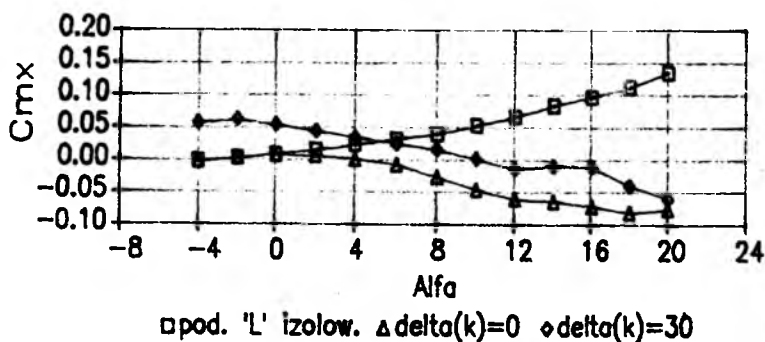
3.3. Współczynnik siły nośnej C_z – rys.4



Rys. 4. Współczynnik siły nośnej

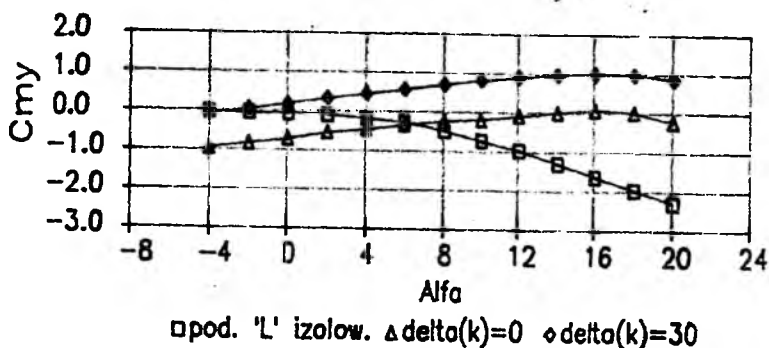
Podobnie jak współczynnik siły oporu również współczynnik siły nośnej, w funkcji kąta natarcia, przebiega bardziej płasko niż dla podwieszenia izolowanego. Występuje zmniejszenie pochodnej $dc_z/d\alpha$ a nawet zmiana znaku pochodnej.

Wychylenie klap powoduje ujemny przyrost siły nośnej na podwieszeniu.

3.4. Współczynnik momentu przechylającego Cm_x - rys.5

Rys. 5. Współczynnik momentu przechylającego

Występują stosunkowo niewielkie zmiany współczynnika momentu przechylającego z uwagi na to iż zbiornik paliwa jest ciałem osiowosymetrycznym z wyjątkiem poziomego statecznika o niewielkiej powierzchni. Większe zmiany współczynnika Cm_x występują dla podwieszeń posiadających dodatkowe powierzchnie zakłócające ich osiowosymetryczność np. dodatkowa belka w górnej części ciała.

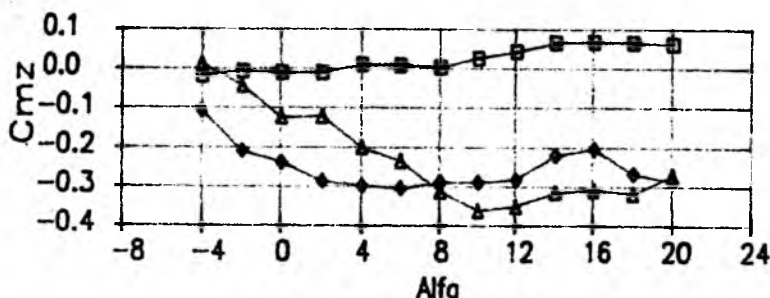
5. Współczynnik momentu pochylającego Cm_y - rys.6

Rys. 6. Współczynnik momentu pochylającego

Dla podwieszenia izolowanego pochodna $dCm_y/d\alpha$ przyjmuje znak ujemny - ciało stateczne. Natomiast po umieszczeniu podwieszenia pod skrzydłem pochodna

$dC_{m_y}/d\alpha$ zmienia znak – ciało ze statecznego staje się niestateczne. Wychylenie klap powoduje dodatni przyrost wartości C_{m_y} .

3.6. Współczynnik momentu odchylającego C_{m_z} – rys.7



□ pod. 'L' izolow. $\Delta k=0$ $\Delta k=30$

Rys. 7. Współczynnik momentu odchylającego

Dla podwieszenia izolowanego współczynnik ten powinien przyjąć wartość równą zero. Dla podwieszenia umieszczonego pod skrzydłem pojawia się moment odchylający, wywołany skośnym opływem dolnej powierzchni skrzydła.

4. Podsumowanie

Wpływ modelu płatowca na charakterystyki aerodynamiczne podwieszeń jest istotny nie tylko z uwagi na duże zmiany wartości współczynników aerodynamicznych lecz również z uwagi na zmiany w charakterze przebiegu współczynników w funkcji kąta natarcia.

Podwieszenie będące ciałem statecznym jako izolowane w obecności skrzydła może stać się ciałem niestatecznym.

Z tych względów nie jest możliwym korzystanie z charakterystyk aerodynamicznych podwieszeń izolowanych do obliczeń trajektorii lotu podwieszenia w jego początkowej fazie lotu po zrzucie.



THE PZL-130 ORLIK TRAINING AIRCRAFT



A fully acrobatic turboprop tandem two-seat military trainer which, as a result of specific design, comprises jet like handling qualities, maintaining low training costs, characteristic for turboprop power. Due to these features, a wide training syllabus is possible, containing also the phases normally executed on costly jets only. The jet-pilot cues on a propeller driven plane are the result of the following:

- aircraft general geometry - low aspect ratio wing and high surface loading, maintaining low draw and power loading;

- cockpit interior design, general arrangement and instrumentation, similar to typical jet-plane cockpit.

A combined effect of the minimal overall dimensions, low weight and high power, result in:

- excellent performance - both, level speed and jet-like climb;

possibility to take significant underwing stores, giving a wide spectrum of training tasks.

The aircraft consists of a semimonocoque all metal low wing structure with retractable tricycle-type landing gear and is powered by the Czechoslovak Walter M.601T

engine rated 560 kW (i.e. 750 HP) or by 3 other kinds of Pratt & Whitney Canada engines of the PT6A family, rated from 405 to 700 kW (550 to 950 HP).

It comprises systems like the electric, hydraulic, pneumatic, air conditioning, oxygen supply and the escape (ejection seats) systems.

An audio integrating system controls the audio services from all the communication, navigation and interphone systems. On customer demand, single or dual VHF, UHF and/or HF systems may be installed. Both cockpits are to be fully instrumented and furnished according to customer's specification. The optional equipment pattern includes various avionic and flight instrumentation systems from simple ones, up to very sophisticated with GPS, LORAN, ILS, MLS, FMS, EFIS and HUD Included. Also systems like the de-icing, emergency locator, anti-g etc. may be installed.

Any other requirement of the customer, will be investigated with great care. The manufacturer is ready to start talks concerning details of equipment any time. The deliveries can start in about one year after contract signing.

DYNAMICZNE RÓWNIANIA RUCHU PLATFORMY UNIWERSALNEGO SYMULATORA LOTU O SZEŚCIU STOPNIACH SWOBODY¹

JERZY MARYNIAK

JERZY MAŁECKI

Połitechnika Warszawska

1. Dynamiczne równania ruchu platformy w strukturze systemu symulatora lotu – miejsce i rola

Zadaniem uniwersalnego symulatora lotu jest takie odtwarzanie dynamicznych stanów samolotu, aby w odczuciu osoby szkolonej, usytuowanej w kabinie platformy symulatora, następowało możliwie wierne odwzorowywanie reakcji psychicznych, nerwowych, audiowizualnych i fizjologicznych, jakie towarzyszyłyby jej w warunkach rzeczywistych odpowiadających modelowanym warunkom lotu samolotu.

Mającą sprostać temu zadaniu symulator jest złożonym układem, w którego skład wchodzi między innymi odpowiednie modele fizyczne i matematyczne obiektów symulowanych, maszyny liczące zdolne do przeprowadzania obliczeń w czasie co najmniej rzeczywistym oraz specjalne modele i charakterystyki psychoneurofizjologicznych własności człowieka [1].

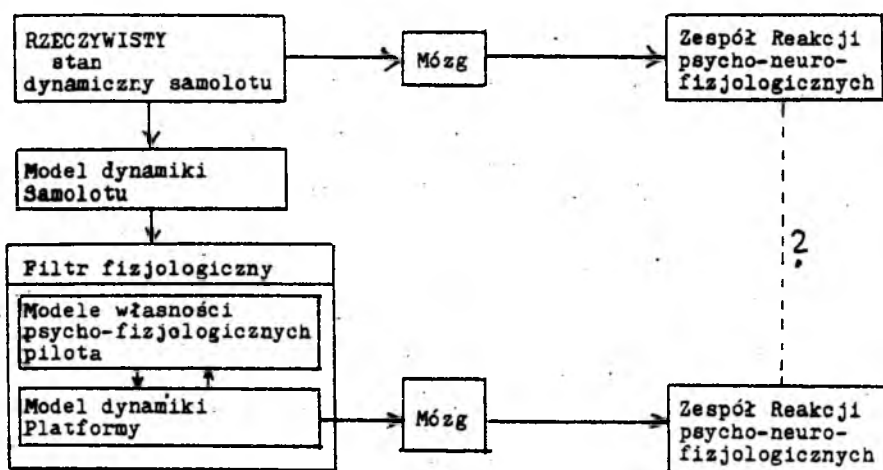
Oczywistym faktem wynikającym z ograniczeń konstrukcyjnych symulatora jest to, że platforma symulatora nie może w sposób bezpośredni "kopiować" dynamicznych stanów samolotu. Niemożliwe jest bowiem aby mogła ona wykonywać pewne rodzaje manewrów, jak choćby przykładowo – beczka. Jak już wspomniano, nie chodzi tu jednak o symulację samych stanów dynamicznych samolotu ale odczuć pilota jakie im towarzyszą.

Wynika z tego konieczność istnienia w systemie symulatora specjalnego modułu, który korzystając z modelu i charakterystyk psycho-neuro-fizjologicznych pilota, działając w sprzężeniu z modelami matematycznymi platformy i samolotu określałby sposób zadawania stanów dynamicznych platformy realizujący odwzorowanie rzeczywistych odczuć w czasie treningu w kabinie symulatora. Oczywiście jest konieczność wykorzystania w pracy takiej jednostki wszelkich możliwości

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

wywoływania pożądaných odczuć poprzez stosowanie różnych kombinacji bodźców (progi wrażliwości, symulacje wrażeń przez wywoływanie złudzeń), jak też uwzględnienie technologicznych ograniczeń stawianych przez konstrukcję platformy (ruchliwość mechanizmów, moce napędów).

Jak wynika z powyższego wprowadzenia, model dynamiki platformy w postaci dynamicznych równań ruchu jest ważnym elementem całego systemu symulatora niezbędnym do budowy układu sterującego systemem.



Rys. 1. Schemat systemu symulatora

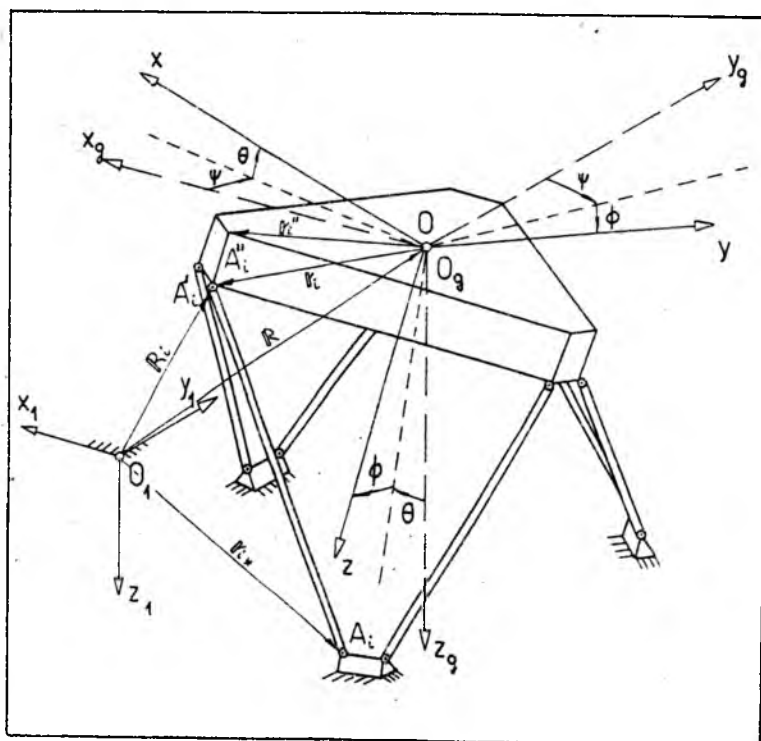
2. Budowa modelu dynamiki platformy symulatora lotu

2.1. Opis przyjętych współrzędnych i układów odniesienia

Ruch platformy opisany jest jednoznacznie za pomocą współrzędnych i czasu w przestrzeni zdarzeń zwanej czasoprzetrznię. Chwilowe położenie platformy jako ciała sztywnego określone jest przez położenie środka jej masy wyznaczone względem nieruchomego układu odniesienia i wyznaczoną w odpowiedni sposób orientację kątową.

Określenie położenia obiektu wymaga w związku z powyższym wprowadzenia następujących układów odniesienia, zaznaczonych na rys.2:

- nieruchomego układu grawitacyjnego związanego z podłożem – $0_1x_1y_1z_1$,



Rys. 2. Układ odniesienia

- układu grawitacyjnego $O_g x_g y_g z_g$ związanego z poruszającym się obiektem, osiowo-równoległego do układu nieruchomego i znajdującego się w ustalonym ruchu postępowym,
- układu $Oxyz$ związanego sztywno z poruszającym się obiektem, o początku w dowolnie obranym punkcie O .

Zakłada się dalej, że przyjęte układy współrzędnych są układami prawoskrętnymi.

Kąty obrotu określają jednoznacznie położenie układu odniesienia ściśle związanego z obiektem względem ruchomego układu grawitacyjnego równoległego do nieruchomego układu inercjalnego. Przyjęte kąty obrotu są kątami quasi-Eulerowskimi, czyli samolotowymi.

Współrzędne liniowe określają jednoznacznie położenie biegunu układu odniesienia sztywno związanego z poruszającym się obiektem względem nieruchomego układu inercjalnego związanego z podłożem.

Składowe wektorów chwilowej prędkości liniowej V i kątowej Ω w układzie

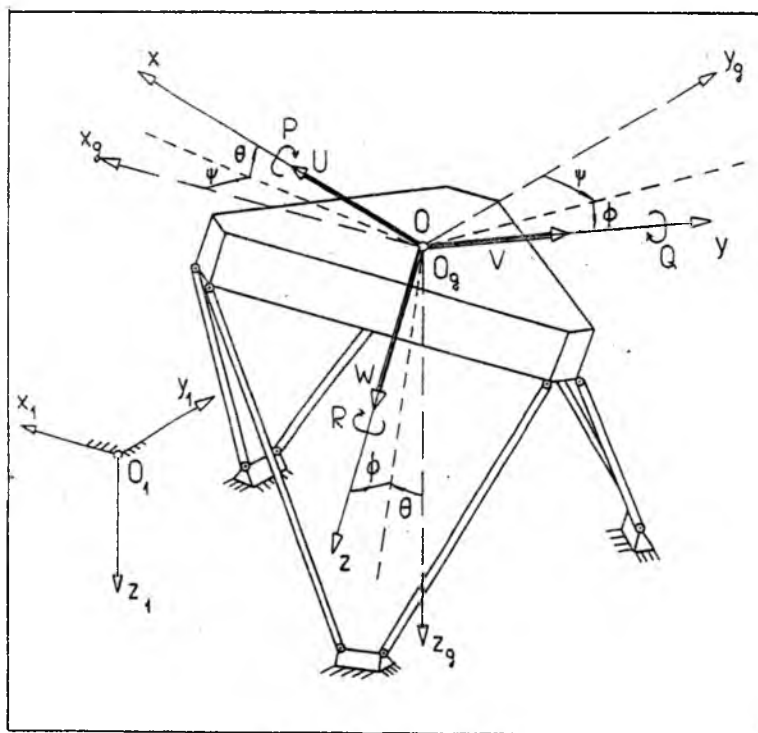
odniesienia $Oxyz$ związanym z obiektem są następujące:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

gdzie: U – prędkość podłużna, V – prędkość boczna, W – prędkość przemieszczeń pionowych,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

gdzie: P – kąтова prędkość przechylania, Q – kąтова prędkość pochylania, R – kąтова prędkość odchylania.



Rys. 3. Quasi-prędkości

Prędkości kątowe P, Q, R , są liniowymi związkami prędkości uogólnionych $\dot{\phi}$,

θ, ψ o współczynnikach zależnych od współrzędnych uogólnionych o postaci:

$$\begin{bmatrix} d\phi/dt \\ d\theta/dt \\ d\psi/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Związki kinematyczne między prędkościami liniowymi mierzonymi w układzie nieruchomym a składowymi prędkości U, V, W są następujące:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dy_1/dt \\ dz_1/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

i macierz transformacji występująca w związku (2.6) oznaczana dalej jest Λ_0^{-1} .

2.2. Ogólna postać równań ruchu platformy

Wychodząc z podstawowych równań dynamiki, a mianowicie o pochodnej pędu i pochodnej krętu obiektu względem czasu:

$$\frac{d\Pi_0}{dt} = F, \quad \frac{dK_0}{dt} = M, \quad (2.5)$$

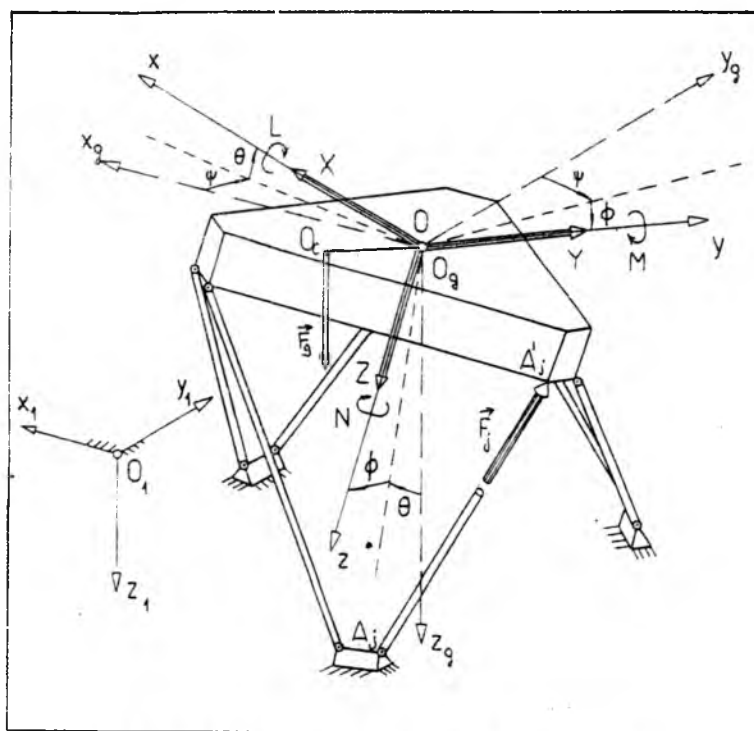
gdzie wektory sił i momentów sił zewnętrznych działających na obiekt opisane są składowymi:

$$F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

oraz:

$$M = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

przy czym nazwano je odpowiednio: X – siłą podłużną, Y – siłą boczną, Z – siłą wznoszenia, L – momentem przechylającym, M – momentem pochyającym, N – momentem odchyłającym.



Rys. 4. Siły zewnętrzne działające na platformę

Wyznaczenie pędu i krętu w funkcji energii kinetycznej obiektu wyrażonej w quasi-prędkościach oraz wykonanie różniczkowań pozwala zapisać ogólne równania dynamiki platformy w postaci:

$$A \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + BC \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

gdzie macierze A , B , C mają następującą budowę:

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_x & -S_y \\ 0 & m & 0 & -S_x & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_x & S_y & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ S_x & 0 & -S_x & -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & -P & 0 & 0 & 0 \\ -Q & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & V & 0 & -R & Q \\ W & 0 & -U & R & 0 & -P \\ -V & U & 0 & -Q & P & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

przy czym widać, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ są identyczne.

2.3. Metodyka uwzględniania sił zewnętrznych

Wektory sił zewnętrznych $\mathbf{F}$ i momentów sił zewnętrznych $\mathbf{M}$ działających na obiekt pochodzą z uwzględnienia oddziaływań grawitacyjnych i sił wprowadzanych do konstrukcji przez siłowniki.

Gdy równania dynamiki wyprowadza się w oparciu o prawo zachowania pędu i krętu i prawa te wyrażone są w układzie własnym obiektu, to po prawych stronach układu równań otrzymuje się bezpośrednio rzuty odpowiednio sił i momentów na kierunki osi tego układu. Porównując budowę tych równań z równaniami otrzymanymi w wyniku zastosowania energetycznego formalizmu równań Boltzmanna-Hamela widać, że gdy równania pędu i krętu są wyrażone w quasi-prędkościach otrzymuje się wynik analogiczny, gdyż po prawej stronie równań Boltzmanna-Hamela występuje przetransformowany na układ własny obiektu wektor sił i momentów zewnętrznych.

2.3.1. Uwzględnienie oddziaływań grawitacyjnych

Siła ciężkości $\mathbf{F}_g$ przyłożona w punkcie O_c w przypadku niepokrywania się tego punktu z początkiem układu $Oxyz$ powoduje konieczność uwzględnienia momentów grawitacyjnych.

Otrzymuje się:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_g. \quad (2.12)$$

Składowe sił grawitacyjnych mają postać:

$$\mathbf{F}_g = mg\mathbf{\Lambda}_g = \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

gdzie macierz transformacji Λ_g ma postać:

$$\Lambda_g = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

i ostatecznie składowe od siły ciężkości platformy są następujące:

$$\begin{aligned} X^g &= -mg \sin \theta, \\ Y^g &= mg \cos \theta \sin \phi, \\ Z^g &= mg \cos \theta \cos \phi, \end{aligned} \quad (2.15)$$

przy czym przez m oznaczono masę obiektu a przez g wartość przyspieszenia ziemskiego.

Momenty od siły ciężkości obiektu można wyznaczyć jako:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_c & y_c & z_c \\ x^g & y^g & z^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^g \\ M^g \\ N^g \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

skąd:

$$\begin{aligned} L^g &= Z^g y_c - Y^g z_c, \\ M^g &= X^g z_c - Z^g x_c, \\ N^g &= Y^g x_c - X^g y_c, \end{aligned} \quad (2.17)$$

a po podstawieniu (2.15) do (2.17) otrzymuje się następujące składowe momentów w układzie odniesienia $Oxyz$ związanym z obiektem:

$$\begin{aligned} L^g &= mg(y_c \cos \theta \cos \phi - z_c \cos \theta \sin \phi), \\ M^g &= -mg(z_c \sin \theta + x_c \cos \theta \cos \phi), \\ N^g &= mg(x_c \cos \theta \sin \phi + y_c \sin \theta). \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3.2. Uwzględnienie oddziaływań siłowników

Zgodnie z rys.4. należy uwzględnić wpływ na konstrukcję poszczególnych sił siłowników F_i oraz ich momentów. Uczyniono to znajdując rzuty tych sił i ich momentów na osi układu własnego platformy $Oxyz$.

Jeżeli przez $\mathbf{r}_j$ oznaczyć promień wodzący punktu A'_j mocowania j -tego siłownika hydraulicznego do platformy, to moment siły siłownika hydraulicznego do platformy, to moment siły siłownika jest równy:

$$(\mathbf{M}_s)_j = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j. \quad (2.19)$$

W celu znalezienia składowych momentu w układzie własnym platformy należy najpierw znaleźć odpowiednie rzuty wektorów sił F_i w tym układzie.

A. Wyznaczenie składowych sił F_i w układzie $0_1x_1y_1z_1$.

Dla punktu A'_i można napisać (Rys.2), że:

$$\overline{0_1A'_i} = \overline{0_10} + \Lambda_v^{-1}r_i. \quad (2.20)$$

Na podstawie znajomości współrzędnych punktów A_i w układzie $0_1x_1y_1z_1$ znane są składowe wektora $\overline{0_1A'_i}$. Współrzędne wektora $\overline{A_iA'_i}$ można więc wyznaczyć jako:

$$\overline{A_iA'_i} = \overline{0_1A'_i} - \overline{0_1A_i} = [\overline{0_10} + \Lambda_v^{-1}r_i] - r_{i*}, \quad (2.21)$$

lub używając oznaczeń jak na rys.2:

$$\overline{A_iA'_i} = (R + \Lambda_v^{-1}r_i) - r_{i*} = [R(x_1, y_1, z_1) + \Lambda_v^{-1}(\phi, \theta, \psi)r_i] - r_{i*}. \quad (2.22)$$

Składowe wektora $\overline{A_iA'_i}$ mogą być więc wyznaczone na podstawie znajomości współrzędnych uogólnionych platformy.

Wektor siły generowanej w i -tym siłowniku, będąc skierowany w kierunku $\overline{A_iA'_i}$ może być określony jako:

$$F_i = F_i \frac{\overline{A_iA'_i}}{|\overline{A_iA'_i}|} = \frac{F_i}{s_i} \overline{A_iA'_i}, \quad (2.23)$$

przy czym zwrot wektora siły jest określony przez znak F_i .

B. Wyznaczenie składowych siły F_i w układzie własnym platformy $0xyz$.

Transformując wektor siły do układu własnego platformy otrzymuje się:

$$(F_i)_{PL} = \Lambda_v F_i = \begin{bmatrix} X_i^s \\ Y_i^s \\ Z_i^s \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

przy czym:

$$\begin{bmatrix} X_i^s \\ Y_i^s \\ Z_i^s \end{bmatrix} = \frac{F_i}{s_i} \left\{ \Lambda_v \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - r_{i*} \right) + r_i \right\}. \quad (2.25)$$

Składowe momentu są równe odpowiednio:

$$(M_s)_i = r_c \times F_i = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_c & y_c & z_c \\ X_i^s & Y_i^s & Z_i^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i^g \\ M_i^g \\ N_i^g \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

skąd:

$$\begin{aligned} L_i^g &= Z_i^s y_c - Y_i^s z_c, \\ M_i^g &= X_i^s z_c - Z_i^s x_c, \\ N_i^g &= Y_i^s x_c - X_i^s y_c. \end{aligned} \quad (2.27)$$

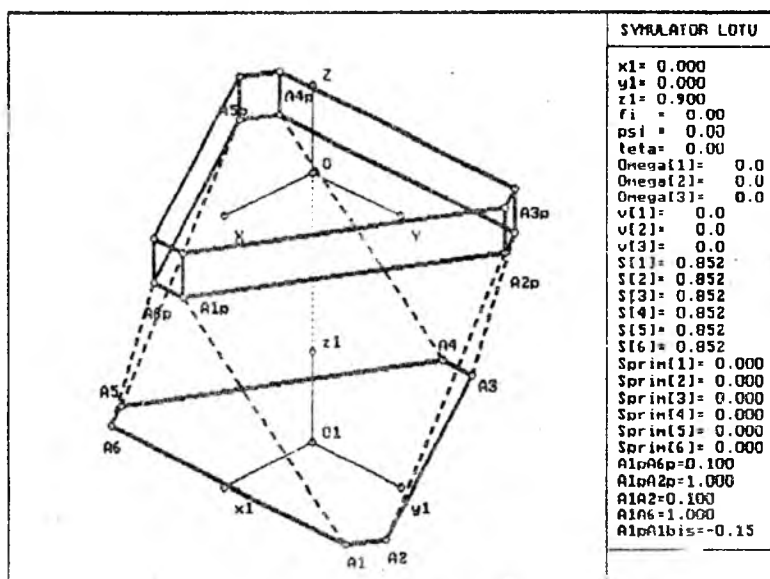
Uwzględnienie sumarycznego oddziaływania sił grawitacyjnych i napędów sześciu siłowników hydraulicznych prawe strony dynamicznych równań ruchu zapisać można ostatecznie w postaci:

$$\begin{aligned} X &= X^g + \sum_{i=1}^6 X_i^s, & L &= L^g + \sum_{i=1}^6 L_i^s, \\ Y &= Y^g + \sum_{i=1}^6 Y_i^s, & M &= M^g + \sum_{i=1}^6 M_i^s, \\ Z &= Z^g + \sum_{i=1}^6 Z_i^s, & N &= N^g + \sum_{i=1}^6 N_i^s. \end{aligned} \quad (2.28)$$

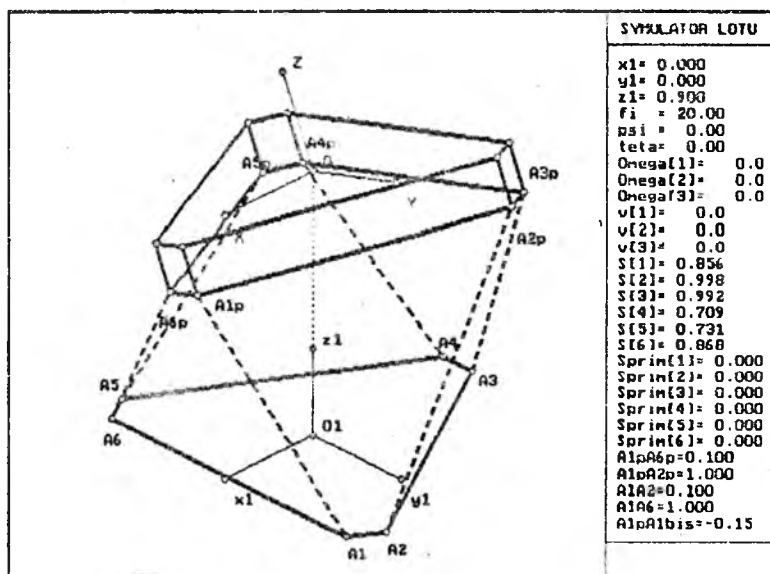
W oparciu o wprowadzone równania ruchu oraz pracę [2] przeprowadzono symulację numeryczną wraz z wizualizacją kinematyki platformy testowej. Przykładowe wyniki symulacji i wizualizacji przedstawiono na rys.5 ÷ rys.14. Pokazano położenie platformy przy różnych przemieszczeniach liniowych x_1, y_1, z_1 i kątowych ϕ, ψ, θ , zmiany długości dźwigników "S[i]" i prędkości zmian "Sprim[i]" oraz zmiany prędkości przemieszczeń platformy liniowych $V[1] = \dot{x}_1, V[2] = \dot{y}_1, V[3] = \dot{z}_1$ i kątowych $\Omega[1] = P, \Omega[2] = Q, \Omega[3] = R$.

Literatura

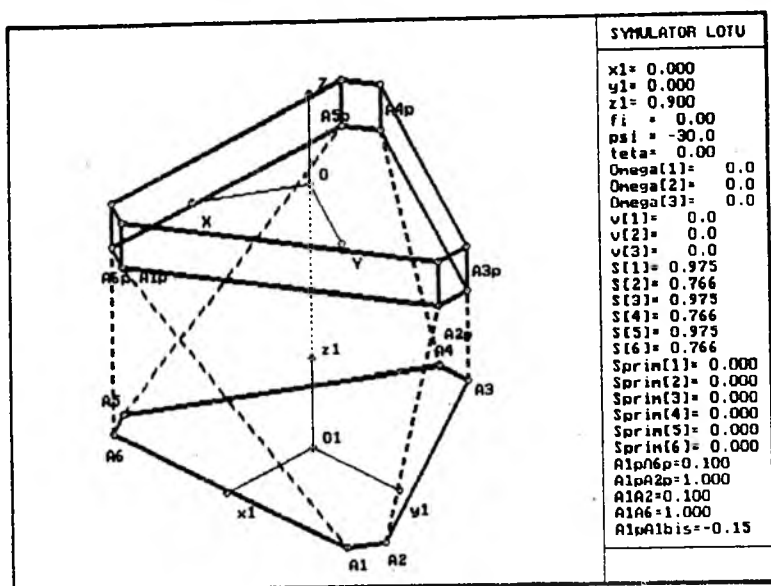
1. MARYNIAK J., 1989, *Problem Człowiek w modelowaniu dynamiki symulatorów lotniczych*, Sympozjon "Modelowanie w Mechanice", PTMTiS, Beskid Śląski
2. Małecki J., 1990, *Kinematyka platformy uniwersalnego symulatora lotu o sześciu stopniach swobody*, IV Ogólnopolska Konferencja "Mechanika w lotnictwie", Warszawa



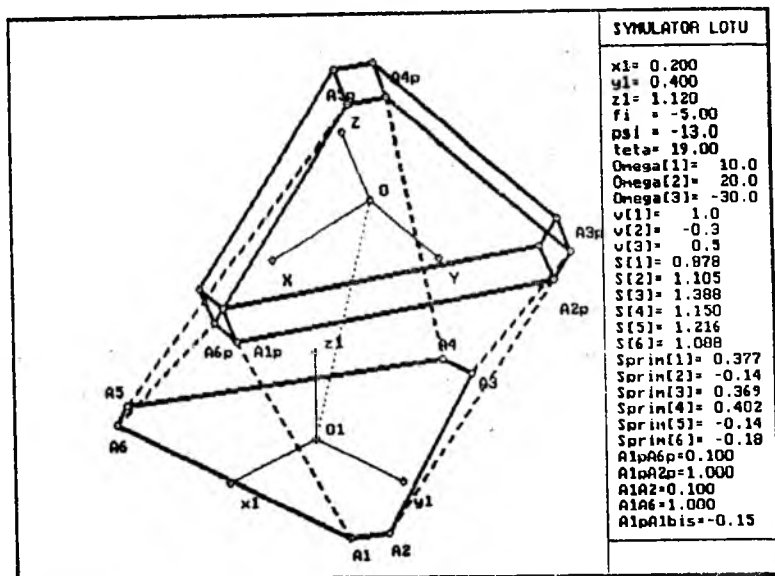
Rys. 5.



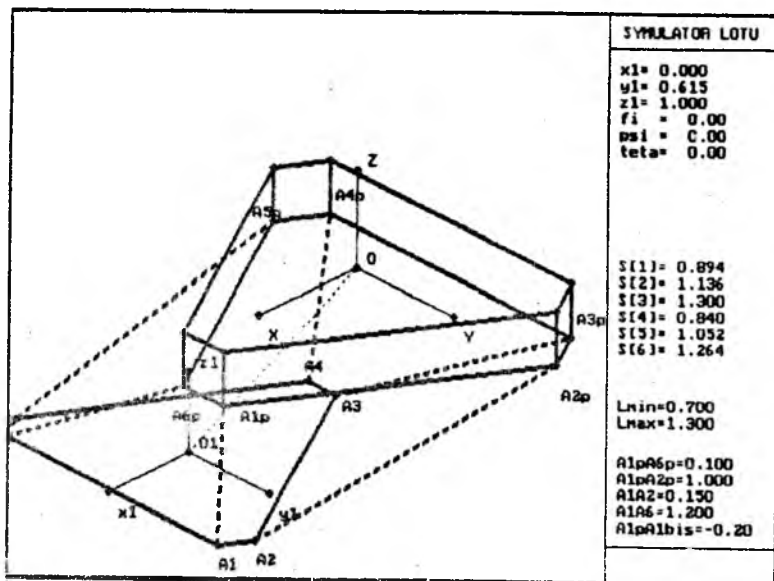
Rys. 6.



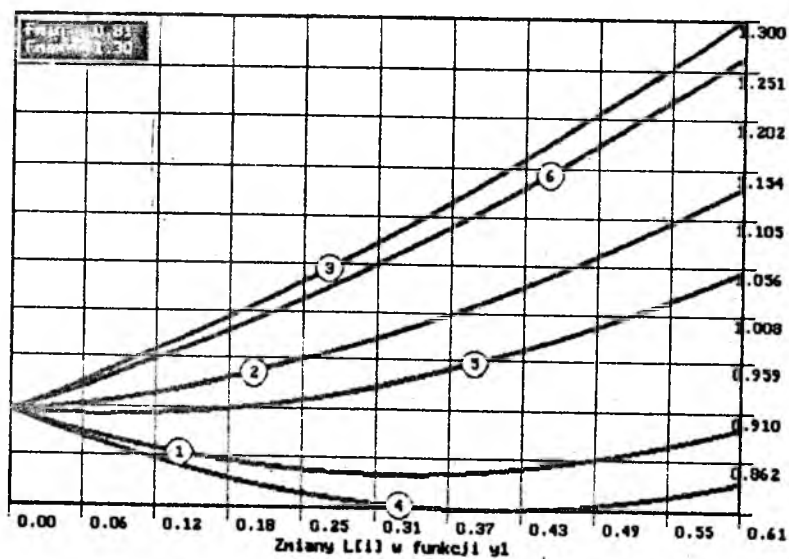
Rys. 7.



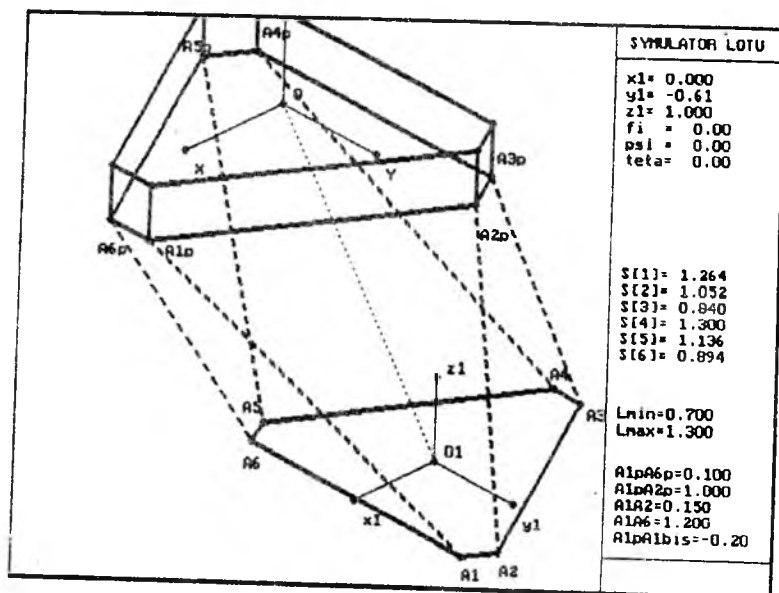
Rys. 8.



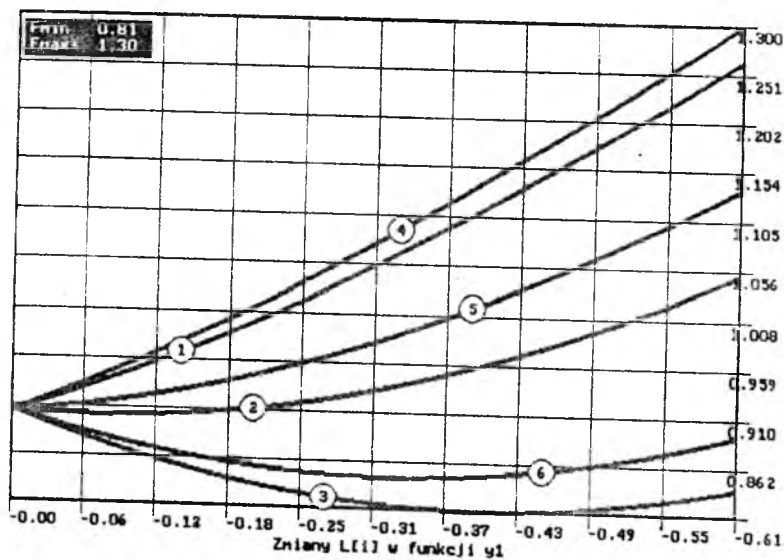
Rys. 9.



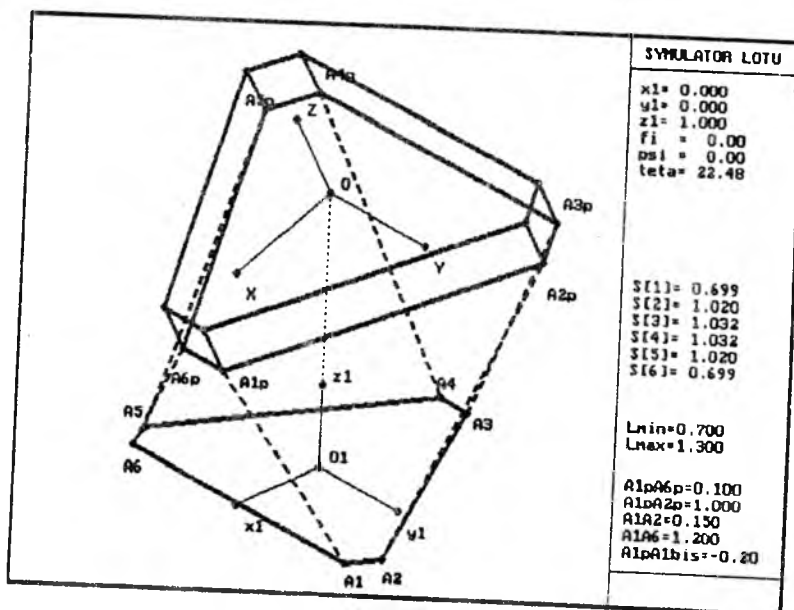
Rys. 10.



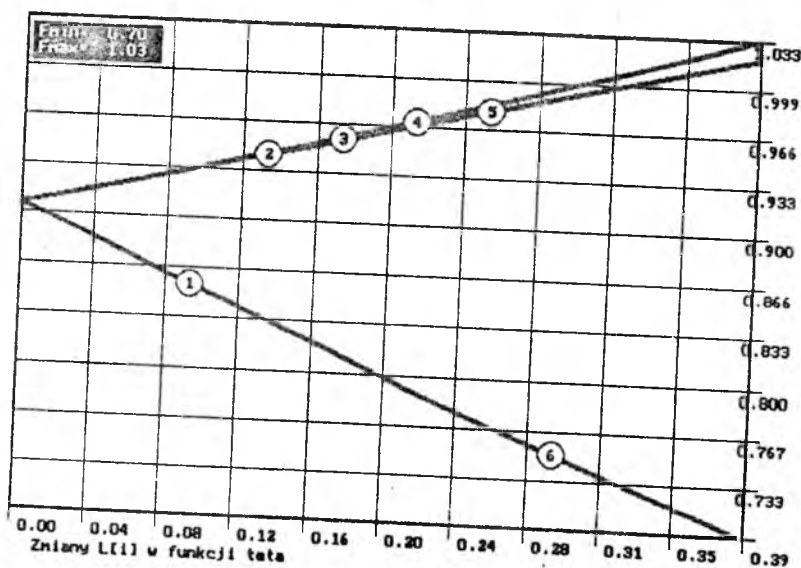
Rys. 11.



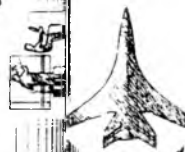
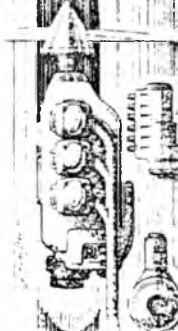
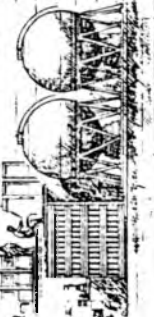
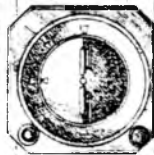
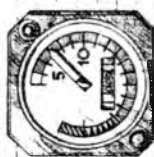
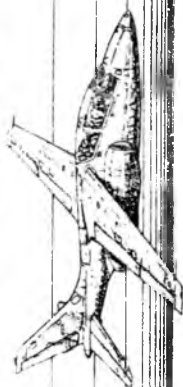
Rys. 12.



Rys. 13.



Rys. 14.



KINEMATYKA PLATFORMY UNIWERSALNEGO SYMULATORA LOTU O SZEŚCIU STOPNIACH SWOBODY¹

JERZY MAŁECKI

Politechnika Warszawska

1. Wprowadzenie

Przed przystąpieniem do budowy dynamicznych równań ruchu platformy symulatora lotu należy rozwiązać szereg problemów obliczeniowych związanych z własnościami kinematycznymi obiektu. Do opisu ruchu platformy stosuje się quasiwspółrzędne co jest wygodne z punktu widzenia budowy układu sterowania, wydłużenia poszczególnych siłowników napędzających platformę wraz z ich odpowiednimi pochodnymi.

W pracy przedstawiono metodykę wzajemnego przeliczania tych dwóch zestawów wielkości – quasiwspółrzędnych i ich odpowiednich pochodnych, (odczytywanych w układzie własnym obiektu) oraz wydłużeń, prędkości i przyspieszeń siłowników.

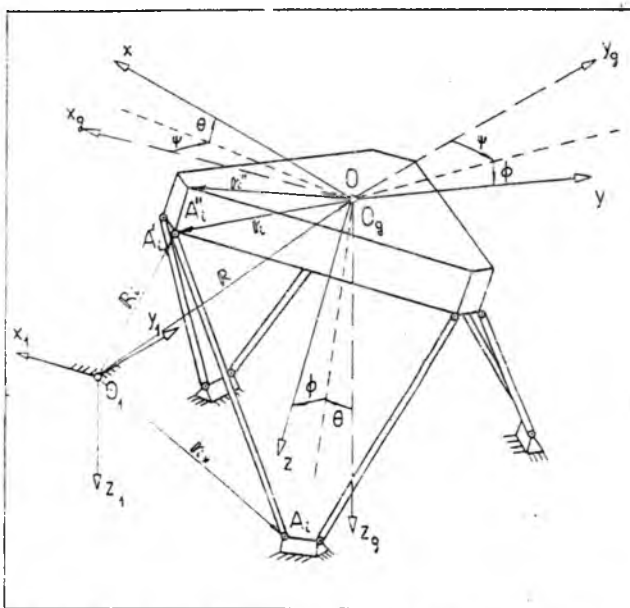
2. Przyjęte układy współrzędnych, parametry i współrzędne

Z elementem fundamentującym symulatora $A_1A_2...A_6$ wiązuje się nieruchomy układ współrzędnych $0_1x_1y_1z_1$. Z platformą wiązuje się sztywno układ współrzędnych $Oxyz$. Wzajemne usytuowanie tych układów jest na rys.1.

Składowe wektora współrzędnych uogólnionych platformy q są następujące:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \phi \\ \psi \\ \vartheta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Platforma symulatora lotu. Układy współrzędnych

Geometria elementu fundamentującego i platformy zdefiniowana jest poprzez określenie składowych wektorów wodzących punktów A_i, A'_i, A''_i odpowiednio w układach współrzędnych elementu fundamentującego i platformy: r_{i*}, r_i, r''_i .

Poszczególne długości siłowników $A_i A'_i$ dalej oznaczano przez s_i .

3. Zakres pracy

Zostaną omównione algorytmy pozwalające na:

1. wyznaczanie długości siłowników poruszających platformę symulatora w oparciu o wektor współrzędnych uogólnionych platformy,
2. wyznaczanie prędkości wydłużeń siłowników na podstawie znajomości wektora współrzędnych uogólnionych i quasiprędkości platformy,
3. wyznaczanie przyspieszeń wydłużeń siłowników na podstawie znajomości wektora współrzędnych uogólnionych, wektora quasiprędkości i quasiprzyspieszeń platformy,

4. dokonanie kompletu transformacji odwrotnych do wymienionych w punktach 1,2,3.

4. Transformacja prosta

4.1. Wyznaczenie długości siłowników na podstawie wektora współrzędnych uogólnionych platformy

Zgodnie z rys.1 można napisać, że wektor wodzący punktu A'_i w układzie $0_1x_1y_1z_1$ jest równy:

$$R_i = R + \Lambda_v^{-1} r_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\Lambda_v^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \vartheta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \vartheta \sin \psi & \sin \phi \sin \vartheta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \vartheta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \vartheta & \sin \phi \cos \vartheta & \cos \phi \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Na tej podstawie:

$$s_i = \overline{A_i A'_i} = |R_i - r_{i*}|, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (4.3)$$

$$\overline{A_i A'_i} = R + \Lambda_v^{-1} r_i - r_{i*}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.4)$$

Ostatecznie długość i -tego siłownika s_i równa długości wektora $\overline{A_i A'_i}$ wyrazi się wzorem:

$$\begin{aligned} s_i &= \sqrt{s_i^2} = \sqrt{\overline{A_i A'_i} \cdot \overline{A_i A'_i}} = \\ &= \sqrt{(R + \Lambda_v^{-1} r_i - r_{i*}) \cdot (R + \Lambda_v^{-1} r_i - r_{i*})}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2. Wyznaczenie prędkości siłowników na podstawie wektora współrzędnych uogólnionych i quasiprędkości

Zakłada się, że poniższe wektory wyznaczono w układzie własnym platformy:

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{col}[P, Q, R], \\ V &= \text{col}[U, V, W], \\ r_i &= \text{col}[r_x^i, r_y^i, r_z^i]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Zakłada się, że w układzie własnym platformy dane są wektory:

$$\begin{aligned}\Omega &= \text{col}[P, Q, R], \\ V &= \text{col}[U, V, W], \\ r_i &= \text{col}[r_x^i, r_y^i, r_z^i], \\ \dot{\Omega} &= \text{col}[\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}], \\ \dot{V} &= \text{col}[\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}].\end{aligned}\quad (4.10)$$

Przyspieszenie punktu A'_i w układzie ruchowym $Oxyz$ równe jest:

$$(a_{A'_i})_{xyz} = V + \Omega \times r_i + \Omega \times (\Omega \times r_i). \quad (4.11)$$

Dokonując transformacji do układu nieruchomego i rzutując na kierunek i -tego siłownika otrzymuje się:

$$\bar{s}_i = \frac{(a_{A'_i})_{x_1 y_1 z_1}}{s_i} (R + \Lambda_v^{-1} r_i - r_{i*}), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.12)$$

5. Transformacja odwrotna

5.1. Wyznaczenie współrzędnych uogólnionych platformy na podstawie wydłużeń siłowników

Zgodnie z (4.5) długości i -tego siłownika można wyznaczyć w funkcji współrzędnych uogólnionych jako:

$$\begin{aligned}s_i &= \sqrt{s_i^2} = \sqrt{A_i A'_i \cdot A_i A'_i} = \\ &= \sqrt{(R + \Lambda_v^{-1} r_{i*}) \cdot (R + \Lambda_v^{-1} r_i - r_{i*})},\end{aligned}\quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}s_1 - f_1(x_1, y_1, z_1, \phi, \psi, \vartheta) &= 0, \\ \dots & \\ s_6 - f_6(x_1, y_1, z_1, \phi, \psi, \vartheta) &= 0.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Powyższe sześć związków stanowi układ równań nieliniowych algebraicznych. W związku z tym zadanie wyznaczenia składowych wektora współrzędnych można sprowadzić do rozwiązania tego układu. Praktyczną przydatność metody Newtona-Raphsona zilustrowano w [5]. Elementy macierzy jacobianowej wyznaczano numerycznie, macierze odwrotne wyznaczano metodą rozkładu trójkątnego [6].

5.2. Wyznaczanie quasiprędkości platformy na podstawie wydłużeń i prędkości wydłużeń siłowników

Zadanie odwrotne na prędkości i przyspieszenia można rozwiązać w oparciu o wyznaczenie rozwiązań odpowiednio skonstruowanych układów równań liniowych, przy czym do wyznaczenia przyspieszeń niezbędne jest najpierw rozwiązanie zadania na prędkości, a do wyznaczenia tych ostatnich niezbędna jest znajomość rozwiązania zadania na położenia.

Zgodnie z (4.9) można napisać, że:

$$\dot{s}_i = (V_i)_{x_1 y_1 z_1} \overline{A_i A_i'} \frac{1}{|A_i A_i'|}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (5.3)$$

a więc:

$$s_i \dot{s}_i = \left[\Delta_v^{-1} \{V + \Omega \times r_i\} \right] \overline{A_i A_i'}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.4)$$

Powyższy układ można rozwiązać uzyskując:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \Delta_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \dot{s}_1 \\ s_2 \dot{s}_2 \\ \vdots \\ s_6 \dot{s}_6 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

5.3. Wyznaczenie quasiprzyspieszeń platformy na podstawie wydłużeń, prędkości i przyspieszeń siłowników

Do wyznaczenia quasiprzyspieszeń platformy wykorzystuje się rozwiązanie zadania odwrotnego na quasiwspółrzędne oraz zadania odwrotnego na quasiprędkości.

Dla każdego z punktów A_i' platformy można napisać:

$$(a_p)_i = A + \varepsilon \times r_i + \Omega \times (\Omega \times r_i), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.6)$$

Zakłada się, zgodnie z powyższymi uwagami, że składowe wektora K_i :

$$K_i = \Omega \times (\Omega \times r_i) = \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \\ K_{3i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (5.7)$$

zostały wyznaczone w wyniku rozwiązania zadania odwrotnego na prędkości, a więc (5.6) można zapisać w postaci:

$$(a_{pi}) = A + \varepsilon \times r_i + K_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.8)$$

Przyspieszenie w układzie $0_1x_1y_1z_1$ jest równe:

$$(\mathbf{a}_{P_i})_{x_1y_1z_1} = \mathbf{\Lambda}_v^{-1}(\mathbf{a}_{P_i}), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.9)$$

Przyspieszenia względne w ruchu poosiowym końców siłownika spełniają związki analogicznie do (18) dla prędkości:

$$s_i \ddot{s}_i = (\mathbf{a}_{P_i})_{x_1y_1z_1} \overline{A_i A_i'}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (5.10)$$

$$s_i \ddot{s}_i = \{ \mathbf{\Lambda}_v^{-1} [\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{K}_i] \} \overline{A_i A_i'}. \quad (5.11)$$

Postępując analogicznie otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \Delta_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \ddot{s}_1 - t_1 \\ s_2 \ddot{s}_2 - t_2 \\ \vdots \\ s_6 \ddot{s}_6 - t_6 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Widoczne jest podobieństwo wzorów (5.5) i (5.12). Na skutek możliwości wykorzystania macierzy Δ i macierzy do niej odwrotnej, wyznaczonych przy obliczeniach quasiprędkości, skróceniu ulegają czasy obliczeń składowych quasiprzyspieszeń.

Literatura

1. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Wydawnictwa PW, Prace Naukowe, Mechanika 32
2. DIEUDONNE J.E., PARRISH R.V., BARDUSCH R.E., *An actuator extension transformation for a motion simulator and an inverse transformation applying Newton-Raphson method*, Langley Research Center
3. BAARSPUL M., 1977, *The generation of motion cues on a six-degrees-of-freedom motion system*, Delft University of Technology, Departament of Aerospace Engineering
4. MARYNIAK J., GORAJ Z., MOLICKI W., MAŁECKI J., OTRĘBSKA U., 1988, *Wizualizacja metodą symulacji numerycznej kinematyki platformy symulatora lotu o sześciu stopniach swobody*, Zespół Naukowo-Badawczy Dynamiki Obiektów Ruchomych, ITLiMS PW, Sprawozdanie Nr 202/88-N
5. MARYNIAK J., MAŁECKI J., *Numeryczna metoda obliczeń transformacji prostej i odwrotnej platformy symulatora lotu o sześciu stopniach swobody*
6. PRESS H.P., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., 1987, *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press



CENTRUM KSZTAŁCENIA JĘZYKOWEGO KADR BANKOWYCH I FINANSOWYCH

Centrum prowadzi kształcenie językowe – języki angielski i niemiecki, kadr bankowych od poziomu podstawowego do zaawansowanego. Nasi absolwenci bez problemów zdają egzaminy resortowe, a najlepsi są przygotowani do zdania egzaminu Cambridge Certificate – pierwszy stopień. Centrum działa trzeci rok, a najwyższy poziom kształcenia ukończyło 330 osób. Naszymi klientami są PKO Bank Państwowy, Bank PEKAO S.A., Bank Handlowy, Powszechny Bank Kredytowy S.A., Bank Gospodarki Żywnościowej i wiele innych.

Kształcenie odbywa się w ośrodku szkoleniowym oddalonym od centrum Warszawy o 13 km.

Centrum posiada specjalistyczne wyposażenie dydaktyczne znacznie ułatwiające i przyspieszające naukę języków. Programy kształcenia zostały opracowane przy współpracy angielskich partnerów.

Kadrę Centrum stanowią specjaliści językowi z jednej z najlepszych firm językowych Europy – EUROCENTRES

oraz pracownicy Uniwersytetu Warszawskiego, Szkoły Głównej Handlowej i kilku innych szkół wyższych.

Zajęcia organizowane są przy pomocy różnorodnych technik łącznie z wykorzystaniem komputerów, sprzętu audiowizualnego oraz SITA LEARNING SYSTEM.

Kursy organizowane są w układzie trzydniowych, tygodniowych i dwutygodniowych zjazdów. Terminy zjazdów i ich ilość dostosowana jest do potrzeb klienta i poziomu uczestników. Podstawowe formy kształcenia to kurs specjalistyczny, który trwa 560 godzin i kurs podstawowy, który trwa 360 godzin.

Pod koniec 1992r. po raz pierwszy organizowane będą w Centrum miesięczne kursy przygotowawcze do egzaminów Cambridge Certificate – pierwszy i drugi stopień.

W IV kwartale 1992r. również po raz pierwszy wspólnie z Polskim Biurem Podróży „ORBIS” S.A. rozpoczniemy pełny zestaw kursów dla pracowników branży turystycznej. Kursy te odbywać się będą na poziomie podstawowym, średniozaawansowanym i specjalistycznym.

00-828 WARSZAWA
AL.JANA PAWŁA II NR 13
TEL. 20-25-51, 20-03-51/261
FAX 24-35-65

MODEL DYNAMIKI RUCHU SAMOŁOTU PO NIESYMETRYCZNYM ZRZUCIE PODWIESZEŃ W TRAKCIE WYKONYWANIA MANEWRÓW PRZESTRZENNYCH¹

WŁODZIMIERZ DŻYGADŁO

Wyższa Szkoła Inżynierska, Radom

JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Celem tej pracy jest analiza wpływu zaburzenia wywoływanego zrzutem podwieszeń, w trakcie wykonywania manewrów przestrzennych, na dynamikę samolotu.

2. Model fizyczny

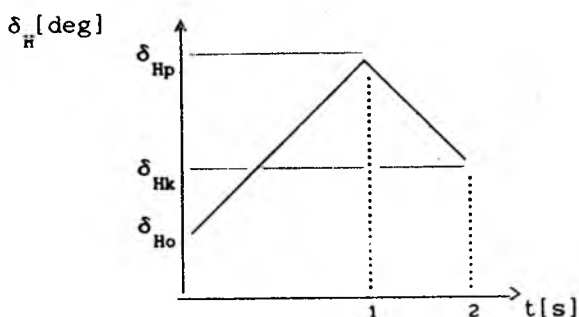
Podczas budowy modelu fizycznego przyjęto następujące założenia, uwzględniające na ile to było możliwe, wszystkie te czynniki które mają decydujący wpływ na własności dynamiczne samolotu w ruchu przestrzennym:

- samolot charakteryzuje się konwencjonalną, symetryczną i zwartą budową, o skrzydłach z małym skosem i wyposażony jest w turbinowy silnik odrzutowy jednowałowy,
- samolot traktowany jest jako układ mechaniczny, sztywny, o sześciu stopniach swobody,
- wychylenia powierzchni sterowych: lotek, steru kierunku i wysokości oraz zmiana siły ciągu mają tylko wpływ parametryczny na wartości sił i momentów sił aerodynamicznych oraz sił i momentów sił od napędu,

¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

- samolot porusza się w atmosferze ziemskiej, z prędkościami poddźwiękowymi – liczba Macha $Ma \ll 1$, można więc zaniedbać wpływ efektów ściśliwości powietrza,
- przyjęto, że nie występują żadne ruchy mas powietrza względem Ziemi,
- pominięto wpływ krzywizny Ziemi,
- w przypadku lotów niesterowanych położenie steru wysokości, kierunku i lotek oraz ciąg silnika nie zmienia się,
- w przypadku lotów sterowanych przyjmujemy, że ciąg silnika zmienia się liniowo od wartości początkowej T_0 do końcowej T_k w określonym przedziale czasu Δt_s , sterowanie pozostałymi powierzchniami sterowymi odbywa się nieliniowo i składa się z dwóch ruchów i efektywność procesu sterowania jest zależna od współczynnika b i np. dla steru wysokości mamy:

$$\delta_{Hp} = \delta_{Ho} + b(\delta_{Hk} - \delta_{Ho}).$$



Rys. 1.

2.1. Charakterystyka sił zewnętrznych

Przy budowie modelu fizycznego jedną z ważniejszych czynności jest prawidłowa interpretacja i wprowadzenie do modelu działających i mogących wystąpić sił. Na podstawie przyjętych wcześniej założeń przy analizie ruchu przestrzennego samolotu wyróżniono następujące grupy sił: aerodynamiczne, od zespołu napędowego, bezwładności, grawitacyjne, od podwieszeń i od sterowania.

2.1.1. Siły aerodynamiczne

Siły i momenty sił aerodynamicznych mają decydujący wpływ na własności dynamiczne samolotu (np. na sterowność, stateczność). Wartości sił i momentów sił aerodynamicznych zależą od własności fizycznych powietrza (np. gęstości, lepkości), powierzchni opływającego ciała, prędkości ruchu ciała względem powietrza, kształtu ciała i jego konfiguracji względem kierunku ruchu. Dokładne wyznaczenie sił i momentów sił aerodynamicznych wymaga badań tunelowych połączonych z weryfikacją podczas badań w locie.

2.1.2. Siły od zespołu napędowego

Założono, że jedynymi oddziaływaniami pochodzącymi od zespołu napędowego są ciąg T i moment girokopowy M_{gir} . Wartość ciągu jest w locie ustalonym stała i zależna od obrotów silnika oraz wysokości i prędkości lotu.

2.1.3. Siły grawitacyjne

Siły grawitacyjne są wynikiem oddziaływania grawitacyjnego Ziemi. Założono, że przyspieszenie ziemskie jest stałe.

2.1.4. Siły od sterowania

Siły od sterowania są siłami aerodynamicznymi powstającymi na skutek zmiany położenia sterów i lotek. W efekcie zmienia się opływ, powoduje zmianę wartości współczynników sił i momentów sił aerodynamicznych.

3. Model matematyczny

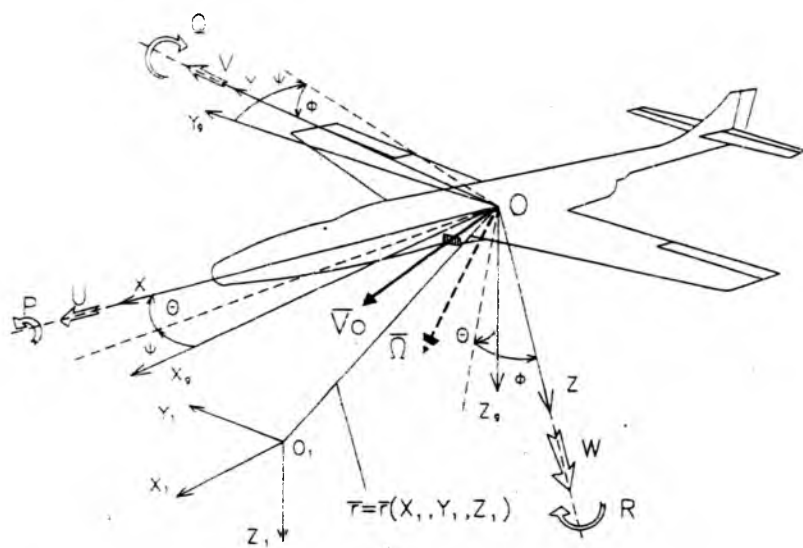
3.1. Układy odniesienia potrzebne do opisu dynamiki samolotu

W pracy zastosowano prawoskrętne, prostokątne układy współrzędnych. Ruch samolotu jest rozpatrywany względem inercjalnego układu współrzędnych $0_1X_1Y_1Z_1$ związanego z Ziemią, w którym oś 0_1Z_1 jest skierowana pionowo w dół a osie 0_1X_1 i 0_1Y_1 są poziome (rys.2) (nieruchomy, normalny układ odniesienia).

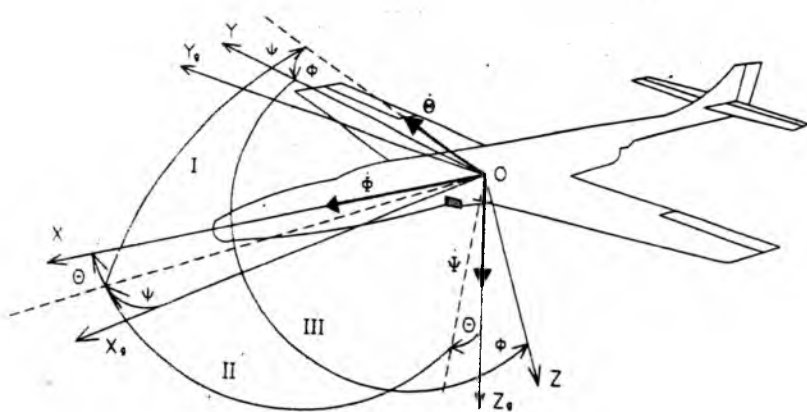
Równania ruchu samolotu i zależności kinematyczne wyznaczamy wykorzystując nieinercjalne układy współrzędnych.

Zastosujemy następujące układy współrzędnych:

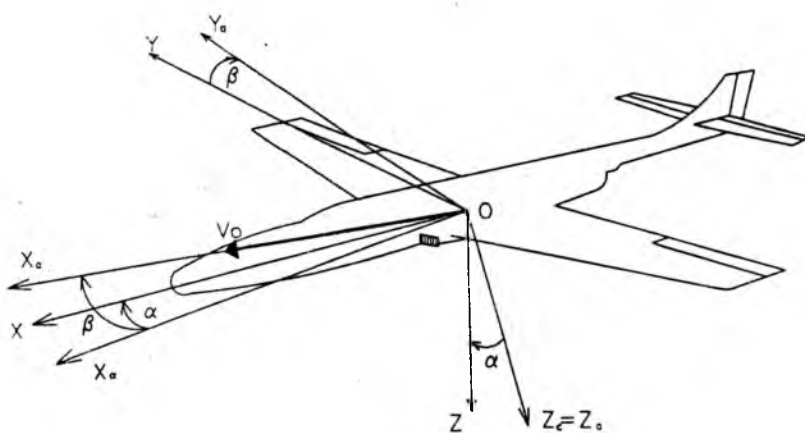
- układ $0X_gY_gZ_g$ związany z poruszającym się samolotem i równoległy do nieruchomego układu $0_1X_1Y_1Z_1$ (rys.2, rys.3);



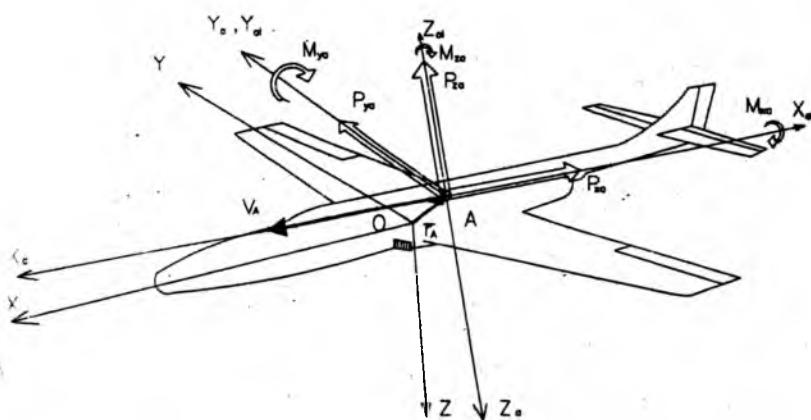
Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.

- układ $0XYZ$ związany z samolotem w którym osie OX i OZ są równoległe do płaszczyzny symetrii samolotu, oś OZ jest skierowana w dół a oś OX do przodu, równoległe do podłużnej osi samolotu (rys.2, rys.3, rys.4);
- układ $0X_aY_aZ_a$ związany z przepływem, w którym oś $0X_a$ ma kierunek i zwrot zgodny z wektorem prędkości lotu V_0 (rys.4).

Dodatkowo zastosowano następujące układy współrzędnych:

- układ $AX_{al}Y_{al}Z_{al}$ (laboratoryjny) związany z kierunkiem przepływu ośrodka opływającego samolot, oś AX_{al} posiada kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i zwrotem opływu (rys.5);
- układ $C_BX_BY_BZ_B$ związany sztywno z podwieszeniem, oś C_BX_B leży w płaszczyźnie symetrii podwieszenia i ma zwrot zgodny ze zwrotem wektora prędkości V_0 ;
- układ silnikowy $0_TX_TY_TZ_T$.

3.2. Współrzędne kątowe

Kąty obrotu (samolotowe) określają jednoznacznie położenie układu odniesienia $0XYZ$ względem układu grawitacyjnego $0X_gY_gZ_g$ równoległego do $0_1X_1Y_1Z_1$ nieruchomego układu inercjalnego (rys.3).

Są to kąty quasi-Eulerowskie:

- Ψ – kąt odchylenia,
- Θ – kąt pochylenia,
- Φ – kąt przechylenia.

Zwrot wektora prędkości przepływu względem układu $0XYZ$ określają kąty (rys.4):

- α – kąt natarcia,
- β – kąt ślizgu.

Zwrot osi symetrii podwieszenia względem układu $0XYZ$ związanego z samolotem określają kąty:

- φ_{B_y} – kąt pochylenia osi C_BX_B podwieszenia,
- φ_{B_z} – kąt odchylenia osi C_BX_B podwieszenia.

Kąt linii działania ciągu silnika i osi obrotu elementów wirujących w silniku prawoobrotowym układu $0_TX_TY_TZ_T$ związanego z silnikiem względem układu $0XYZ$ związanego z samolotem są następujące:

- φ_{T_y} – kąt zaklinowania w pionie,
- φ_{T_z} – kąt zaklinowania w poziomie.

3.3. Współrzędne liniowe

Współrzędne te określają jednoznacznie położenie bieguna układu odniesienia $0XYZ$ związanego z poruszającym się samolotem, względem nieruchomego układu inercyjnego $0_1X_1Y_1Z_1$ związanego z Ziemią (rys.2).

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1 + z_1\mathbf{k}_1, \quad (3.1)$$

Pozostałe wektory określają w układzie $0XYZ$ położenie punktówpodwieszeń, przyłożenia sił grawitacyjnych, aerodynamicznych i ciągu:

– wektor położenia środka masy podwieszeń:

$$\mathbf{r}_{B_i} = x_{B_i}\mathbf{i} + y_{B_i}\mathbf{j} + z_{B_i}\mathbf{k}, \quad (3.2)$$

– wektor położenia środka masy C samolotu:

$$\mathbf{r}_C = x_C\mathbf{i} + y_C\mathbf{j} + z_C\mathbf{k}, \quad (3.3)$$

– wektor położenia punktu redukcji sił aerodynamicznych A działających na cały samolot:

$$\mathbf{r}_A = x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k}, \quad (3.4)$$

– wektor położenia punktu redukcji dodatkowych sił aerodynamicznych działających na usterzenie poziome, pochodzących od wychyleń steru wysokości:

$$\mathbf{r}_H = x_H\mathbf{i} + y_H\mathbf{j} + z_H\mathbf{k}, \quad (3.5)$$

– wektor punktu przyłożenia ciągu silników C_T i momentów giroskopowych:

$$\mathbf{r}_{T_i} = x_{T_i}\mathbf{i} + y_{T_i}\mathbf{j} + z_{T_i}\mathbf{k}, \quad (3.6)$$

– wektor położenia punktu redukcji dodatkowych sił aerodynamicznych działających na usterzenie pionowe pochodzące od wychyleń steru kierunku:

$$\mathbf{r}_V = x_V\mathbf{i} + y_V\mathbf{j} + z_V\mathbf{k}, \quad (3.7)$$

gdzie: $i = L, P$ lub $i = 1, 2, \dots, n$, przy czym: L -lewy, P -prawy.

3.4. Pełna postać równań ruchu samolotu

Po uwzględnieniu sił i momentów sił działających na samolot w locie, pełne równania ruchu samolotu z podwieszeniami przyjmują postać:

- równanie ruchów podłużnych

$$\begin{aligned}
 m(\dot{U} + QW - RV) - S_x(Q^2 + R^2) - S_y(\dot{R} - PQ) + S_z(\dot{Q} + PR) = \\
 = -mg \sin \Theta + T \cos \varphi_{Tz} \cos \varphi_{Ty} - \frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{xa} \cos \beta \cos \alpha + \\
 + C_{ya} \sin \beta \cos \alpha - C_{za} \sin \alpha) - \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n S_{Bi} (C_{xBi} \cos \beta_{Bi} \cos \alpha_{Bi} + \\
 + C_{yBi} \sin \beta_{Bi} \cos \alpha_{Bi} - C_{zBi} \sin \alpha_{Bi}) + X_Q Q + \sum_{i=1}^n X_{Q_i}^B Q,
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

- równanie ruchów bocznych

$$\begin{aligned}
 m(\dot{V} + RU + PW) + S_x(\dot{R} + QP) - S_y(P^2 + R^2) - S_z(\dot{P} - QR) = \\
 = mg \cos \Theta \sin \Phi + T \sin \varphi_{Tz} + \frac{1}{2} \rho S V_0^2 (-C_{xa} \sin \beta + C_{ya} \cos \beta) + \\
 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n S_{Bi} (-C_{xBi} \sin \beta_{Bi} + C_{yBi} \cos \beta_{Bi}) + Y_P P + Y_R R + \\
 + \sum_{i=1}^n (Y_{P_i}^B P + Y_{R_i}^B R) + Y_{\delta v} \delta v,
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

- równanie ruchów wznoszących

$$\begin{aligned}
 m(\dot{W} + PV - QU) - S_x(\dot{Q} - PR) + S_y(\dot{P} + QR) - S_z(Q^2 + P^2) = \\
 = mg \cos \Theta \cos \Phi - T \cos \varphi_{Tz} \sin \varphi_{Ty} - \frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{xa} \cos \beta \sin \alpha + \\
 + C_{ya} \sin \beta \sin \alpha + C_{za} \cos \alpha) - \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n S_{Bi} (C_{xBi} \cos \beta_{Bi} \sin \alpha_{Bi} + \\
 + C_{yBi} \sin \beta_{Bi} \sin \alpha_{Bi} + C_{zBi} \cos \alpha_{Bi}) + Z_Q Q + \sum_{i=1}^n Z_{Q_i}^B Q + \\
 + Z_{\alpha z H} \alpha_{zH} + Z_{\delta H} \delta H,
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

- równanie przechylenia

$$\begin{aligned}
 J_x \dot{P} - (J_y - J_z) QR - J_{xy}(\dot{Q} - PR) - J_{xz}(\dot{R} + PQ) - J_{yz}(Q^2 - R^2) + \\
 + S_y(\dot{W} - UQ + PV) - S_z(\dot{V} - PW + UR) = m_s g (y_c \cos \Theta \cos \Phi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_c \cos \Theta \sin \Phi) + \sum_{i=1}^n m_{B_i} g (y_{B_i} \cos \Theta \cos \Phi + z_{B_i} \cos \Theta \sin \Phi) - \\
& - T (y_T \cos \varphi_{T_z} \sin \varphi_{T_y} + z_T \sin \varphi_{T_z}) + J_T \omega_T (R \sin \varphi_{T_z} + Q \cos \varphi_{T_z} \cdot \\
& \cdot \sin \varphi_{T_y}) + \frac{1}{2} \rho S V_0^2 \left[-y_A (C_{x_a} \cos \beta \sin \alpha + C_{y_a} \sin \beta \sin \alpha + C_{z_a} \cos \alpha) - \right. \\
& \left. - z_A (C_{x_a} \sin \beta - C_{y_a} \cos \beta) - c_a (C_{m_{x_a}} \cos \beta \cos \alpha + C_{m_{y_a}} \sin \beta \cos \alpha - \right. \\
& \left. - C_{m_{z_a}} \sin \alpha) \right] + \frac{1}{2} \rho S V_0^2 \sum_{i=1}^n S_{B_i} \left[-y_{B_i} (C_{x_{B_i}} \cos \beta_{B_i} \sin \alpha_{B_i} + \right. \\
& + C_{y_{B_i}} \sin \beta_{B_i} \sin \alpha_{B_i} + C_{z_{B_i}} \cos \alpha_{B_i}) - z_{B_i} (C_{x_{B_i}} \sin \beta_{B_i} - \\
& - C_{y_{B_i}} \cos \beta_{B_i}) - l_{B_i} (C_{m_{x_{B_i}}} \cos \beta_{B_i} \cos \alpha_{B_i} + C_{m_{y_{B_i}}} \sin \beta_{B_i} \cos \alpha_{B_i} - \\
& \left. - C_{m_{z_{B_i}}} \sin \alpha_{B_i}) \right] + L_P P + L_R R + \sum_{i=1}^n (L_{P_i}^B P + L_{R_i}^B R) + \\
& + L_{\delta L} \delta L + L_{\delta V} \delta V,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

- równanie pochylenia

$$\begin{aligned}
& J_y \dot{Q} - (J_z - J_x) R P - J_{xy} (\dot{P} + Q R) - J_{yz} (\dot{R} - Q P) - J_{xz} (R^2 - P^2) - \\
& - S_x (\dot{W} + V P - U Q) + S_z (\dot{U} - R V + Q W) = -m_s g (z_c \sin \Theta + \\
& + x_c \cos \Theta \cos \Phi) - \sum_{i=1}^n m_{B_i} g (z_{B_i} \sin \Theta + x_{B_i} \cos \Theta \cos \Phi) + \\
& + T (z_T \cos \varphi_{T_z} \cos \varphi_{T_y} + x_T \cos \varphi_{T_z} \sin \varphi_{T_y}) - J_T \omega_T (R \cos \varphi_{T_z} \cos \varphi_{T_y} + \\
& + P \cos \varphi_{T_z} \sin \varphi_{T_y}) + \frac{1}{2} \rho S V_0^2 \left[-z_A (C_{x_a} \cos \beta \cos \alpha + C_{y_a} \sin \beta \cos \alpha - \right. \\
& - C_{z_a} \sin \alpha) + x_A (C_{x_a} \cos \beta \sin \alpha + C_{y_a} \sin \beta \sin \alpha + C_{z_a} \cos \alpha) + \\
& + c_a (-C_{m_{x_a}} \sin \beta + C_{m_{y_a}} \cos \beta) \left. \right] + \\
& + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n S_{B_i} \left[-z_{B_i} (C_{x_{B_i}} \cos \beta_{B_i} \cos \alpha_{B_i} + C_{y_{B_i}} \sin \beta_{B_i} \cos \alpha_{B_i} - \right. \\
& - C_{z_{B_i}} \sin \alpha_{B_i}) + x_{B_i} (C_{x_{B_i}} \cos \beta_{B_i} \sin \alpha_{B_i} + C_{y_{B_i}} \sin \beta_{B_i} \sin \alpha_{B_i} + \\
& + C_{z_{B_i}} \cos \alpha_{B_i}) + l_{B_i} (-C_{m_{x_{B_i}}} \sin \beta_{B_i} + C_{m_{y_{B_i}}} \cos \beta_{B_i}) \left. \right] +
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$+ M_Q \dot{Q} + \sum_{i=1}^n M_{Q_i}^B \dot{Q} + M_{\dot{W}} \dot{W} + M_{\alpha_{zH}} \alpha_{zH} + M_{\delta_H} \delta_H ,$$

- równanie odchylenia

$$\begin{aligned} J_z \dot{R} - (J_x - J_y) PQ - J_{zy} (\dot{Q} + RP) - J_{zx} (\dot{P} - RQ) - J_{xy} (P^2 - Q^2) + \\ + S_x (\dot{V} - WP + RU) - S_y (\dot{U} - RV + WQ) = m_s g (x_c \cos \Theta \sin \Phi + \\ + y_c \sin \Theta) + \sum_{i=1}^n m_{B_i} g (x_{B_i} \cos \Theta \sin \Phi + y_{B_i} \sin \Theta) + T (x_T \sin \varphi_{Tz} - \\ - y_T \cos \varphi_{Tz} \cos \varphi_{Ty}) + J_T \omega_T (Q \cos \varphi_{Tz} \cos \varphi_{Ty} - P \sin \varphi_{Tz}) + \\ + \frac{1}{2} \rho S V_0^2 [x_A (-C_{xa} \sin \beta + C_{ya} \cos \beta) + y_A (C_{xa} \cos \beta \cos \alpha + \\ + C_{ya} \sin \beta \cos \alpha - C_{za} \sin \alpha) - c_A (C_{mxa} \cos \beta \sin \alpha + C_{mya} \sin \beta \sin \alpha + \\ + C_{mza} \cos \alpha)] + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n S_{B_i} [x_{B_i} (-C_{xB_i} \sin \beta_{B_i} + C_{yB_i} \cos \beta_{B_i}) + \\ + y_{B_i} (C_{xB_i} \cos \beta_{B_i} \cos \alpha_{B_i} + C_{yB_i} \sin \beta_{B_i} \cos \alpha_{B_i} - C_{zB_i} \sin \alpha_{B_i}) - \\ - l_{B_i} (C_{mxB_i} \cos \beta_{B_i} \sin \alpha_{B_i} + C_{myB_i} \sin \beta_{B_i} \sin \alpha_{B_i} + C_{mzB_i} \cos \alpha_{B_i})] + \\ + N_P P + N_R R + \sum_{i=1}^n (N_{P_i}^B P + N_{R_i}^B R) + N_{\delta_v} \delta_v , \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie masa całkowita, momenty dewiacyjne, bezwładności i statyczne wyrażone są wzorami zawierającymi człony od podwieszeń [4].

- równanie obrotów silnika:

$$n_T = k_1 (Ma, \tau, \rho_H) \frac{n_{max} - n_0}{\delta_{T_{max}}} \delta_T , \quad (3.14)$$

- równanie ciągu silnika:

$$T = k_2 (Ma) \frac{T_{max} - T_0}{n_{max} - n_0} n_T , \quad (3.15)$$

- prędkość kątowna obrotów zespołu turbo-sprężarkowego:

$$\omega_T = \frac{2\pi n_T}{60} , \quad (3.16)$$

– związki kinematyczne prędkości kątowych:

$$\dot{\Theta} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (3.17)$$

$$\dot{\Phi} = P + Q \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta + R \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta, \quad (3.18)$$

$$\dot{\Psi} = (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \sec \Theta, \quad (3.19)$$

– związki kinematyczne prędkości liniowych:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= U \cos \Theta \cos \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + \\ &+ W(\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= U \cos \Theta \sin \Psi + V(\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \cos \Phi \cos \Psi) + \\ &+ W(\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \sin \Phi \cos \Psi), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\dot{z}_1 = -U \sin \Theta + V \sin \Phi \cos \Theta + W \cos \Phi \cos \Theta, \quad (3.22)$$

– wysokość lotu:

$$H = -z_1, \quad (3.23)$$

– prędkość postępową samolotu:

$$V_0^2 = U^2 + V^2 + W^2, \quad (3.24)$$

– kąt natarcia:

$$\alpha = \arctg \frac{W}{U}, \quad (3.25)$$

– kąt ślizgu:

$$\beta = \arcsin \frac{V}{V_0}, \quad (3.26)$$

– gęstość powietrza:

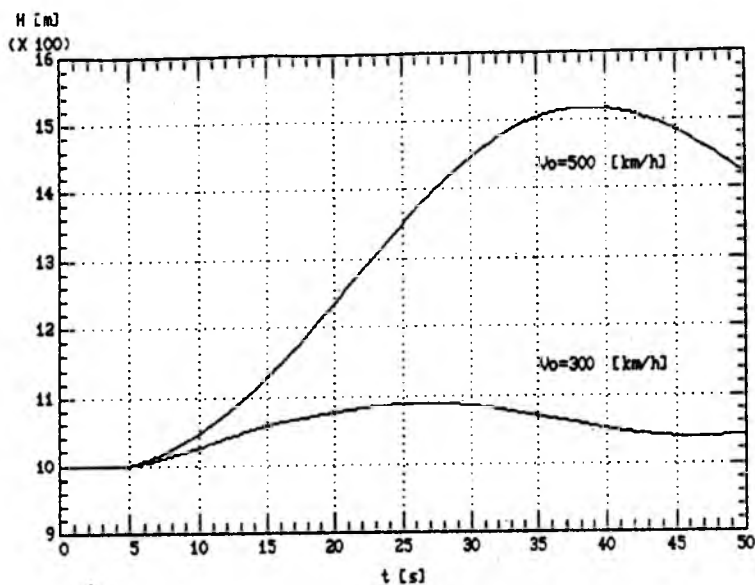
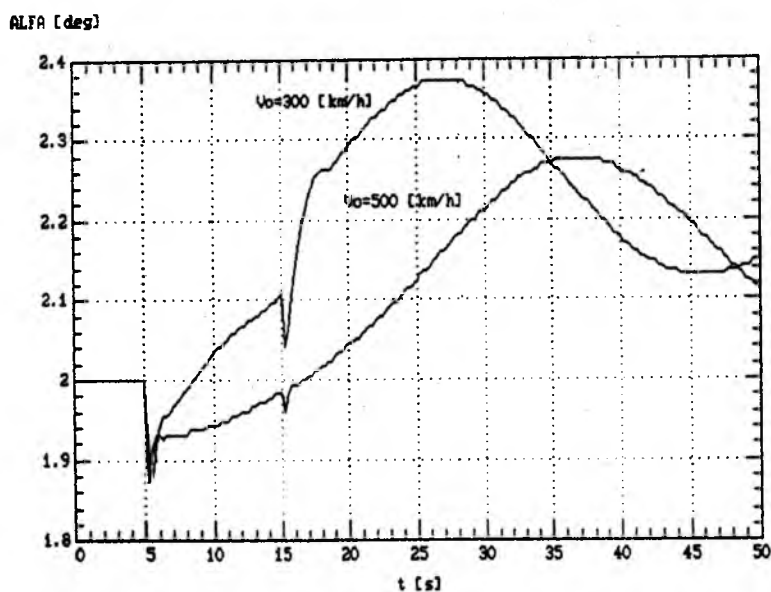
$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{z_1}{44300} \right). \quad (3.27)$$

4. Dynamika ruchu samolotu po zrzucie podwieszeń podczas wykonywania lotu ustalonego poziomego

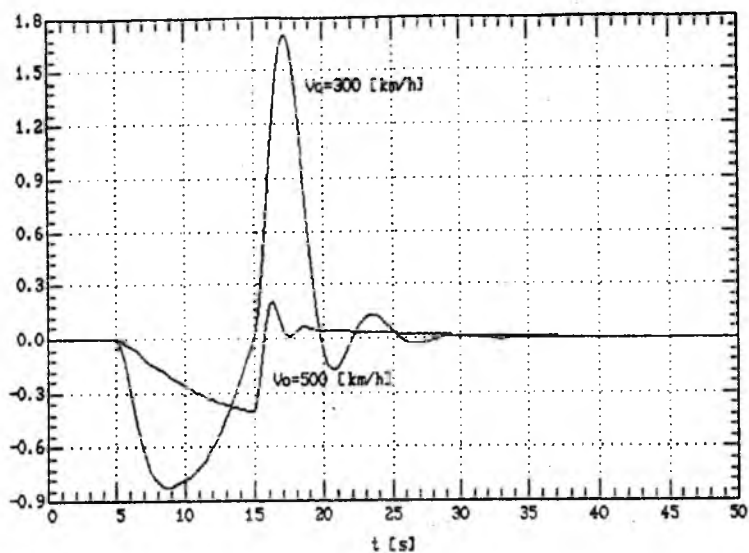
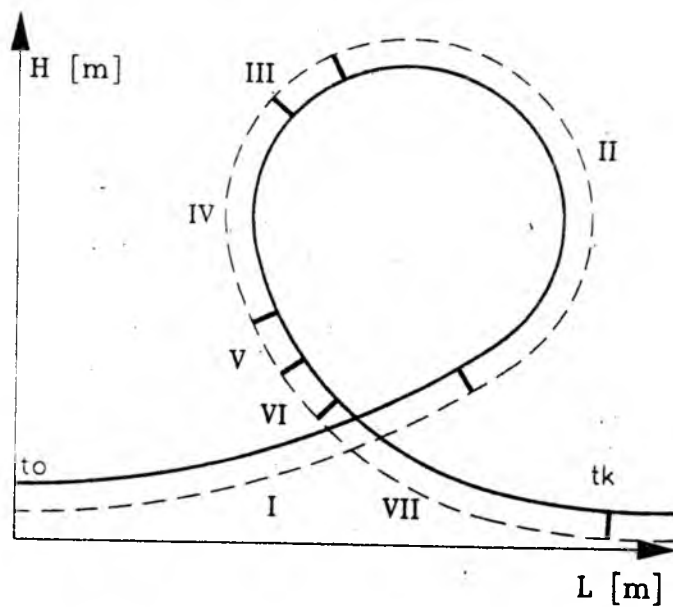
Założono, że samolot w pierwszym etapie wykonuje lot ustalony z prędkością V_0 . Wartości współczynników aerodynamicznych znajdują się dla danych warunków lotu z charakterystyk aerodynamicznych i częściowo z obliczeń. Obliczenia wykonano dla różnych warunków początkowych:

$$V_0 = 500[\text{km/h}], \quad V_0 = 300[\text{km/h}].$$

Zrzut podwieszeń odbywa się w dwóch etapach:

Rys. 6. Lot ustalony, poziomy; wykres wysokości lotu $H(t)$ Rys. 7. Lot ustalony, poziomy; wykres kąta natarcia $\alpha(t)$

BETA [deg]

Rys. 8. Lot ustalony, poziomy; wykres kąta ślizgu $\beta(t)$ 

Rys. 9.

- zrzut 1-go podwieszenia z lewego płata w 5 [s] lotu,
- zrzut 2-go podwieszenia z prawego płata w 15 [s] lotu.

Niektóre charakterystyczne wyniki przedstawiono na wykresach (rysunki 6 ÷ 8). Rys.6 obrazuje zmianę wysokości lotu, rys.7 i 8 obrazują zmianę kąta natarcia i ślizgu samolotu po zrzucie podwieszeń. Widać wyraźne ruchy oscylacyjne, które w przypadku kąta ślizgu β są silnie tłumione. Po zrzucie podwieszeń kąt natarcia przechodzi na wyższe wartości i ustala się po pewnym charakterystycznym czasie zależnym od prędkości początkowej lotu.

5. Dynamika ruchu samolotu po zrzucie podwieszeń podczas wykonywania pętli

Badanie dynamiki ruchu samolotu po zrzucie podwieszeń przeprowadzono na przykładzie pętli która stanowi jedną z figur akrobacji lotniczej.

Do symulacji przyjęto prawo sterowania, które jest dobrym przybliżeniem sposobu sterowania samolotem stosowanego w praktyce przez pilotów. Zmieniając parametry tego prawa można otrzymać rodzinę torów pętli, z której można wybrać optymalny tor spełniający określone kryteria. Przyjmujemy, że w chwili początkowej $t = t_0 = 0$ samolot wykonuje ustalony lot poziomy z prędkością V_0 i zrzut podwieszeń odbywa się w pierwszym odcinku lotu (rys.9). Sterowanie samolotem za pomocą zmiany współczynnika ciągu C_T i kąta wychylenia steru wysokości δ_H odbywa się w czasie od t_0 do t_k , to jest na całym torze pętli (rys.9). Przyjęto, że na poszczególnych odcinkach pętli funkcje sterujące zmieniają się liniowo lub są stałe. W związku z tym podstawowy tor ruchu samolotu w pętli podzielono na siedem odcinków:

I – współczynnik ciągu C_T i kąt wychylenia steru wysokości δ_H zmieniają się liniowo w czasie t_{z1} :

$$C_T = C_{Tp} + \frac{C_{Tk} - C_{Tp}}{t_{z1}} t \quad \text{dla } 0 < t < t_{z1}, \quad (5.1)$$

$$\delta_H = \delta_{Hp} + \frac{\delta_{Hk} - \delta_{Hp}}{t_{z1}} t$$

II – kąt wychylenia steru wysokości i położenie dźwigni sterowania silnikami nie zmieniają się:

$$C_T = C_{Tp} \quad \text{dla } t_{z1} \leq t \leq t_{\Theta=195^\circ}, \quad (5.2)$$

$$\delta_H = \delta_{Hk}$$

III – współczynnik ciągu zmienia się w czasie t_{z1} przy stałym kącie wychylenia steru wysokości:

$$C_T = C_{Tk} + \frac{C_{Tk} - C_{Tp}}{t_{z1}} \left((t_{\theta=195^\circ} + t) \right) \quad \text{dla } t_{\theta=195^\circ} \leq t \leq t_{\theta=195^\circ} + t_{z1}, \quad (5.3)$$

$$\delta_H = \delta_{Hk}$$

IV – kąt wychylenia steru wysokości i położenia dźwigni sterowania silnikiem nie zmieniają się:

$$C_T = C_{Tp} \quad \text{dla } t_{\theta=195^\circ} + t_{z1} \leq t < t_{\theta=300^\circ}, \quad (5.4)$$

$$\delta_H = \delta_{Hk}$$

V – współczynnik ciągu zmienia się w czasie t_{z2} przy stałym kącie wychylenia steru wysokości:

$$C_T = C_{Tp} + \frac{C_{Tk} - C_{Tp}}{t_{z2}} \left((t_{\theta=300^\circ} + t) \right) \quad \text{dla } t_{\theta=300^\circ} \leq t \leq t_{\theta=300^\circ} + t_{z2}, \quad (5.5)$$

$$\delta_H = \delta_{Hk}$$

VI – kąt wychylenia steru wysokości i położenia dźwigni sterowania silnikiem nie zmieniają się:

$$C_T = C_{Tk} \quad \text{dla } t_{\theta=300^\circ} + t_{z2} \leq t < t_{\theta=330^\circ}, \quad (5.6)$$

$$\delta_H = \delta_{Hk}$$

VII – współczynnik ciągu i kąt wychylenia steru wysokości zmieniają się:

$$C_T = C_{Tk} - (C_{Tk} - C_{Tp}) \frac{\theta - \theta_z}{\Delta\theta}, \quad (5.7)$$

$$\delta_H = \delta_{Hk} - (\delta_{Hk} - \delta_{Hp}) \frac{\theta - \theta_z}{\Delta\theta},$$

$$\text{dla } t_{\theta=330^\circ} \leq t \leq t_{\theta=360^\circ},$$

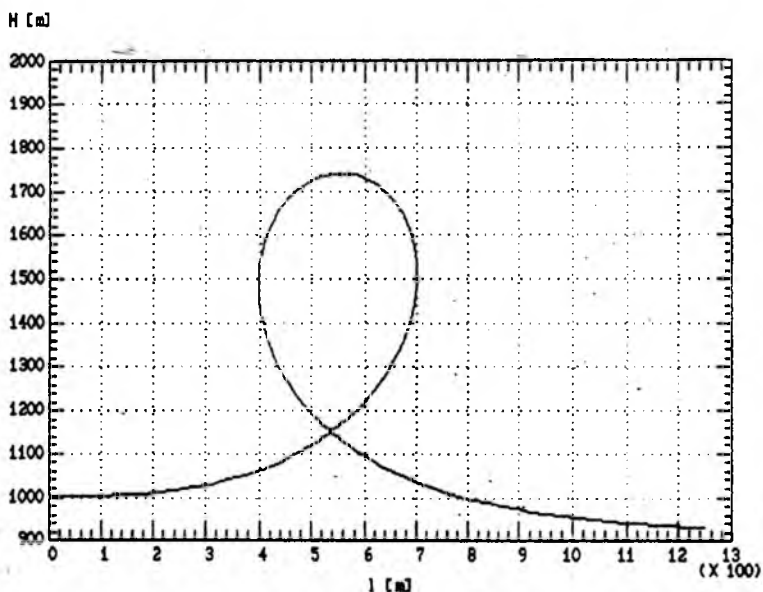
gdzie:

$$\Delta\theta = 360^\circ - \theta_z = 30^\circ,$$

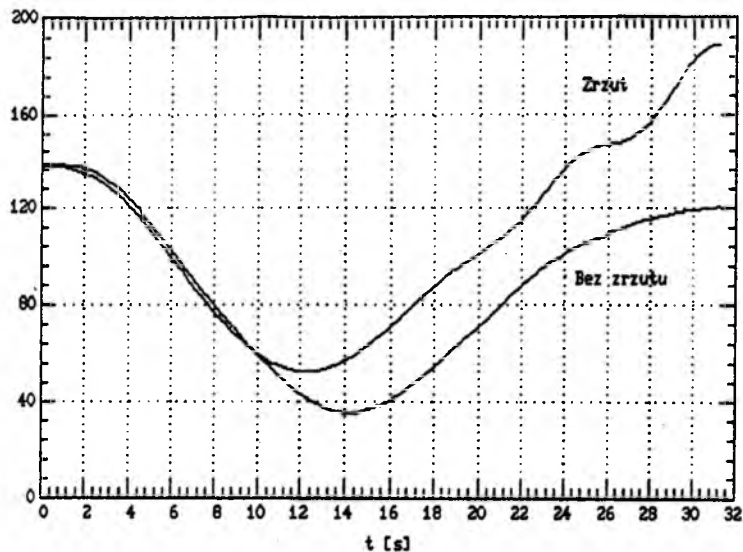
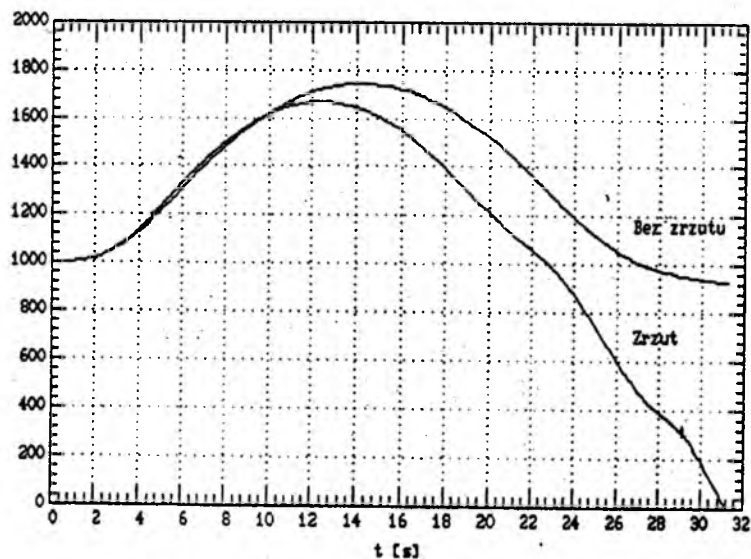
$$t_{\theta=360^\circ} = t_k.$$

- $\theta_z = 330^\circ$ – kąt pochylenia samolotu, przy którym należy rozpocząć wyprowadzanie samolotu do lotu poziomego,
 t_{z1} – przedział czasu, w którym współczynnik ciagu i kąt wychylenia steru wysokości zmieniają się liniowo na poszczególnych odcinkach toru pętli,
 t_{z2} – przedział czasu, w którym ciąg zmienia się od wartości eksploatacyjnej do maksymalnej na odcinku V pętli,
 C_{Tk} – maksymalna wartość współczynnika ciagu,
 δ_{Hk} – maksymalna wartość wychylenia steru wysokości przyjęta dla rozpatrywanej pętli.

Na wykresach 10 ÷ 12 przedstawiono wyniki obrazujące zmianę niektórych parametrów lotu samolotu w pętli bez zrzutu podwieszeń i ze zrzutem podwieszeń w pierwszym etapie lotu.



Rys. 10. Pętla; wykres toru lotu samolotu $H(t)$; $\delta_{Hp} = 2$ [deg], $\delta_{Hk} = 8$ [deg], $V_{wpr} = 500$ [km/h]

V_0 [m/s]Rys. 11. Pętla; wykres prędkości lotu $V_0(t)$ H [m]Rys. 12. Pętla; wykres zmiany wysokości lotu samolotu $H(t)$

Literatura

1. ARNOLD W.I., 1981, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa
2. BIAŁKOWSKI G., 1975, *Mechanika klasyczna*, PWN, Warszawa
3. BOLDAK R., 1981, *Numeryczne modelowanie dynamiki figur akrobacji lotniczej*, Rozprawa doktorska, WAT
4. DŻYGADŁO W., 1986, *Analiza dynamiki samolotu niesterowanego po symetrycznym zrzucie podwieszeń z zastosowaniem symulacji numerycznej*, Praca magisterska, PW Wydział MEiL
5. ETKIN B., 1972, *Dynamics of atmospheric flight*, John Wiley & Sons, New York
6. FISZDON W., 1961, *Mechanika lotu, tom I i II*, PWN, Warszawa
7. GUTOWSKI R., 1971, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa
8. MARTIN D.W., 1958, *Runge-Kutta methods for integrating differential equations on high speed digital computers*, The Computer Journal, 1, 3
9. MARYNIAK J., 1985, *Ogólny model symulacji samolotu*, Sprawozdanie nr.140/85
10. MARYNIAK J., 1985, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, WPW – prace naukowe
11. MARYNIAK J., TARKA B., 1978, *Modelowanie matematyczne ruchu zasobnika w pobliżu nosiciela*, Konferencja naukowo-techniczna, ITWL
12. RUBINOWICZ W., 1971, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa

WPROWADZANIE CZYNNE SAMOLOTU W KORKOCIĄG¹

WIESŁAW J. J. MICHAŁSKI

MARIA A. ZŁOCKA

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Korkociąg jest figurą akrobacyjną, w której lot samolotu odbywa się na pokazowych kątach natarcia. Można wyróżnić w niej trzy fazy. Pierwsza – wprowadzenie w korkociąg – zaczyna się od przepadnięcia samolotu i charakteryzuje dużymi zmianami parametrów lotu. Rośnie kąt natarcia, pojawia się prędkość kątowna, prędkość środka masy zmienia kierunek z poziomego na prawie pionowy w dół. Drugą fazą są zwitki. Ostatnią – wyprowadzenie samolotu z korkociągu. Wszystkie fazy często charakteryzuje częściowa utrata sterowności i niestateczność ruchu.

Wiele prac z dynamiki lotu poświęcono analizie korkociągu samolotu [1,7,8,9,10,17,19,21,22,23]. Część z nich dotyczy badań korkociągu sterowanego. Wśród nich znalazły się badania prowadzone wspólnie przez autorów, podejmujące nie tylko zadanie analizy, lecz przede wszystkim – syntezy. Objęły one dotychczas wszystkie fazy figury, więc zarówno sterowanie samolotem przed wejściem w korkociąg [18,20] i podczas jego wykonywania [17,21], jak i sterowanie wyprowadzaniem samolotu z korkociągu [19].

Sterowanie samolotem przed wejściem w korkociąg może mieć dwa różne cele. Może służyć zapobieganiu temu wejściu lub spowodowaniu wykonania figury.

Uniknięcie niezamierzonego wejścia w korkociąg polega na zapobieganiu przepadaniu samolotu. Można to osiągnąć dzięki sprzężeniom między lotkami a sterem kierunku [6] lub poprzez sterowanie automatyczne: stabilizujące lot na dużych kątach natarcia [8,18,20] lub destabilizujące drugą fazę figury [7].

Na samolotach szkolno-treningowych pilot musi wykonać określoną liczbę regularnych zwitek, więc jest to przypadek, w którym sterowanie samolotem przed wejściem w korkociąg ma na celu spowodowanie wykonania figury.

Klasyczne wprowadzenie w korkociąg odbywa się poprzez maksymalne wychylenie steru kierunku w stronę zamierzonego obrotu i maksymalne wychylenie do

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie" .

góry steru wysokości. Lotki nie są wychylane. W takim położeniu powierzchnie sterowe pozostają w drugiej fazie korkociagu, w czasie której wykonywane są zwitki. Ruch w drugiej fazie może być ustalony. Ostatnia faza następuje po maksymalnym wychyleniu steru kierunku w stronę przeciwną do wykonywanego obrotu. Po wyhamowaniu ruchu obrotowego ster wysokości jest opuszczany maksymalnie do dołu i – po trwałym przejściu samolotu na podkrytyczne kąty natarcia – ustawiany z kątem wychylenia, na ogół, zerowym.

Wykonanie określonej liczby regularnych zwitek, przy częściowej sterowności i niestateczności ruchu, jest zadaniem bardzo trudnym, a czasami niemożliwym do zrealizowania. Pożądane byłoby wtedy zastosowanie sterowania automatycznego. Możliwe są dwa rozwiązania.

Jedno z nich, to ograniczenie się do poprawienia wykonania zwitek. W tym przypadku sterowanie automatyczne jest włączane po wejściu samolotu w korkociąg. Zadanie to może wykonać stabilizator drugiej fazy tej figury akrobacyjnej.

Drugim rozwiązaniem problemu jest sterowanie automatyczne wprowadzeniem samolotu w korkociąg i wykonaniem żądanej liczby stabilizowanych zwitek. W tym przypadku oczekuje się, że w porównaniu do ruchu sterowanego klasycznie zostanie skrócony czas wprowadzenia w korkociąg i zmniejszona strata wysokości lotu.

Pierwsze rozwiązanie zostało sprawdzone dla zlinearyzowanego modelu samolotu [17], dla którego prawa sterowania wyprowadzono na podstawie teorii sterowania optymalnego z kwadratowym wskaźnikiem jakości [3] oraz dla modelu nieliniowego, do którego zastosowano sterowanie suboptymalne [21].

Drugie rozwiązanie jest przedmiotem niniejszej pracy. Wyniki uzyskano stosując sterowanie suboptymalne niestandardowe modelem nieliniowym [por. 19], przewidując użycie techniki sterowania czynnego [11,16].

Technika sterowania czynnego jest znana z wielu zalet [4,11,14,16]. W przypadku samolotu, polega ona na zastosowaniu systemu automatycznego sterowania lotem między innymi do jednoczesnego poruszania wieloma powierzchniami sterowymi w celu poprawienia dynamicznych charakterystyk obiektu [11]. Z jednej strony, wprowadza to w sposób naturalny sprzężenia dynamiczne między organami sterowania. Z drugiej zaś, umożliwia zastąpienie człowieka w zadaniach wyjątkowo trudnych [19]. Użycie techniki sterowania czynnego wiąże się z wprowadzeniem szybkich układów liczących i wykonawczych oraz wyznaczeniem praw sterowania w postaci umożliwiającej skorzystanie z tej techniki. Wymaga to zastosowania z jednej strony nowych rozwiązań konstrukcyjnych (fly-by-wire, fly-by-light), z drugiej zaś – nowoczesnej teorii sterowania.

Z przeprowadzonych badań wynika, że dynamika układów sterowania i sposób jej uwzględnienia mają istotny wpływ na model procesu przejściowego [14,15]. Nawet w przypadku układów sterowania czynnego, które działają bardzo szybko.

Toteż w niniejszej pracy uwzględniono także dynamikę serwomechanizmów.

2. Model samolotu sterowanego

Przyjęto następujące założenia (por. [5,12,18,20,22,23]):

- masa i momenty bezwładności samolotu są stałe,
- inercjalny układ odniesienia jest związany z ziemią,
- samolot posiada pionową płaszczyznę symetrii geometrycznej i masowej,
- siła ciągu leży w płaszczyźnie symetrii,
- początek samolotowego układu odniesienia, sztywno związanego z samolotem, pokrywa się ze środkiem masy samolotu,
- samolot jest nieodkształcalny,
- obowiązuje aerodynamika quasi-stacjonarna,
- sterowanie lotem odbywa się przez zmianę położenia steru wysokości, lotek lub steru kierunku,
- wychylenie powierzchni sterowych jest ograniczone,
- ograniczona jest również prędkość zmiany położenia powierzchni sterowych.

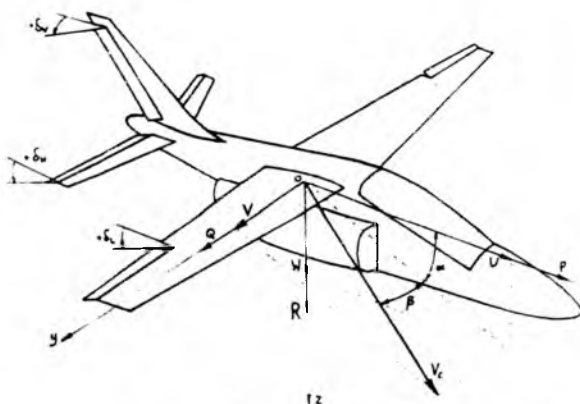
Równania ruchu samolotu – wyprowadzone w samolotowym układzie odniesienia $Oxyz$ (rys.1) po uwzględnieniu powyższych założeń - są nieliniowe i można je przedstawić w postaci wektorowej [17÷23]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{x} &= [U, V, W, P, Q, R, \Theta, \Phi]^T, \\ \mathbf{u} &= [\delta_H, \delta_L, \delta_V]^T,\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie:

- $\mathbf{x}$ - wektor stanu,
- $\mathbf{u}$ - wektor sterowania.

Trzy pierwsze współrzędne wektora stanu są składowymi wektora prędkości, trzy następne – składowymi wektora prędkości kątowej, dwie ostatnie – kątami: pochylenia i przechylenia. Współrzędne wektora sterowania oznaczają kolejno kąty wychyleń: steru wysokości, lotek i steru kierunku.



Rys. 1. Przyjęty układ współrzędnych

O składowych wektora prawej strony równania (2.1) założono, że są funkcjami ciągłymi wraz z pierwszymi pochodnymi ze względu na współrzędne wektora stanu i wektora sterowania. Składowe te określone są wzorami:

- dla ruchu postępowego

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x - mg \sin \theta + T_x \\ F_y + mg \cos \theta \sin \Phi \\ F_z + mg \cos \theta \cos \Phi + T_z \end{bmatrix} - J_\Omega \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

- dla ruchu obrotowego

$$[f_4, f_5, f_6]^T = J_B^{-1} \mathbf{M} + J_B^{-1} \mathbf{M}_T - J_B^{-1} J_\Omega J_B [P, Q, R]^T, \quad (2.2)'$$

- dla związków kinematycznych

$$f_7 = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad f_8 = P + Q \sin \Phi \operatorname{tg} \theta + R \cos \Phi \operatorname{tg} \theta, \quad (2.2)''$$

w których:

- $\mathbf{F}$ - siła aerodynamiczna,
- $\mathbf{M}$ - moment aerodynamiczny,
- T - siła ciągu,
- $\mathbf{M}_T$ - moment pochodzący od układu napędowego,
- J_B - macierz momentów bezwładności,
- J_Ω - macierz prędkości kątowej,
- m - masa samolotu,
- g - przyspieszenie ziemskie.

Macierze mają postać następującą:

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}, \quad J_B = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Jak widać, prawe strony równania (2.1) – wyspecyfikowane powyżej wzorami (2.2) – są nieliniowymi funkcjami wektora stanu, masy i momentów bezwładności. Ponadto nieliniowości występują także we wzorach na siły i momenty. Składowe wektorów sił i momentów są bowiem nieliniowymi funkcjami współrzędnych wektora stanu i wektora sterowania [5,12].

Układ równań (2.1) uzupełniono o związki definiujące kąt natarcia α i kąt ślizgu β :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctg \frac{W}{U}, & -\pi \leq \alpha \leq \pi, \\ \beta &= \arcsin \frac{V}{V_c}, & -\pi \leq \beta \leq \pi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie V_c – prędkość całkowita samolotu, dana wzorem:

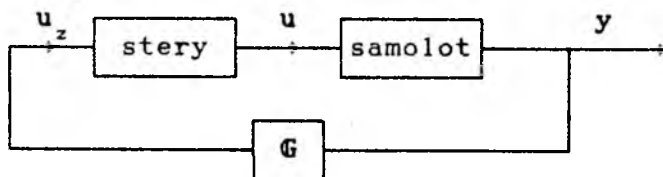
$$V_c = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2},$$

oraz składową pionową Ω_p prędkości kątowej:

$$\Omega_p = -P \sin \Theta + Q \sin \Phi \cos \Theta + R \cos \Phi \cos \Theta. \quad (2.4)$$

Uwzględniono również ograniczenia składowych δ_i wektora sterowania, spełniając warunek:

$$\delta_{i,min} \leq \delta_i \leq \delta_{i,max}, \quad (i = H, L, V). \quad (2.5)$$



Rys. 2. Sterowanie czynne z ograniczeniami na prędkości wychyleń powierzchni sterowych

Prędkość wychylania powierzchni sterowych jest także ograniczona, co uwzględniono poprzez umieszczenie modelu sterów w schemacie sterowania czynnego (rys.2).

Dynamikę serwomechanizmów zamodelowano za pomocą członów opóźniających pierwszego rzędu [14,15]:

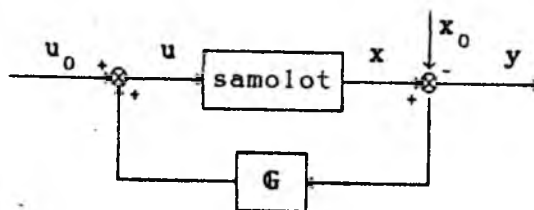
$$T\dot{u} + u = u_z, \quad (2.6)$$

gdzie:

- T - macierz stałych czasowych,
- u_z - wektor wartości zadanych na wejściach serwomechanizmów.

3. Sterowanie suboptymalne niestandardowe

Idea sterowania suboptymalnego (rys.3) układem nieliniowym (2.1) polega na tym, że dla tegoż układu, zlinearyzowanego wokół stanu równowagi (x_0, u_0) , wyznacza się sterowanie optymalne, które wykorzystuje się następnie dla układu wyjściowego (2.1). Zwykle jednak zakłada się milcząco, że parametry układu nieliniowego i liniowego są zbliżone. W przypadku wprowadzania samolotu w korkociąg założenie to nie jest spełnione. Różnica między stanem lotu poziomego, a stanem korkociągu jest bowiem znaczna. Tym nie mniej można postawić pytanie: jak zachowa się samolot, gdy sterowanie optymalne, wyznaczone dla modelu zlinearyzowanego względem korkociągu ustalonego, zostanie zastosowane do lotu poziomego? Takie podejście można uzasadnić tym, że sterowanie optymalne zsyntezowane prowadzi do układu asymptotycznie statecznego [2]. Wobec tego można mieć nadzieję, iż realizowane sterowanie spowoduje dążenie także układu nieliniowego do stanu, dla którego zostało wyznaczone. Ten sposób postępowania, nazywany przez autorów sposobem niestandardowym, został z powodzeniem sprawdzony dla przypadku wprowadzania samolotu z korkociągu [19].



Rys. 3. Sterowanie suboptymalne samolotem

Prawo sterowania wyprowadzono na podstawie teorii sterowania optymalnego liniowego z kwadratowym wskaźnikiem jakości [3]. Jako funkcjonal minimalizo-

wany w zadaniu poszukiwania sterowania optymalnego przyjęto wskaźnik poniższy:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \right] dt. \quad (3.1)$$

Warto tu przypomnieć, że optymalność nie zawsze oznacza spełnienie życzeń inżynierskich, toteż sformułowanie dodatkowych wymagań mogłoby prowadzić do konieczności modyfikacji parametrycznej lub strukturalnej powyższego wskaźnika jakości [13].

Wzór na sterowanie optymalne $\mathbf{u}^0$ – wyznaczone dla układu liniowego, otrzymanego przez linearyzację nieliniowego układu (2.1) wokół stanu równowagi $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ – ma, przy wskaźniku (3.1), postać (por. rys.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{G} \mathbf{y}, \\ \mathbf{G} &= -\mathbf{B}^T \mathbf{P}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Macierz $\mathbf{P}$ jest symetryczna, dodatnio określona i jest rozwiązaniem równania algebraicznego typu Riccatiego:

$$\mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad (3.3)$$

gdzie $\mathbf{I}$ – macierz jednostkowa. Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, zawierające współczynniki równań zlinearyzowanych, są zdefiniowane następująco [17÷21,23]:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.4)$$

Obecność serwomechanizmów (rys.2) uwzględniono przyjmując, że wyznaczone sterowanie optymalne (3.2), podlegające ograniczeniom (2.5) podane jest na wejście układu sterującego (2.6). Równania (2.1) i (2.6) są wtedy równaniami ruchu samolotu sterowanego suboptymalnie, z uwzględnieniem dynamiki serwomechanizmów.

4. Symulacja numeryczna

Obliczenia wykonano dla samolotu szkolno-treningowego o masie $m = 1550$ kg, polu powierzchni nośnej $S = 12.28 \text{ m}^2$ i rozpiętości $b = 8$ m. Samolot ten, sterowany klasycznie wchodzi w korkociąg po 7 s od początku manewru wprowadzania. Czas jednej zwitki wynosi około 3 s. Ruch jest niestateczny. Jedną z wartości własnych macierzy $\mathbf{A}$ (3.4) jest dodatnia zarówno dla lotu poziomego jak i korkociagu ustalonego (druga faza figury).

Syntezę regulatora wykonano dla korkociagu ustalonego o kącie natarcia $\alpha = 0.897$ rd, kącie ślizgu $\beta = -0.058$ rd, prędkości lotu $V_c = 41$ m/s, prędkości katowej $\Omega = 1.985$ rd/s i wysokości lotu $H = 1672$ m.

Symulację przeprowadzono dla czterech konfiguracji samolotu: sterowanego klasycznie (konfiguracja A0), sterowanego suboptymalnie bez ograniczeń na prędkości zmiany położenia powierzchni sterowych (konfiguracja B) i sterowanego suboptymalnie z ograniczeniami na te prędkości, dla dwóch stałych czasowych – 0.2 s (konfiguracja C) i 0.1 s (konfiguracja D).

Na wykresach (rys.4 ÷ 12) przedstawiono – dla poszczególnych konfiguracji – wyniki symulacji wybranych parametrów lotu: kąta natarcia, kąta ślizgu, prędkości katowej całkowitej i prędkości katowej pionowej, a także odpowiadające im wychylenia powierzchni sterowych: steru wysokości (DH), steru kierunku (DV) i lotek ($D\bar{L}$).

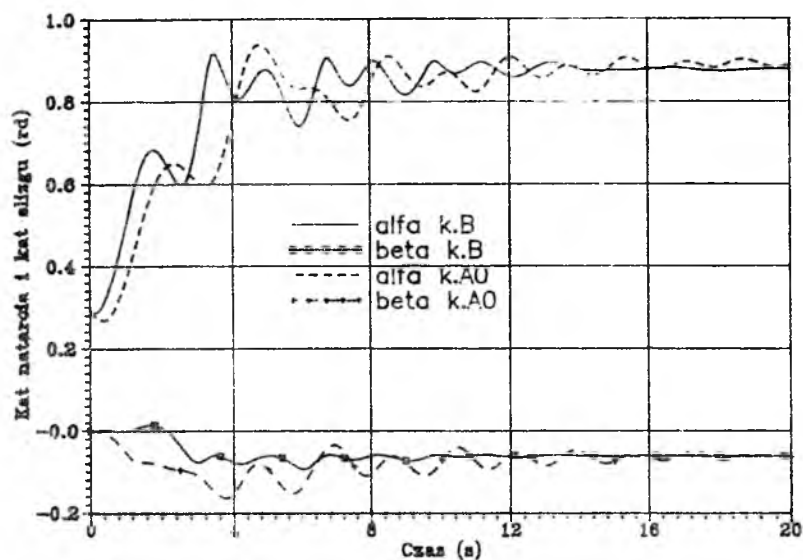
5. Wnioski

W zwiłkach ruchu niestabilizowanego oś korkociagu ulega wahaniom. Wi-doczne jest to na wykresach przedstawiających kąt natarcia, kąt ślizgu i prędkości katowe. Regulator suboptymalny – w przypadku ograniczeń tylko na wychylenia powierzchni sterowych lub ograniczeń na wychylenia i na prędkości wychyleń powierzchni sterowych z odpowiednio małą stałą czasową reakcji serwomechanizmów – szybciej wprowadza samolot w korkociąg i stabilizuje zwiłki korkociagu niż to ma miejsce podczas sterowania klasycznego. Jednak zbyt słabe ograniczenie na wspomniane prędkości sprawia, że regulator wymusza większe wahania niż wahania występujące w locie ze sterowaniem klasycznym.

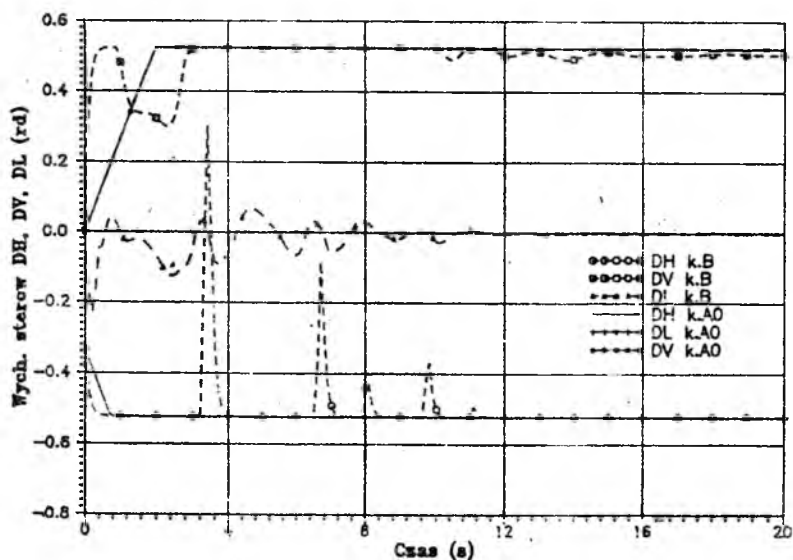
W przyszłości pożądane byłoby:

- sformułowanie kryteriów oceny własności wykonywanej figury w odniesieniu do badań symulacyjnych (analogicznie do kryteriów dotyczących prób w locie, jak na przykład żądanie niemożliwości doprowadzenia do korkociagu niesterownego po dowolnym użyciu sterów), kryteria powinny dotyczyć zarówno samego wykonania korkociagu jak i bezpieczeństwa;
- przeprowadzenie badań modelu matematycznego korkociagu samolotu sterowanego czynnie, w celu określenia jakim zmianom ulega zbiór uzyskanych rozwiązań w wyniku możliwych zmian zbioru sterowań dopuszczalnych;
- przeprowadzenie badań symulacyjnych w stanach awaryjnych.

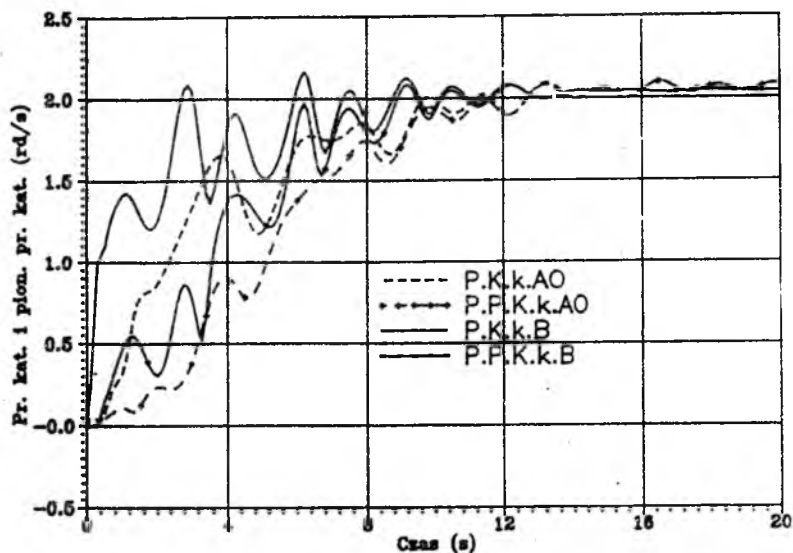
Badania zrealizowano w ramach projektu Nr 309559101 finansowanego w latach 1991-1992 przez Komitet Badań Naukowych.



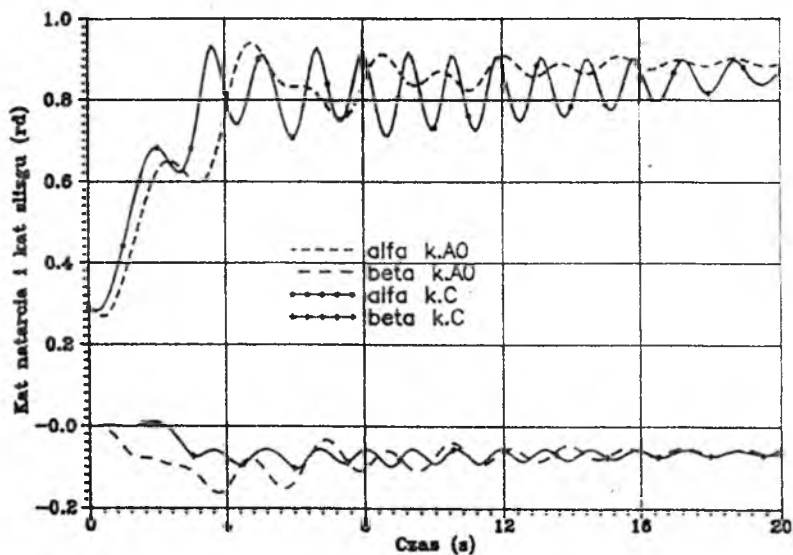
Rys. 4. Kąt natarcia i kąt ślizgu samolotu sterowanego klasycznie (konfiguracja A0) i sterowanego suboptymalnie z ograniczeniem na wychylenia powierzchni sterowych (konfiguracja B)



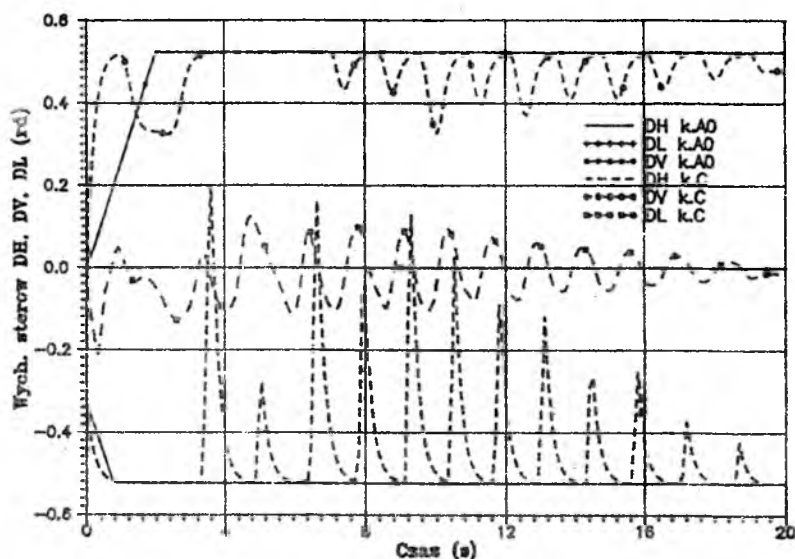
Rys. 5. Wychylenia steru wysokości DH, lotek DL, steru kierunku DV (konfiguracja A0 i konfiguracja B)



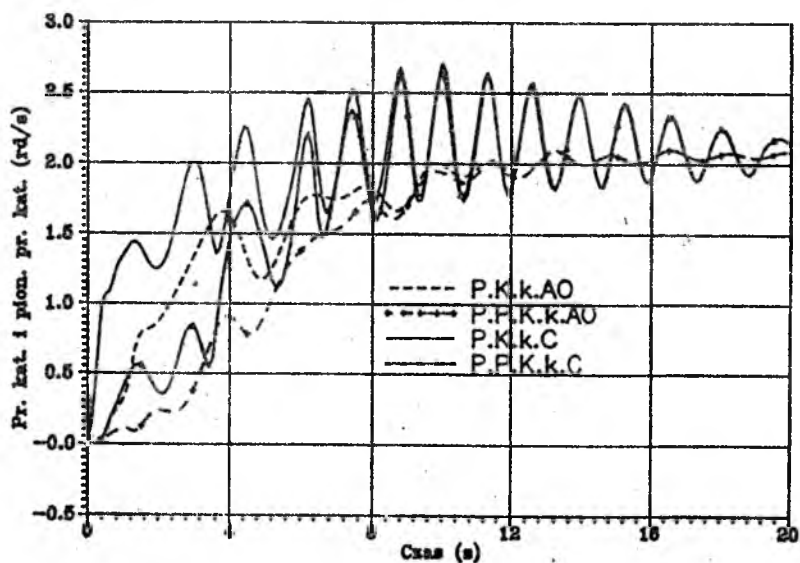
Rys. 6. Prędkość kątowna Ω i pionowa prędkość kątowna Ω_p (konfiguracja A0 i konfiguracja B)



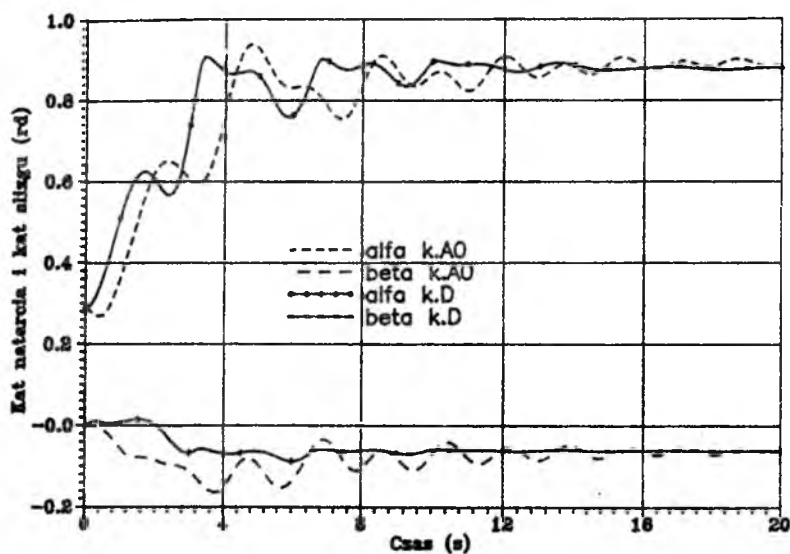
Rys. 7. Kąt natarcia i kąt ślizgu samolotu sterowanego klasycznie (konfiguracja A0) i sterowanego suboptymalnie z ograniczeniem na wychylenia i na prędkości wychyleń powierzchni sterowych z za dużą stałą czasową (konfiguracja C)



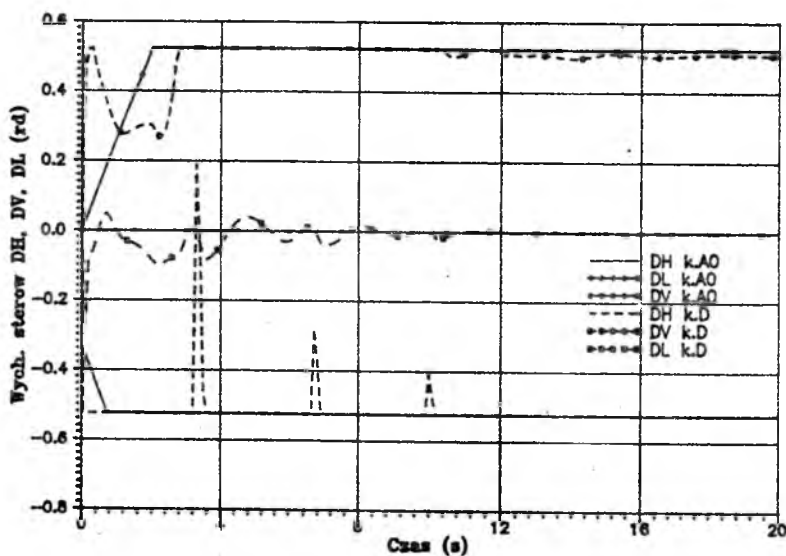
Rys. 8. WychYLENIA steru wysokości DH , lotek DL , steru kierunku DV (konfiguracja A0 i konfiguracja C)



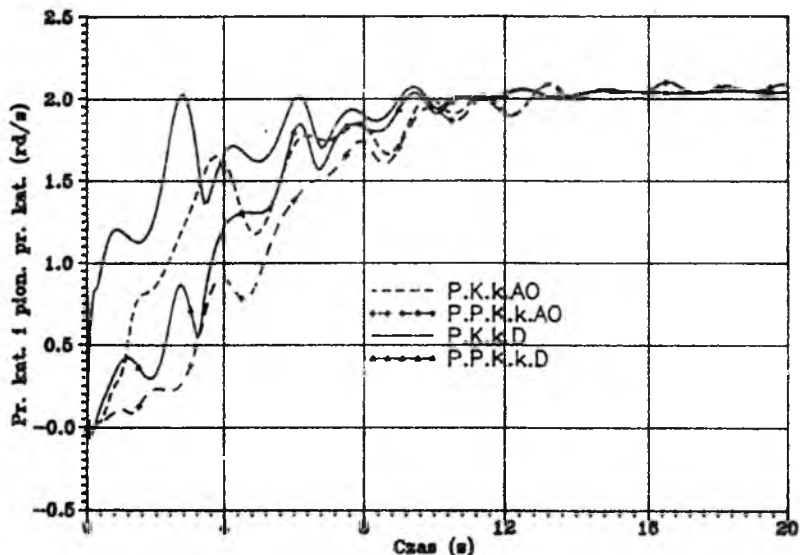
Rys. 9. Prędkość kątowna Ω i pionowa prędkość kątowna Ω_p (konfiguracja A0 i konfiguracja C)



Rys. 10. Kąt natarcia i kąt ślizgu samolotu sterowanego klasycznie (konfiguracja A0) i sterowanego suboptymalnie z ograniczeniem na wychylenia i na prędkości wychyleń powierzchni sterowych (konfiguracja D)



Rys. 11. Wychylenia steru wysokości DH , lotek DL , steru kierunku DV (konfiguracja A0 i konfiguracja D)



Rys. 12. Prędkość katowa Ω i pionowa prędkość katowa Ω_p (konfiguracja A0 i konfiguracja D)

Literatura

1. ANGLIN E.L., 1977, *Recent research on aerodynamic characteristics of fighter configurations during spins*, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Florida, 416
2. ASTRÖM K.J., 1970, *Introduction to stochastic control theory*, Academic Press, Inc., New York
3. ATHANS M., FALB P.L., 1966, *Optimal control: an introduction to the theory and its applications*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Przekł. pol., 1969, *Sterowanie optymalne. Wprowadzenie do teorii i jej zastosowania*, WNT, Warszawa
4. BARFIELD A.F., D'AZZO J.J., 1984, *Multivariable control laws for the AFTI/F-16*, AIAA Paper No.237, 1-15, Przekł.ros., 1985, *Mnogosujaznoe upravlenie samoletom AFTI/F-16*, Avjastroenie 16, 32-43
5. BLAKELOCK J.H., 1965, *Automatic control of aircraft and missiles*, J.Wiley & Sons, Inc., New York
6. BROUSSARD J.R., STENGEL R.F., 1977, *Stability of the pilot-aircraft system in maneuvering flight*, Journal of Aircraft, 14, 10, 959-965, Przekł. ros., 1978, *Ustojčivost' sistemy letčik-samoleť v manevrennom polete*, Aviastroenie, 25, Moskva, 26-39
7. GILBERT W.P., LIBBEY CH.E., 1972, *Investigation of an automatic spin prevention system for fighter airplanes*, NASA TN D-6670, Washington

8. GILBERT W.P., NGUYEN L.T., VAN GUNST R.W., 1976, *Simulator study of the effectiveness of an automatic control system designed to improve the high-angle-of-attack characteristics of a fighter airplane*, NASA TN D-8176, Washington
9. LANGHAM T.F., 1978, *Correlation of experimental and theoretical steady-state spinning motion for a current fighter airplane using rotation-balance aerodynamic data*, Col.Tech.Pap., AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, California, 325
10. MARYNIAK J., BLAJER W., 1983, *Numeryczna symulacja korkociągu samolotu*, Mech. Teoret. i Stos., 21, 2-3, PWN, 481-492
11. McLEAN D., 1978, *Gust-alleviation control systems for aircraft*, Proceedings IEE, 125, 675-685
12. McRUER D., ASHKENAS I., GRAHAM D., 1973, *Aircraft dynamics and automatic control*, Princeton University Press, Princeton
13. MICHALSKI W.J.J., PIETRUCHA J.A., 1989, *Kształowanie własności dynamicznych poprzez modyfikacje kwadratowego wskaźnika jakości*, Zb.Ref. XXVIII Symp. "Modelowanie w mechanice", PTMTiS, Beskid Śląski, 259-264
14. MICHALSKI W.J.J., PIETRUCHA J.A., 1990, *Model dynamiki serwomechanizmów do sterowania czynnego ruchem krótkookresowym samolotu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mechanika, 99, Gliwice, 253-260
15. MICHALSKI W.J.J., PIETRUCHA J.A., 1990, *The role of servomechanisms dynamics model in control problem of rigid-aircraft oscillations*, Abstracts of XIVth Symposium on Vibrations in Physical Systems, No.56, Technical University of Poznań & Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, Poznań - Błażejewko, 149-150
16. MICHALSKI W.J.J., PIETRUCHA J.A., 1990, *Sterowanie czynne własnościami dynamicznymi samolotu nieodkształcalnego*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 28, 3-4, PWN, Warszawa, 333-351
17. MICHALSKI W.J.J., ZŁOCKA M., 1990, *Control of the spinning aircraft oscillations*, Abstracts of XIVth Symposium on Vibrations in Physical Systems, No. 57, Technical University of Poznań & Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, Poznań - Błażejewko, 151-152
18. MICHALSKI W.J.J., ZŁOCKA M., 1990, *Symulacja stabilizowanego ruchu samolotu na dużych kątach natarcia*, Zbiór Ref. VI Symp. "Symulacja procesów dynamicznych", PTETiS, Polana Chocholowska, 187-194
19. MICHALSKI W.J.J., ZŁOCKA M., 1991, *Wyprowadzanie czynne samolotu z korkociągu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mechanika, 103, Gliwice, 165-168
20. MICHALSKI W.J.J., ZŁOCKA M., 1992, *Stabilizacja samolotu na dużych kątach natarcia*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 1154, Gliwice, 283-290
21. MICHALSKI W.J.J., ZŁOCKA M., 1992, *Stabilizacja czynna korkociągu samolotu*, Zbiór Ref. VII Symp. "Symulacja procesów dynamicznych", PTETiS, Polana Chocholowska, (w druku)
22. PATURSKI Z., ZŁOCKA M., 1985, *Symulacja numeryczna sterowanego ruchu samolotu*, Zbiór Ref. XXIV Symp. "Modelowanie w mechanice", PTMTiS, Beskid Śląski, 411
23. ZŁOCKA M., 1984, *Zastosowanie teorii wrażliwości do badania modelu przestrzennego ruchu samolotu*, Zbiór Ref. XXIII Symp. "Modelowanie w mechanice", PTMTiS, Beskid Śląski, 441

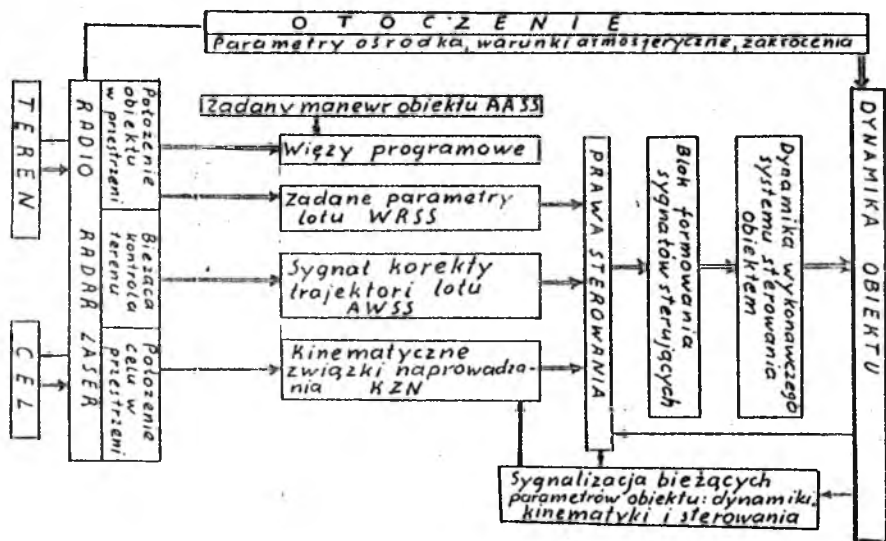
OGÓLNY MODEL MATEMATYCZNY STEROWANEGO SAMOŁOTU¹

JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W pracy przedstawiono ogólny model matematyczny sterowanych obiektów latających umożliwiający symulację numeryczną, obliczenia własności dynamicznych samolotów sterowanych przez pilota lub automatycznie. Szczególnie przy zastosowaniu systemów komputerowych, niezbędne jest postępowanie przedstawione w pracach [1÷8].



Rys. 1. Schemat blokowy sprzężeń własności dynamicznych obiektu z prawami sterowania, kontrolą terenu i celu

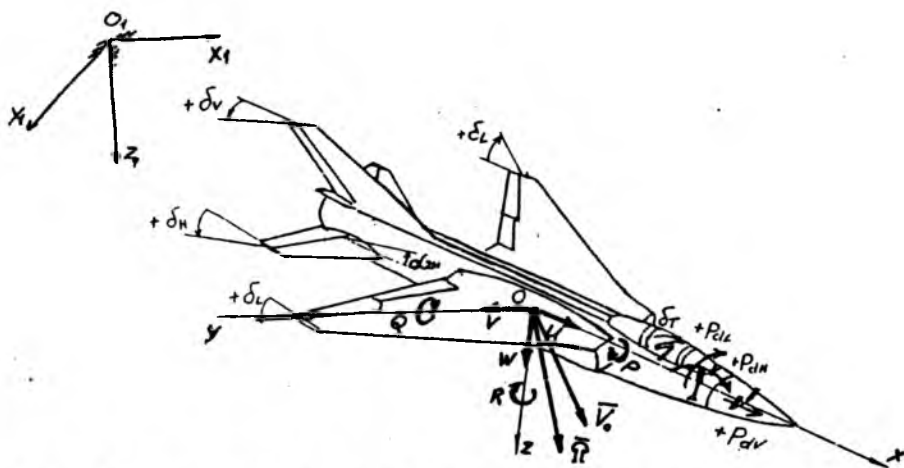
¹Referat wygłoszony na IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

Należy przyjąć właściwe modele fizyczne i opracować modele matematyczne opisujące własności dynamiczne sterowanego obiektu, wprowadzić odpowiednie prawa sterowania, związki kinematyczne naprowadzania i nawigacji, kinematykę i dynamikę systemu wykonawczego oraz sygnalizację bieżących parametrów położenia i ruchu obiektu lub program zadanej trajektorii z nałożonymi ograniczeniami (rys.1).

Otrzymany model matematyczny jest kompromisem między dokładnością analizy teoretycznej problemu fizycznego, skomplikowaniem równań matematycznych, dostępnymi środkami technicznymi a naszą wiedzą, umiejętnościami, intuicją i doświadczeniem.

Dużo, często nieprzewidzianych trudności nastręcza identyfikacja parametryczna obiektu, systemu sterowania oraz układu wykonawczego. Polega ona na przyporządkowaniu pojęć fizycznych elementom struktury badanego obiektu i wyznaczeniu wartości parametrów występujących w równaniach matematycznych [4÷6]. Identyfikacja przeprowadzana jest na podstawie znanych informacji o obiekcie i znanych sygnałach lub danych pomiarowych uzyskanych w wyniku eksperymentów przeprowadzonych na modelach materiałnych lub obiekcie fizycznym.

2. Ogólny model matematyczny sterowanego samolotu



Rys. 2. Przyjęte układy odniesienia, kąty wychyleń powierzchni sterowych, prędkości liniowych i kątowych samolotu

Samolot (rys.2) jest traktowany jako obiekt nieodkształcalny, sterowany. Ste-

rowanie odbywa się w czterech kanałach: pochylania Θ – przez wychylenie steru wysokości δ_H , przechylania Φ – przez wychylenie lotek δ_L , odchyłania Ψ – przez wychylenie steru kierunku δ_V oraz prędkości V_0 – przez zmianę ciągu silnika T położeniem dźwigni sterowania silnikiem δ_T .

Dynamiczne równania ruchu obiektów są wyprowadzone w pracach [1,4,5,6,8], poniżej przedstawiono je w postaci ogólnej, zwracając większą uwagę na uwzględnienie sił pochodzących od sterowania, dodatkowych podwieszeń i urządzeń występujących na samolocie.

Ogólne równanie dynamiki sterowanego obiektu:

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{Q} + \mathbf{U}\delta, \quad (2.1)$$

gdzie:

– zmodyfikowana macierz bezwładności:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{\dot{\psi}}, \quad (2.2)$$

– wektor przyspieszeń:

$$\dot{\mathbf{V}} = \text{col}[\ddot{U}, \ddot{V}, \ddot{W}, \ddot{P}, \ddot{Q}, \ddot{R}], \quad (2.3)$$

– wektor prędkości (rys.2):

$$\mathbf{V} = \text{col}[U, V, W, P, Q, R], \quad (2.4)$$

– macierz sił zewnętrznych (rys.3, [8]):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \text{col}[X, Y, Z, L, M, N], \quad (2.5)$$

przy czym

$$\mathbf{M}_{\dot{\psi}} = \begin{bmatrix} & 0 & & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & -M_{\dot{\psi}} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \vdots & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & \vdots & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & \vdots & S_y & -S_x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -S_z & S_y & \vdots & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & \vdots & -J_{yz} & J_y & -J_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & \vdots & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix},$$

Związki kinematyczne [1,4,5,6,8] (rys.2):

$$\dot{r} = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}] = F(U, V, W, P, Q, R, \Phi, \Theta, \Psi). \quad (2.9)$$

Dynamika silnika

- równanie obrotów silnika:

$$n_T = K_1^T(\text{Ma}, \tau, \rho) \frac{n_{T \max} - n_{T0}}{\delta_{T \max}} \delta_T, \quad (2.10)$$

- równanie ciągu silnika (rys.4):

$$T = K_2^T(\text{Ma}) \frac{T_{\max} - T_0}{n_{T \max} - n_{T0}} n_T, \quad (2.11)$$

- prękość kątowna obrotów zespołu turbo-sprężarki:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{60} n_T. \quad (2.12)$$

Kinematyka wykonawczego systemu sterowania samolotem (rys.2 i 3)

- kinematyczne równanie sterowania w kanale steru wysokości δ_H :

$$T_1^H \dot{\delta}_H + T_0^H \delta_H = - (M_{z0}^H + K_z^{\alpha H} \alpha_H + K_z^{\delta_H} \delta_H + b_a^H \dot{\delta}_H), \quad (2.13)$$

- kinematyczne równanie sterowania w kanale steru kierunku δ_V :

$$T_1^V \dot{\delta}_V + T_0^V \delta_V = - (M_{z0}^V + K_z^{\beta V} \beta_V + K_z^{\delta_V} \delta_V + b_a^V \dot{\delta}_V), \quad (2.14)$$

- kinematyczne równanie sterowania w kanale wychyleń lotek δ_L :

$$T_1^L \dot{\delta}_L + T_0^L \delta_L = - (M_{z0}^L + K_z^{\alpha} \alpha + K_z^{\delta_L} \delta_L + b_a^L \dot{\delta}_L), \quad (2.15)$$

Prawa sterowania (rys.2 i 3)

- w kanale przechylania Φ :

$$\begin{aligned} T_3^L \dot{\delta}_L + T_2^L \delta_L &= K_{\Phi}^L (\Phi - \Phi_z) + K_P^L (P - P_z) + K_W^L (W - W_z) + \\ &+ K_y^L (y_1 - y_{1z}) + K_V^L (V - V_z) + K_{\Psi}^L (\Psi - \Psi_z) + K_R^L (R - R_z) + \delta_{L0}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

- w kanale pochyłania Θ :

$$\begin{aligned} T_3^H \dot{\delta}_H + T_2^H \delta_H &= K_{\Theta}^H (\Theta - \Theta_z) + K_Q^H (Q - Q_z) + K_W^H (W - W_z) + \\ &+ K_x^H (x_1 - x_{1z}) + K_{\dot{x}}^H (\dot{x}_1 - \dot{x}_{1z}) + K_z^H (z_1 - z_{1z}) + \\ &+ K_U^H (U - U_z) + \delta_{H0}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

- w kanale odchyłania Ψ :

$$T_3^V \delta_V + T_2^V \delta_V = K_\Phi^V (\Phi - \Phi_z) + K_P^V (P - P_z) + K_W^V (W - W_z) + \\ + K_y^V (y_1 - y_{1z}) + K_V^V (V - V_z) + K_\Psi^V (\Psi - \Psi_z) + K_R^V (R - R_z) + \delta_{V0}, \quad (2.18)$$

- w kanale prędkości V_0 :

$$T_3^T \delta_T + T_2^T \delta_T = K_\Theta^T (\Theta - \Theta_z) + K_Q^T (Q - Q_z) + K_U^T (U - U_z) + \\ + K_W^T (W - W_z) + K_z^T (z_1 - z_{1z}) + K_\Phi^T (\Phi - \Phi_z) + K_\Psi^T (\Psi - \Psi_z) + \delta_{T0}, \quad (2.19)$$

przy czym indeksy dolne z odnoszą się do parametrów zadanych, określonych przez nastawienie plotu automatycznego, więzów programowych, śledzenia celu lub terenu.

Prędkość postępową samolotu (rys.2):

$$V_0^2 = U^2 + V^2 + W^2. \quad (2.20)$$

Kąty aerodynamiczne

- kąt natarcia:

$$\alpha = \arctg \frac{W}{U}, \quad (2.21)$$

- kąt ślizgu:

$$\beta = \arcsin \frac{V}{V_0}. \quad (2.22)$$

Wysokość lotu:

$$H = -z_1. \quad (2.23)$$

Gęstość powietrza dla $H \leq 11000$ m:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{z_1}{44300} \right)^{4.256}. \quad (2.24)$$

Więzy programowane trajektorii lotu samolotu (rys.2):

$$r_1 = f_1(x_1, y_1, z_1, \Phi, \Theta, \Psi). \quad (2.25)$$

Kinematyczne związki naprowadzania na cel C , bieżąca kontrola terenu:

$$r_{1C} = f_3(V_0, V_C, \Phi_C, \Theta_C, \Psi_C, \Phi, \Theta, \Psi, \Omega, \Omega_C). \quad (2.26)$$

Powyżej przedstawiony model matematyczny można w pełni stosować do sterowania obiektów samonaprowadzających się na cele lub poruszających się po zadanej trajektorii lotu zgodnie z nałożonymi więzami programowanymi (2.25).

Sily uogólnione Q (2.1) i (2.5) wyrażone we współrzędnych uogólnionych i quasi-prędkościach mają postać:

$$Q = Q^S + Q^T + Q^B + Q^R + Q^U + Q^{Sp}, \quad (2.27)$$

gdzie indeksy górne oznaczają siły działające na samolot od: S – samolot konfiguracja gładka, T – ciąg silników, B – bomb lub innych podwieszeń, R – rakiet, U – oddziaływanie uzbrojenia artyleryjskiego, Sp – spadochronów hamujących, indeksy dolne pochodzące od: g – grawitacji, a – aerodynamiczne, T – ciągu silników, np.:

– siły pochodzące od samolotu [5,8] (rys.3):

$$Q^S = \begin{bmatrix} F^S \\ M^S \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} F^S &= F_g^S + F_a^S, \\ M^S &= M_g^S + M_a^S, \end{aligned} \quad (2.29)$$

siły i momenty sił (2.28) i (2.29) zostały wyznaczone w pracach [5,6,8].

3. Geometria mas

W ogólnym modelu matematycznym samolotu uwzględniającym elementy (2.27) w równaniach (2.1) i (2.2) oraz w zależności (2.6) należy uwzględnić masy i położenie mas poszczególnych podwieszeń;

– masa całkowita m :

$$m = m_S + \sum_{i=1}^{n_B} m_{B_i} + \sum_{i=1}^{n_R} m_{R_i} + \sum_{i=1}^{n_U} m_{U_i}, \quad (3.1)$$

i może być zmienna w czasie w zależności od zużycia amunicji m_{U_i} , odpalenia rakiet m_{R_i} , zrzutu bomb m_{B_i} .

Również ulegają zmianie [8]:

– momenty bezwładności J_x, J_y, J_z :

$$\begin{aligned} J_x &= J_{xSC} + m_S(y_C^2 + z_C^2) + \sum_{i=1}^{n_B} [J_{xBC_i} + m_{B_i}(y_{B_i}^2 + z_{B_i}^2)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_R} [J_{xRC_i} + m_{R_i}(y_{R_i}^2 + z_{R_i}^2)] + \sum_{i=1}^{n_U} [J_{xUC_i} + m_{U_i}(y_{U_i}^2 + z_{U_i}^2)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

i analogicznie J_y oraz J_z ,

- momenty dewiacji J_{xy} , J_{yz} , J_{xz} :

$$J_{xy} = J_{xySC} + m_S x_C y_C + \sum_{i=1}^{n_B} (J_{xyBCi} + m_{Bi} x_{Bi} y_{Bi}) + \\ + \sum_{i=1}^{n_R} (J_{xyRCi} + m_{Ri} x_{Ri} y_{Ri}) + \sum_{i=1}^{n_U} (J_{xyUCi} + m_{Ui} x_{Ui} y_{Ui}), \quad (3.3)$$

i analogicznie J_{yz} oraz J_{xz} ,

- momenty statyczne S_x , S_y , S_z :

$$S_x = m_S x_C + \sum_{i=1}^{n_B} m_{Bi} x_{Bi} + \sum_{i=1}^{n_R} m_{Ri} x_{Ri} + \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} x_{Ui}, \quad (3.4)$$

i analogicznie S_y oraz S_z , przy czym n_B - liczba bomb niezrzucanych, n_R - liczba rakiet nieodpalonych oraz n_U - liczba naboju niewystrzelonych, pozostających w samolocie.

4. Siły aerodynamiczne pochodzące od sterowania

Siły i momenty sił aerodynamicznych pochodzące od wychyleń powierzchni sterowych [8] w równaniu (2.1) i macierzy U (2.7) wywołane wychyleniem: steru wysokości - δ_H , steru kierunku - δ_V , lotek - δ_L oraz zmianą kąta zaklinowania statecznika poziomego - α_{zH} (rys.2 i 3) można przedstawić:

$$Q^\delta = \begin{bmatrix} F^\delta \\ M^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^\delta \\ Y^\delta \\ Z^\delta \\ L^\delta \\ M^\delta \\ N^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\alpha_{zH}} & X_{\delta_H} & 0 & 0 & X_{\delta_T} \\ 0 & 0 & Y_{\delta_V} & 0 & Y_{\delta_T} \\ Z_{\alpha_{zH}} & Z_{\delta_H} & 0 & 0 & Z_{\delta_T} \\ 0 & 0 & L_{\delta_V} & L_{\delta_L} & L_{\delta_T} \\ M_{\alpha_{zH}} & M_{\delta_H} & 0 & 0 & M_{\delta_T} \\ 0 & 0 & N_{\delta_V} & 0 & N_{\delta_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{zH} \\ \delta_H \\ \delta_V \\ \delta_L \\ \delta_T \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Pochodne aerodynamiczne sił i momentów sił:

- względem kąta wychylenia steru wysokości δ_H :

$$X_{\delta_H} = \frac{1}{2} \rho S_H V_H^2 a_{2H} \sin(\alpha + \varepsilon_H), \quad (4.2)$$

$$Z_{\delta_H} = -\frac{1}{2} \rho S_H V_H^2 a_{2H} \cos(\alpha + \varepsilon_H), \quad (4.3)$$

$$M_{\delta_H} = X_{\delta_H} z_H - Z_{\delta_H} x_H, \quad (4.4)$$

- względem kąta zaklinowania statecznika poziomego α_{zH} :

$$X_{\alpha_{zH}} = \frac{1}{2} \rho S_H V_H^2 a_{1H} \sin(\alpha + \varepsilon_H), \quad (4.5)$$

$$Z_{\alpha_{zH}} = -\frac{1}{2} \rho S_H V_H^2 a_{1H} \cos(\alpha + \varepsilon_H), \quad (4.6)$$

$$M_{\alpha_{zH}} = X_{\alpha_{zH}} z_H - Z_{\alpha_{zH}} x_H, \quad (4.7)$$

- względem kąta wychylenia steru kierunku δ_V :

$$X_{\delta_V} = -\frac{1}{2} \rho S_V V_V^2 a_{2V} \sin(\beta + \varepsilon_V), \quad (4.8)$$

$$Y_{\delta_V} = \frac{1}{2} \rho S_V V_V^2 a_{2V} \cos(\beta + \varepsilon_V), \quad (4.9)$$

$$L_{\delta_V} = Y_{\delta_V} z_V, \quad (4.10)$$

$$M_{\delta_V} = X_{\delta_V} z_V, \quad (4.11)$$

$$N_{\delta_V} = Y_{\delta_V} x_V - X_{\delta_V} y_V, \quad (4.12)$$

- względem kąta wychylenie lotek δ_L :

$$L_{\delta_L} = -\rho V_0^2 a_{2L} \int_{\frac{\delta}{2} - b_L}^{\frac{\delta}{2}} c_S(y) y dy, \quad (4.13)$$

gdzie, zgodnie z rys.3 w układzie odniesienia $Oxyz$:

$$\mathbf{r}_H = ix_H + jy_H + kz_H,$$

$$\mathbf{r}_V = ix_V + jy_V + kz_V,$$

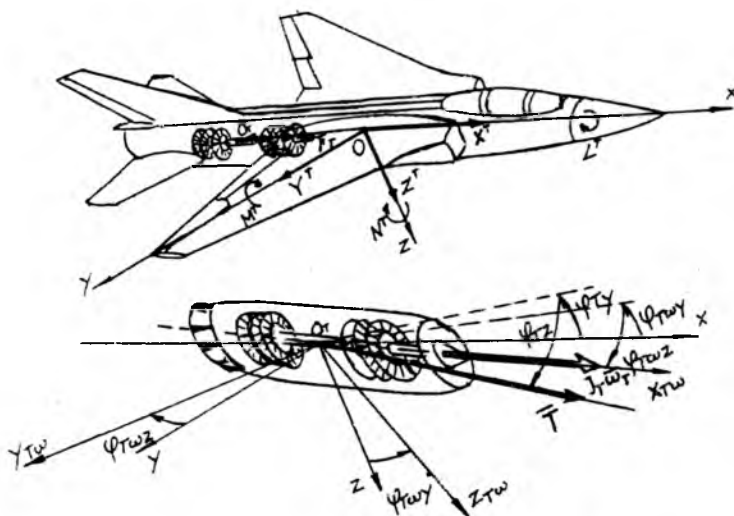
S_H, S_V - powierzchnia usterzenia poziomego i pionowego,

V_H, V_V - prędkość opływu usterzeń poziomego i pionowego,

$\varepsilon_H, \varepsilon_V$ - kąt odchylenia strug na usterzeniu poziomym i pionowym,
przy czym:

$$\begin{aligned} a_{1H} &= \frac{\partial C_{xH}}{\partial \alpha_H}, & a_{2H} &= \frac{\partial C_{xH}}{\partial \delta_H}, & a_{2V} &= \frac{\partial C_{yV}}{\partial \delta_V}, \\ a_{2L} &= \frac{\partial C_z}{\partial \delta_L}, & \delta_L &= \frac{\delta_{Lp} + \delta_{Ll}}{2}. \end{aligned}$$

5. Siły i momenty sił pochodzące od napędu turbinowego silnika odrzutowego



Rys. 4. Przyjęte układy odniesienia związane z silnikiem $O_T, x_{Tw}, y_{Tw}, z_{Tw}$; kąty zaklinowania względem samolotowego układu odniesienia oraz wektor położenia r_T

Siły pochodzące od napędów (rys.4) stanowią sumy ciągów poszczególnych silników a składowe X^T, Y^T, Z^T w układzie samolotowym, odpowiednio sumy składowych ciągów T_i :

$$F^T = \sum_{i=1}^n T_i = \begin{bmatrix} X^T \\ Y^T \\ Z^T \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

a moment sił pochodzący od ciągów silników T_i i efektów giroskopowych ma postać:

$$M^T = \sum_{i=1}^n M_i^T = \sum_{i=1}^n (r_{Ti} \times T_i + J_{Ti} \omega_{Ti} \times \Omega) = \begin{bmatrix} L^T \\ M^T \\ N^T \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Składowe sił w układzie samolotowym $Oxyz$:

$$X^T = \sum T_i \cos \varphi_{Tz_i} \cos \varphi_{Ty_i}, \quad (5.3)$$

$$Y^T = \sum T_i \sin \varphi_{Tz_i}, \quad (5.4)$$

$$Z^T = \sum -T_i \cos \varphi_{Tz_i} \sin \varphi_{Ty_i} \quad (5.5)$$

Składowe momentów w układzie samolotowym $0xyz$:

- moment przechylający:

$$L^T = - \sum T_i \left(y_{T_i} \cos \varphi_{Tz_i} \sin \varphi_{Ty_i} + z_{T_i} \sin \varphi_{Tz_i} \right) + \sum J_{T_i} \omega_{T_i} \left(R \sin \varphi_{T\omega z_i} + Q \cos \varphi_{T\omega z_i} \sin \varphi_{T\omega y_i} \right), \quad (5.6)$$

- moment pochylający:

$$M^T = \sum T_i \left(z_{T_i} \cos \varphi_{Tz_i} \cos \varphi_{Ty_i} + x_{T_i} \cos \varphi_{Tz_i} \sin \varphi_{Ty_i} \right) - \sum J_{T_i} \omega_{T_i} \left(R \cos \varphi_{T\omega z_i} \cos \varphi_{T\omega y_i} + P \cos \varphi_{T\omega z_i} \sin \varphi_{T\omega y_i} \right), \quad (5.7)$$

- moment odchylający:

$$N^T = \sum T_i \left(x_{T_i} \sin \varphi_{Tz_i} - y_{T_i} \cos \varphi_{Tz_i} \cos \varphi_{Ty_i} \right) + \sum J_{T_i} \omega_{T_i} \left(Q \cos \varphi_{T\omega z_i} \cos \varphi_{T\omega y_i} - P \sin \varphi_{T\omega z_i} \right), \quad (5.8)$$

gdzie, zgodnie z rys.4 w układzie odniesienia $0xyz$:

$$r_{T_i} = ix_{T_i} + jy_{T_i} + kz_{T_i},$$

J_{T_i} - moment bezwładności zespołu turbo-sprężarkowego względem osi obrotu $x_{T\omega_i}$,

ω_{T_i} - prędkość kątowna zespołu turbo-sprężarkowego i -tego silnika.

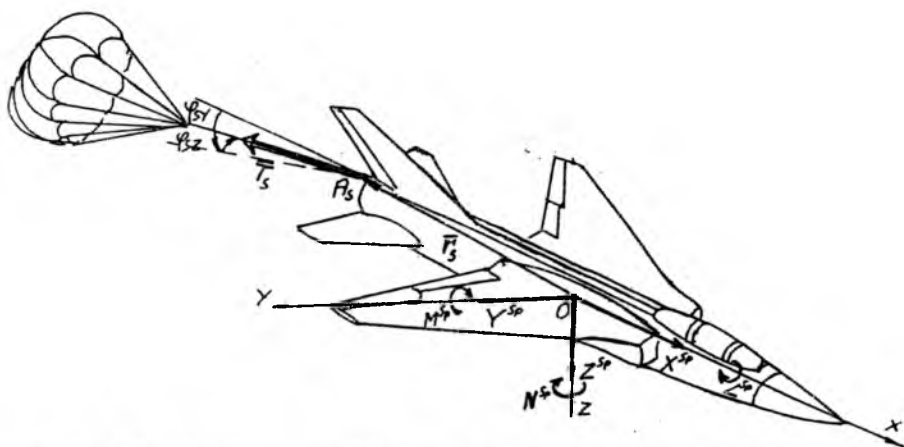
Uzależniając ciąg silnika T i prędkość kątową ω_T w równaniach (5.3) ÷ (5.8) od wychYLENIA dźwigni sterowania silnikiem δ_T (2.10) i obrotów n_T (2.11), uzyskujemy możliwość sterowania ciągiem silników występującym w równaniach (2.1) i macierzy (2.7)

6. Siły i momenty sił pochodzące od spadochronów hamujących

Siły pochodzące od spadochronu hamującego (rys.5) to odpowiednio naciąg liny spadochronu obciążonej oporem aerodynamicznym spadochronu.

Opór aerodynamiczny spadochronu:

$$T_S = \frac{1}{2} \rho S_S V_{AS}^2 C_{x_S}, \quad (6.1)$$



Rys. 5. Spadochron hamujący i jego konfiguracja w układzie samolotowym $Oxyz$

gdzie

- prędkość powietrza opływającego spadochron:

$$V_{AS}^2 = U_S^2 + V_S^2 + W_S^2,$$

- położenie spadochronu w układzie samolotowym $Oxyz$:

$$r_S = ix_S + jy_S + kz_S,$$

przy czym składowe prędkości opływu:

$$U_S = U + Qz_S - Ry_S,$$

$$V_S = V + Rx_S - Pz_S,$$

$$W_S = W + Py_S - Qx_S.$$

Kąty położenia osi spadochronu względem układu samolotowego (rys.5)

$$\varphi_{Sy} = \arctg\left(-\frac{W_S}{U_S}\right),$$

$$\varphi_{Sz} = \arctg\left(\frac{V_S}{\sqrt{U_S^2 + W_S^2}}\right).$$

Siły i momenty sił pochodzące od spadochronu hamującego w postaci ogólnej:

$$Q^S = \begin{bmatrix} F^S \\ M^S \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

– siła hamująca i jej składowe:

$$\mathbf{F}^{\mathcal{S}} = T_S \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} X^{\mathcal{S}} \\ Y^{\mathcal{S}} \\ Z^{\mathcal{S}} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

– moment od sił hamujących i składowe:

$$\mathbf{M}^{\mathcal{S}} = \mathbf{r}_S \times \mathbf{T}_S = T_S \mathbf{A}_{SM} = \begin{bmatrix} L^{\mathcal{S}} \\ M^{\mathcal{S}} \\ N^{\mathcal{S}} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Składowe sił hamujących w układzie samolotowym $Oxyz$:

$$X^{\mathcal{S}} = -T_S \cos \varphi_{Sx} \cos \varphi_{Sy}, \quad (6.5)$$

$$Y^{\mathcal{S}} = -T_S \sin \varphi_{Sx}, \quad (6.6)$$

$$Z^{\mathcal{S}} = T_S \cos \varphi_{Sx} \sin \varphi_{Sy}. \quad (6.7)$$

Składowe momentów od sił hamujących w układzie samolotowym $Oxyz$:

$$L^{\mathcal{S}} = T_S (y_S \cos \varphi_{Sx} \sin \varphi_{Sy} + z_S \sin \varphi_{Sx}), \quad (6.8)$$

$$M^{\mathcal{S}} = -T_S (x_S \cos \varphi_{Sx} \sin \varphi_{Sy} + z_S \cos \varphi_{Sx} \cos \varphi_{Sy}), \quad (6.9)$$

$$N^{\mathcal{S}} = -T_S (x_S \sin \varphi_{Sx} - y_S \cos \varphi_{Sx} \cos \varphi_{Sy}), \quad (6.10)$$

gdzie:

- S_S – powierzchnia odniesienia spadochronu hamującego,
- C_{x_S} – współczynnik oporu aerodynamicznego spadochronu hamującego.

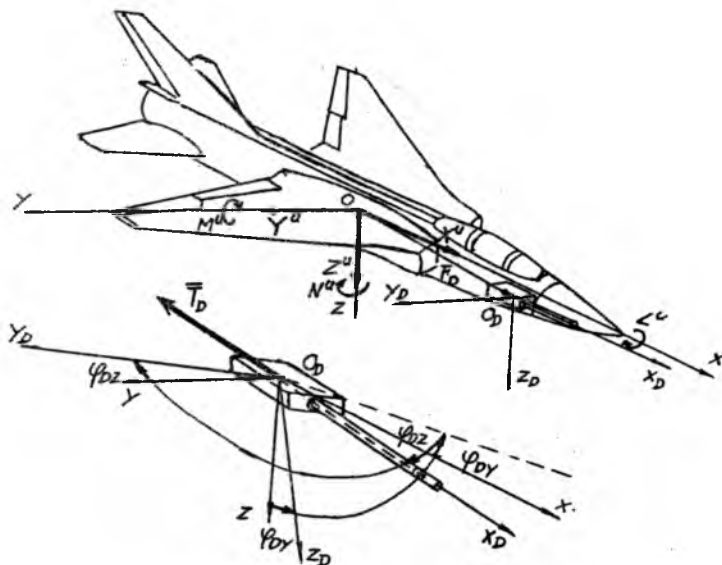
W przypadku większej liczby spadochronów hamujących należy w obliczeniach stosować sumy sił pochodzących od spadochronów.

7. Siły i momenty sił pochodzące od uzbrojenia artyleryjskiego

Siły i momenty sił pochodzące od pokładowych działek a działające na samolot są wywołane siłą odrzutu i -tego działka T_{D_i} oraz zmianą masy samolotu wwołaną zużyciem n pocisków o masie jednostkowej m_{U_i} (rys.6).

W ogólnym zapisie siły od uzbrojenia można przedstawić:

$$\mathbf{Q}^U = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^U \\ \mathbf{M}^U \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$



Rys. 6. Usytuowanie działka na samolocie, przyjęte układy odniesienia, współrzędne położenia oraz kąty zaklinowania

gdzie

– siła i jej składowe mają postać:

$$\mathbf{F}^U = \mathbf{F}_g^U + \mathbf{F}_T^U = g \sum_{i=1}^n m_{U_i} \mathbf{A}_g + \sum_{i=1}^k T_{D_i} \mathbf{A}_{D_i} = \begin{bmatrix} X^U \\ Y^U \\ Z^U \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

– moment sił od uzbrojenia:

$$\mathbf{M}^U = \mathbf{M}_g^U + \mathbf{M}_T^U = g \mathbf{A}_g \mathbf{M} \sum_{i=1}^n m_{U_i} \begin{bmatrix} x_{D_i} \\ y_{D_i} \\ z_{D_i} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^k T_{D_i} \mathbf{A}_{D_i} \mathbf{M}_i \begin{bmatrix} x_{D_i} \\ y_{D_i} \\ z_{D_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^U \\ M^U \\ N^U \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Składowe sił oddziaływania działek na samolot w układzie samolotowym $0xyz$ (rys.6):

$$X^U = - \sum_{i=1}^k T_{D_i} \cos \varphi_{D_{xi}} \cos \varphi_{D_{yi}} - g \sin \theta \sum_{i=1}^{n_U} m_{U_i}, \quad (7.4)$$

$$Y^U = - \sum_{i=1}^k T_{D_i} \sin \varphi_{D_{xi}} + g \cos \theta \sin \phi \sum_{i=1}^{n_U} m_{U_i}, \quad (7.5)$$

$$Z^U = \sum_{i=1}^k T_{Di} \cos \varphi_{Dzi} \sin \varphi_{Dyi} + g \cos \Theta \cos \Phi \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} . \quad (7.6)$$

Składowe momentów sił od działek w układzie samolotowym $Oxyz$ (rys.6):

$$L^U = \sum_{i=1}^k T_{Di} (y_{Di} \cos \varphi_{Dzi} \sin \varphi_{Dyi} + z_{Di} \sin \varphi_{Dzi}) + \quad (7.7)$$

$$+ g \left[\sum_{j=1}^k \left(\cos \Theta \cos \Phi \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} y_{Dj} - \cos \Theta \sin \Phi \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} z_{Dj} \right) \right] ,$$

$$M^U = - \sum_{i=1}^k T_{Di} (x_{Di} \cos \varphi_{Dzi} \sin \varphi_{Dyi} + z_{Di} \cos \varphi_{Dzi} \cos \varphi_{Dyi}) - \quad (7.8)$$

$$- g \left[\sum_{j=1}^k \left(\cos \Theta \cos \Phi \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} x_{Dj} + \sin \Theta \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} z_{Dj} \right) \right] ,$$

$$N^U = \sum_{i=1}^k T_{Di} (-x_{Di} \sin \varphi_{Dzi} + y_{Di} \cos \varphi_{Dzi} \cos \varphi_{Dyi}) + \quad (7.9)$$

$$+ g \left[\sum_{j=1}^k \left(\cos \Theta \cos \Phi \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} x_{Dj} + \sin \Theta \sum_{i=1}^{n_U} m_{Ui} y_{Dj} \right) \right] .$$

gdzie

– położenie działka na samolocie (rys.6):

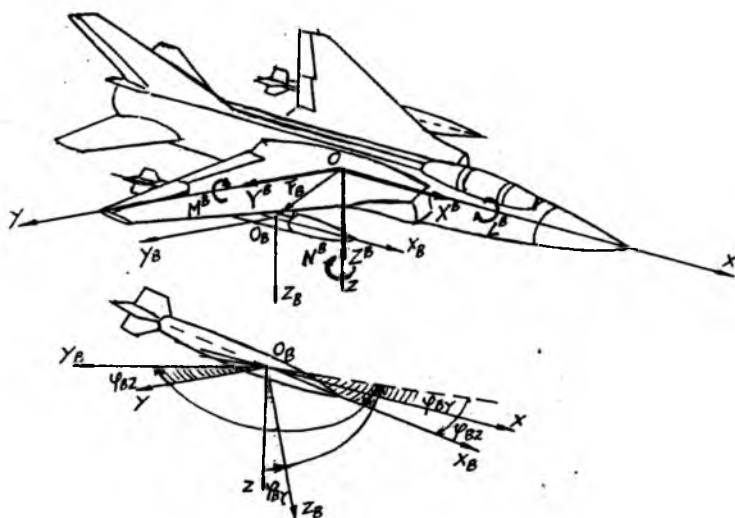
$$\mathbf{r}_D = ix_D + jy_D + kz_D , \quad (7.10)$$

T_D – siła oddziaływania działka traktowana jako impuls w czasie, zależna od szybkostrzelności i profilu impulsu w czasie,

k – liczba działek.

8. Siły i momenty sił pochodzące od bomb, rakiet lub innych podwieszeń

Siły i momenty sił pochodzące od podwieszeń: bomb, rakiet, raketobomb, zbiorników, zasobników itp. stanowią sumy dodatkowego obciążenia samolotu masą podwieszenia (siły grawitacyjne), siłami aerodynamicznymi i ciągiem silników raketowych przy starcie (rys.7).



Rys. 7. Usytuowanie bomby na samolocie, przyjęte układy odniesienia, współrzędne położenia oraz kąty zawieszenia

Ogólnie można przedstawić w zapisie macierzowym

$$Q^B = \begin{bmatrix} F^B \\ M^B \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

Sily i ich składowe w układzie samolotowym $Oxyz$ (rys.7):

$$\begin{aligned} F^B &= F_g^B + F_a^B + F_T^B = g \Lambda_g \sum_{i=1}^{n_B} m_{Bi} + \\ &+ \frac{1}{2} \rho V_0^2 \Lambda_a \sum_{i=1}^{n_B} S_{Bi} \begin{bmatrix} C_{xBi} \\ C_{yBi} \\ C_{zBi} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n_B} \begin{bmatrix} 0 & X_{Qi}^B & 0 \\ Y_{Pi}^B & 0 & Y_{Ri}^B \\ 0 & Z_{Qi}^B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_R} T_{Bi} \Lambda_{BTi} = \begin{bmatrix} X^B \\ Y^B \\ Z^B \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Momenty sił działających na samolot i ich składowe w układzie samolotowym $Oxyz$ (rys.7):

$$\begin{aligned}
M^B = & M_g^B + M_o^B + M_T^R = g A_{gM} \sum_{i=1}^{n_B} m_{Bi} \begin{bmatrix} x_{Bi} \\ y_{Bi} \\ z_{Bi} \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^{n_B} \left(S_{Bi} \begin{bmatrix} 0 & -z_{Bi} & y_{Bi} \\ z_{Bi} & 0 & -x_{Bi} \\ -y_{Bi} & x_{Bi} & 0 \end{bmatrix} A_\alpha \begin{bmatrix} C_{xBi} \\ C_{yBi} \\ C_{zBi} \end{bmatrix} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \rho V_0^2 A_\alpha \sum_{i=1}^{n_B} S_{Bi} l_{Bi} \begin{bmatrix} C_{mxBi} \\ C_{myBi} \\ C_{mzBi} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n_B} \begin{bmatrix} L_{Pi}^B & 0 & L_{Ri}^B \\ 0 & M_{Qi}^B & 0 \\ N_{Pi}^B & 0 & N_{Ri}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} + \\
& + \sum_{i=1}^{n_B} T_{Bi} A_{BMTi} \begin{bmatrix} x_{BTi} \\ y_{BTi} \\ z_{BTi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^B \\ M^B \\ N^B \end{bmatrix}, \quad (8.3)
\end{aligned}$$

gdzie:

- S_{Bi} – powierzchnia odniesienia bomby,
- l_{Bi} – długość bomby,
- $C_{xBi}, C_{yBi}, C_{zBi}$ – bezwymiarowe współczynniki sił aerodynamicznych bomb,
- $C_{mxBi}, C_{myBi}, C_{mzBi}$ – bezwymiarowe współczynniki momentów aerodynamicznych bomb,
- m_{Bi} – masa bomby,
- T_{Bi} – ciąg silnika raketowego,
- n_B – liczba bomb,

$A_\alpha, A_{gM}, A_g, A_{BTi}, A_{BMTi}$ – macierze transformacji,

$X_Q^B, Y_P^B, Y_R^B, Z_Q^B, L_P^B, L_R^B, M_Q^B, N_P^B, N_R^B$ – pochodne aerodynamiczne [1,4,5,8].

Położenie bomby na samolocie w układzie samolotowym $Oxyz$ (rys.7):

$$r_B = ix_B + jy_B + kz_B. \quad (8.4)$$

Przy uwzględnianiu sił aerodynamicznych pochodzących od podwieszonych należy brać pod uwagę interferencję systemu zasobnik-samolot. Współczynnik interferencji $k_{int}(x_B, y_B, z_B)$ zależy od położenia zasobnika względem płatowca. W momencie zrzućtu następuje przemieszczenie bomby względem samolotu, a więc zmienia się wzajemne położenie bomby i samolotu. Współczynnik interferencji jest zmienny w czasie i maleje do zera w momencie gdy ustanie wzajemne oddziaływanie aerodynamiczne między bombą a samolotem [9].

9. Ogólne uwagi i wnioski

Przedstawiony równaniami (2.1) ÷ (2.26) model matematyczny, po wprowadzeniu sił aerodynamicznych i grawitacyjnych pochodzących od samolotu w konfiguracji gładkiej [4,5,8] oraz z uwzględnieniem zależności wyprowadzonych w rozdziałach 3 do 8 stanowi pełny model umożliwiający obliczenia własności dynamicznych samolotu i symulację numeryczną lotu.

Literatura

1. DŻYGADŁO W., MARYNIAK J., 1990, *Dynamika samolotu po symetrycznym zrzućie podwieszę z zastosowaniem symulacji numerycznej*, MTiS, 28, 3-4
2. ETKIN B., 1972, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley, New York
3. JANKOWSKI K., MARYNIAK J., 1988, *Le système commande en tant que système a liaisons non holonomes. Cas d'un hélicoptère*, Journal de Mécanique Théorique et appliquée, 7, 2
4. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechnika, 32
5. MARYNIAK J., 1987, *System symulacji trenera lotu, naprowadzania, walki i do-wodzenia*, MTiS, 25, 1-2
6. MARYNIAK J., 1987, *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, Zbiór referatów XXVI Sympozjonu "Modelowanie w mechanice", Gliwice-Kudowa
7. MARYNIAK J., 1987, *Prawa sterowania jako więzy nieholonomiczne automatycznego sterowania śmigłowcem*, MTiS, 25, 1-2
8. MARYNIAK J., 1985, *Ogólny model matematyczny własności dynamicznych obiektu latającego w ruchu przestrzennym*, ITLiMS Politechnika Warszawska, Sprawozdanie nr 140/85, Warszawa
9. TARKA B., MARYNIAK J., 1990, *Wpływ interferencji aerodynamicznej na parametry ruchu zasobnika latającego po zrzućie z samolotu*, MTiS, 28, 1-2

MODELOWANIE ODPALANIA I LOTU RAKIETY KLASY POWIETRZE-POWIETRZE¹

JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

W pracy rozatrżono modelowanie matematyczne [5,7,12] samolotu w locie, wyposażonego w rakiety, uwzględniające fazę odpalenia rakiet i model rakiety w samodzielnym locie. W czasie przenoszenia rakiety przez samolot występuje wzajemne sprzężenie masowe m i aerodynamiczne a (rys.1).

W momencie odpalenia rakiety z samolotu nosiciela występuje sprzężenie masowe m , aerodynamiczne a i dodatkowe obciążenie narastającym ciągiem silnika raketowego $T_R(t)$. Po odpaleniu samolot i rakietą wykonują niezależny lot, o ile rakietą nie jest związana z samolotem systemem naprowadzania.

2. Model matematyczny układu samolot-rakietą

Samolot (rys.2) wraz z rakietą jest traktowany jako sterowany obiekt nieodkształcalny. Sterowanie odbywa się w czterech kanałach: pochylenia Θ – przez wychylenie steru wysokości δ_H , przechylenia Φ – przez wychylenie lotek δ_L , odchylenia Ψ – przez wychylenie steru kierunku δ_V oraz prędkości V_0 – przez zmianę ciągu silnika T położeniem dźwigni sterowania silnikiem δ_T .

Dynamiczne równania ruchu obiektów wyprowadzono w pracach [1,3÷7,12], poniżej przedstawiono je w postaci ogólnej w samolotowym układzie odniesienia (rys.2).

Ogólne równania dynamiki sterowanego obiektu [4,5,6]:

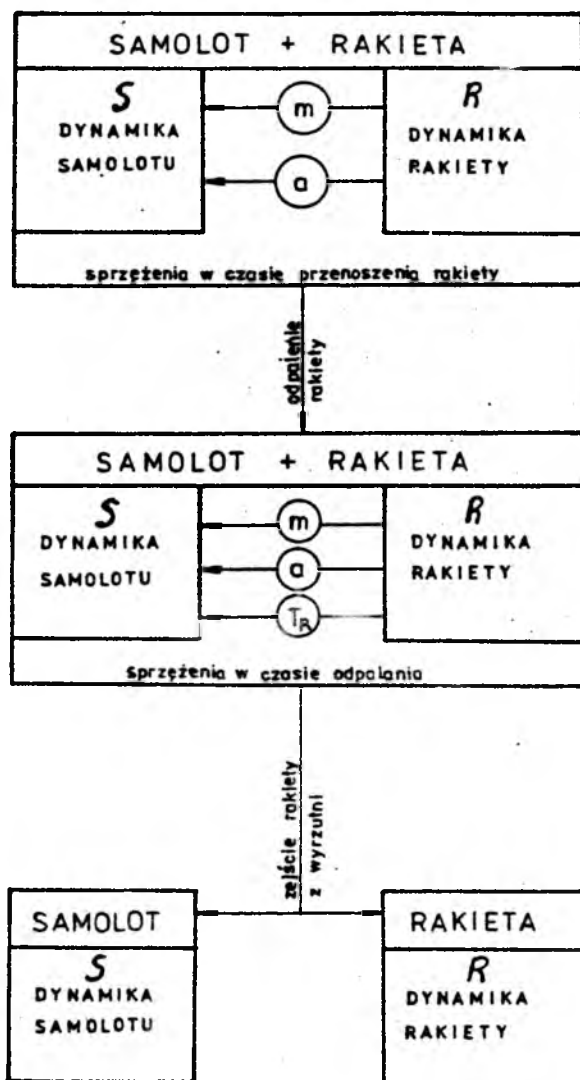
$$\tilde{M}\dot{V} + KMV = Q + U\delta, \quad (2.1)$$

gdzie

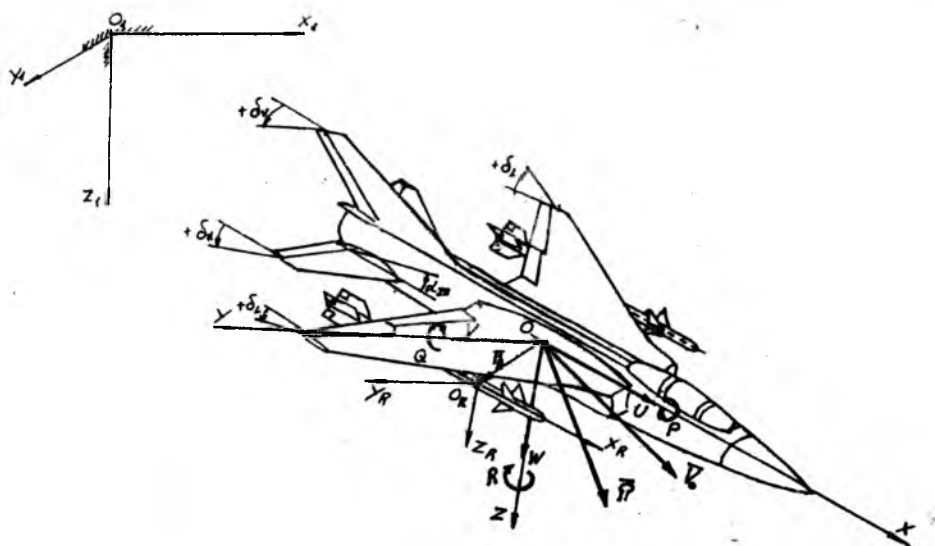
– zmodyfikowana macierz bezwładności:

$$\tilde{M} = M + M_\psi, \quad (2.2)$$

¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"



Rys. 1. Schemat blokowy wzajemnych sprzężeń samolot-rakieta



Rys. 2. Przyjęte układy odniesienia, kąty wychyleń powierzchni sterowych, prędkości liniowych i kątowych samolotu

– wektor przyspieszeń:

$$\dot{\mathbf{V}} = \text{col}[\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}], \quad (2.3)$$

– wektor quasiprędkości (rys.2):

$$\mathbf{V} = \text{col}[U, V, W, P, Q, R], \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= iU + jV + kW, \\ \boldsymbol{\Omega} &= iP + jQ + kR, \end{aligned}$$

– macierz uogólnionych sił zewnętrznych:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} = \text{col}[X, Y, Z, L, M, N], \quad (2.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= iX + jY + kZ, \\ \mathcal{M} &= iL + jM + kN, \end{aligned}$$

przy czym:

$$\mathbf{M}_{\dot{w}} = \begin{bmatrix} & \mathbf{0} & & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & -M_{\dot{w}} & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \vdots & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & m & 0 & \vdots & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & m & \vdots & S_y & -S_x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -S_z & S_y & \vdots & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & \vdots & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & \vdots & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q & \vdots & & & \\ R & 0 & -P & \vdots & & 0 & \\ -Q & P & 0 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -W & V & \vdots & 0 & -R & Q \\ W & 0 & -U & \vdots & R & 0 & -P \\ -V & U & 0 & \vdots & -Q & P & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X_{\delta_T} \\ 0 & 0 & Y_{\delta_V} & 0 \\ Z_{\delta_H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{\delta_L} & L_{\delta_V} & 0 \\ M_{\delta_H} & 0 & 0 & M_{\delta_T} \\ 0 & N_{\delta_L} & N_{\delta_V} & 0 \end{bmatrix},$$

Wektor sterowania:

$$\delta = \text{col}[\delta_H, \delta_L, \delta_V, \delta_T]. \quad (2.8)$$

Związki kinematyczne (rys.2):

$$\dot{\mathbf{r}} = \text{col}[\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}] = \mathbf{F}(U, V, W, P, Q, R, \Phi, \Theta, \Psi). \quad (2.9)$$

Dynamika silnika samolotu

- równania obrotów silnika:

$$n_T = K_1^T(\text{Ma}, \tau, \rho) \frac{n_{T \max} - n_{T0}}{\delta_{T \max}} \delta_T, \quad (2.10)$$

- równania ciągu silnika:

$$T = K_2^T(\text{Ma}) \frac{T_{\max} - T_0}{n_{T \max} - n_{T0}} n_T, \quad (2.11)$$

- prędkość kątowna obrotów zespołu turbo-sprężarki:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{60} n_T. \quad (2.12)$$

W macierzy mas $\mathbf{M}$ (2.6) poszczególne wyrazy przedstawiają sobą masy sprzężone samolotu i raket oraz momenty bezwładności i statyczne w samolotowym układzie odniesienia $Oxyz$ (rys.2 i 3), gdzie

- masa całkowita:

$$m = m_S + \sum_{i=1}^n m_{Ri}, \quad (2.13)$$

- momenty bezwładności:

$$J_x = J_{xS} + \sum_{i=1}^n [J_{x_{Ri}} + (y_{Ri}^2 + z_{Ri}^2) m_{Ri}], \quad (2.14)$$

$$J_y = J_{yS} + \sum_{i=1}^n [J_{y_{Ri}} + (x_{Ri}^2 + z_{Ri}^2) m_{Ri}], \quad (2.15)$$

$$J_z = J_{zS} + \sum_{i=1}^n [J_{z_{Ri}} + (x_{Ri}^2 + y_{Ri}^2) m_{Ri}], \quad (2.16)$$

- momenty dewiacji:

$$J_{xy} = J_{xyS} + \sum_{i=1}^n (J_{x_{Ri}y_{Ri}} + x_{Ri}y_{Ri}m_{Ri}), \quad (2.17)$$

$$J_{yz} = J_{yzS} + \sum_{i=1}^n (J_{y_{Ri}z_{Ri}} + y_{Ri}z_{Ri}m_{Ri}), \quad (2.18)$$

$$J_{xz} = J_{xzS} + \sum_{i=1}^n (J_{x_{Ri}z_{Ri}} + x_{Ri}z_{Ri}m_{Ri}), \quad (2.19)$$

- momenty statyczne:

$$S_x = S_{xS} + \sum_{i=1}^n x_{Ri} m_{Ri}, \quad (2.20)$$

$$S_y = S_{yS} + \sum_{i=1}^n y_{Ri} m_{Ri} , \quad (2.21)$$

$$S_z = S_{zS} + \sum_{i=1}^n z_{Ri} m_{Ri} . \quad (2.22)$$

Położenie rakiety w układzie samolotowym $Oxyz$ (rys.2):

$$\mathbf{r}_R = i x_R + j y_R + k z_R . \quad (2.23)$$

Prędkość postępową samolotu (rys.2):

$$V_0^2 = U^2 + V^2 + W^2 . \quad (2.24)$$

Kąty aerodynamiczne

- kąt natarcia:

$$\alpha = \arctg \frac{W}{U} , \quad (2.25)$$

- kąt ślizgu:

$$\beta = \arcsin \frac{V}{V_0} . \quad (2.26)$$

Wysokość lotu:

$$H = -z_1 . \quad (2.27)$$

Gęstość powietrza dla $H \leq 11000$ m:

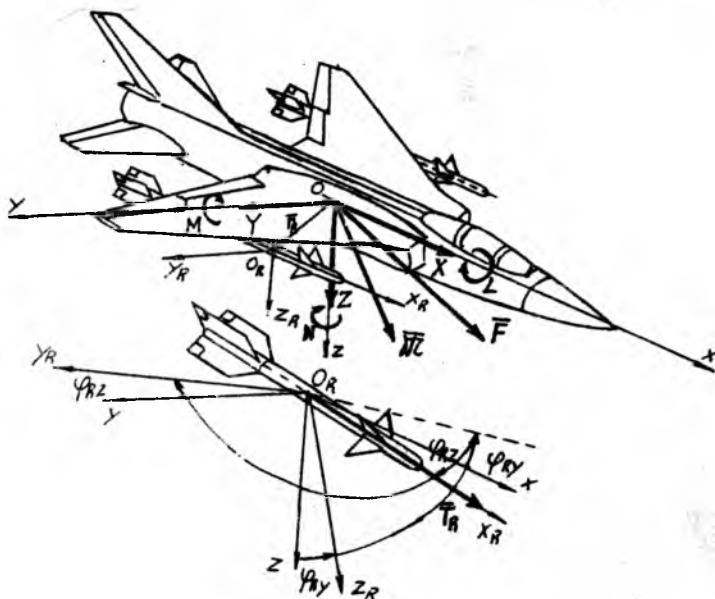
$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{z_1}{44300} \right)^{4.256} . \quad (2.28)$$

Siły uogólnione Q w ogólnych równaniach (2.1) i (2.5) wyrażane we współrzędnych uogólnionych i quasiprędkościach, w rozważanym przypadku mają postać:

$$Q = Q^S + Q^R + Q^T , \quad (2.29)$$

gdzie:

- Q^S - siły i momenty sił zewnętrznych na samolot w konfiguracji gładkiej, wyprowadzone w [5,6,12],
- Q^T - siły i momenty sił działające na samolot od turbinowych silników odrzutowych, wyprowadzone w [4,5,12],
- Q^R - siły i momenty sił zewnętrznych od rakiet.



Rys. 3. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne położenia rakiety względem samolotu oraz siły i momenty sił działające na samolot od rakiet

3. Siły i momenty sił zewnętrznych od rakiet

Siły uogólnione pochodzące od rakiet a działające na samolot (rys.3) stanowią siły i momenty sił wyrażone we współrzędnych uogólnionych ϕ, θ, ψ i quasiprędkościach liniowych U, V, W oraz prędkościach kątowych P, Q, R , gdzie:

$$Q^R = \begin{bmatrix} F^R \\ M^R \end{bmatrix} = \text{col}[X^R, Y^R, Z^R, L^R, M^R, N^R]. \quad (3.1)$$

Siły i składowe sił pochodzące od rakiet, działające na samolot to: siły aerodynamiczne - F_a^R , siły ciągu - F_T^R i grawitacyjne - F_g^R :

$$F^R = F_a^R + F_T^R + F_g^R = \begin{bmatrix} X^R \\ Y^R \\ Z^R \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

Po wyprowadzeniu i wstawieniu do (3.2) otrzymamy:

$$F^R = \left(\frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n A_{ai}^R S_{Ri} \begin{bmatrix} C_{xRi} \\ C_{yRi} \\ C_{zRi} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & X_{Qi}^R & 0 \\ Y_{Pi}^R & 0 & Y_{Ri}^R \\ 0 & Z_{Qi}^R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \right) \cdot \quad (3.3)$$

$$(1 + k_{int}) + \sum_{i=1}^n T_{Ri} A_{Ri} + g \sum_{i=1}^n m_{Ri} A_g = \begin{bmatrix} X^R \\ Y^R \\ Z^R \end{bmatrix},$$

gdzie macierze transformacji mają postać:

$$A_g = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$A_{Ri} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{Rzi} \cos \varphi_{Ryi} \\ \sin \varphi_{Rzi} \\ -\cos \varphi_{Rzi} \sin \varphi_{Ryi} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$A_{ai}^R = \begin{bmatrix} -\cos \beta_{Ri} \cos \alpha_{Ri} & -\sin \beta_{Ri} \cos \alpha_{Ri} & \sin \alpha_{Ri} \\ -\sin \beta_{Ri} & \cos \beta_{Ri} & 0 \\ -\cos \beta_{Ri} \sin \alpha_{Ri} & \sin \beta_{Ri} \sin \alpha_{Ri} & -\cos \alpha_{Ri} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

przy czym

- kąt natarcia i -tej rakiety podwieszanej na samolocie:

$$\alpha_{Ri} = \alpha + \varphi_{yRi}, \quad (3.7)$$

- kąt ślizgu i -tej rakiety podwieszanej na samolocie:

$$\beta_{Ri} = \beta - \varphi_{zRi}, \quad (3.8)$$

k_{int} - współczynnik interferencji rakiet-samolot.

Momenty sił zewnętrznych pochodzące od podwieszonych rakiet i ich składowe:

$$M^R = M_a^R + M_T^R + M_g^R = \begin{bmatrix} L^R \\ M^R \\ N^R \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

po wyprowadzeniu zależności i prostych przekształceniach otrzymamy:

$$M^R = \left\{ \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n \left(S_{Ri} \begin{bmatrix} 0 & -z_{Ri} & y_{Ri} \\ z_{Ri} & 0 & -x_{Ri} \\ -y_{Ri} & x_{Ri} & 0 \end{bmatrix} A_{ai}^R \begin{bmatrix} C_{xRi} \\ C_{yRi} \\ C_{zRi} \end{bmatrix} \right) + \right.$$

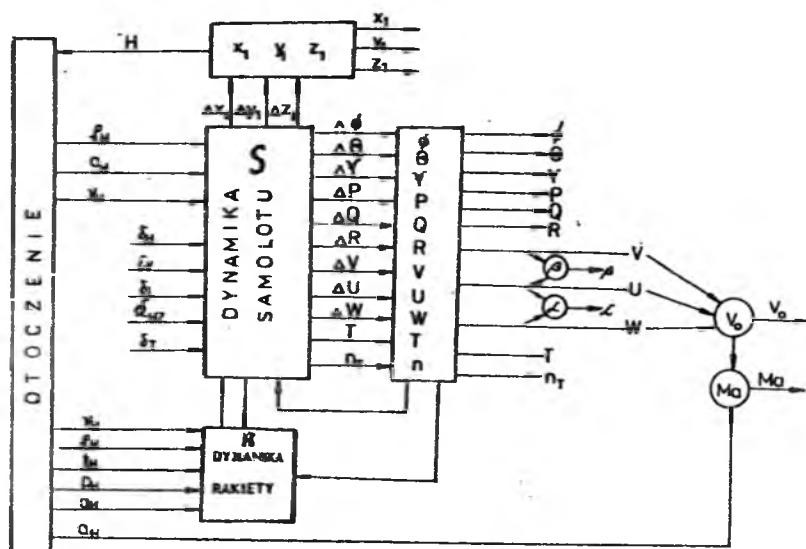
$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sum_{i=1}^n A_{ai}^R S_{Ri} l_{Ri} \begin{bmatrix} C_{mxRi} \\ C_{myRi} \\ C_{mzRi} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} L_{Pi}^R & 0 & L_{Ri}^R \\ 0 & M_{Qi}^R & 0 \\ N_{Pi}^R & 0 & N_{Ri}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \Bigg\} + \\
 & + \sum_{i=1}^n T_{Ri} A_{RMi} \begin{bmatrix} x_{Ri} \\ y_{Ri} \\ z_{Ri} \end{bmatrix} + g A_{gM} \sum_{i=1}^n m_{Ri} \begin{bmatrix} x_{Ri} \\ y_{Ri} \\ z_{Ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^R \\ M^R \\ N^R \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

gdzie macierze transformacji mają postać:

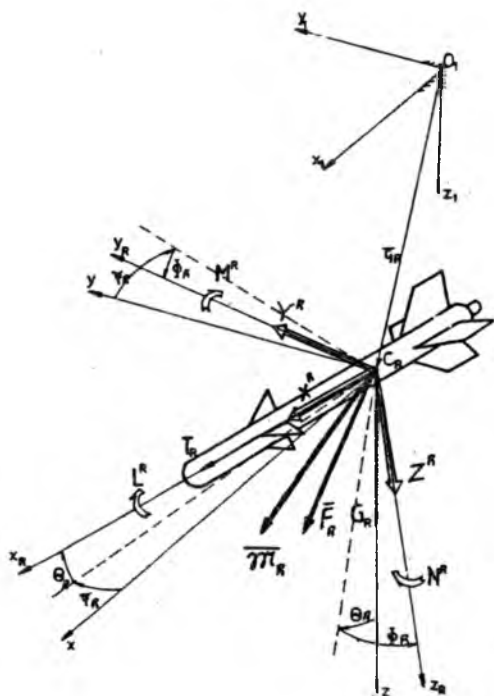
$$A_{gM} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \cos \phi & 0 & -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \phi & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$A_{RMi} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi_{Rzi} \sin \varphi_{Ryi} & \sin \varphi_{Rzi} \\ \cos \varphi_{Rzi} \sin \varphi_{Ryi} & 0 & \cos \varphi_{Rzi} \cos \varphi_{Ryi} \\ \sin \varphi_{Rzi} & -\cos \varphi_{Rzi} \cos \varphi_{Ryi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

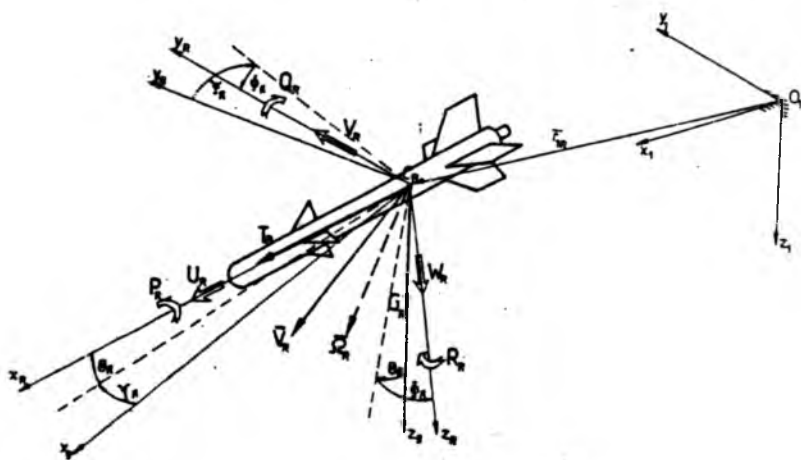
Wzajemne sprzężenia dynamiki samolotu z podwieszonymi rakietami przedstawia schemat blokowy na rys.4.



Rys. 4. Schemat blokowy wzajemnych oddziaływań kinematycznych i dynamicznych samolotu i rakiety



Rys. 5. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne oraz siły i momenty sił zewnętrznych działające na raketę w locie



Rys. 6. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne oraz prędkości liniowe i kątowe rakiety w locie

4. Model matematyczny rakiety sterowanej w locie samodzielnym

Po rozpisaniu równań z postaci ogólnej (2.1) + (2.7) i uwzględnieniu, po zmodyfikowaniu, zależności na siły (3.3) i momenty sił (3.10) działające wyłącznie na swobodną rakietę (rys.5 i 6) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & \vdots & 0 & S_{zR} & -S_{yR} \\ 0 & m_R & 0 & \vdots & -S_{zR} & 0 & S_{xR} \\ 0 & 0 & m_R & \vdots & S_{yR} & -S_{xR} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -S_{zR} & S_{yR} & \vdots & J_{xR} & -J_{xyR} & -J_{xzR} \\ S_{zR} & 0 & -S_{xR} & \vdots & -J_{xyR} & J_{yR} & -J_{yzR} \\ -S_{yR} & S_{xR} & 0 & \vdots & -J_{xzR} & -J_{xyR} & J_{zR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_R \\ \dot{V}_R \\ \dot{W}_R \\ \dot{P}_R \\ \dot{Q}_R \\ \dot{R}_R \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -R_R & Q_R & \vdots & & & \\ R_R & 0 & -P_R & \vdots & & 0 & \\ -Q_R & P_R & 0 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -W_R & V_R & \vdots & 0 & -R_R & Q_R \\ W_R & 0 & -U_R & \vdots & R_R & 0 & -P_R \\ -V_R & U_R & 0 & \vdots & -Q_R & P_R & 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & \vdots & 0 & S_{zR} & -S_{yR} \\ 0 & m_R & 0 & \vdots & -S_{zR} & 0 & S_{xR} \\ 0 & 0 & m_R & \vdots & S_{yR} & -S_{xR} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -S_{zR} & S_{yR} & \vdots & J_{xR} & -J_{xyR} & -J_{xzR} \\ S_{zR} & 0 & -S_{xR} & \vdots & -J_{xyR} & J_{yR} & -J_{yzR} \\ -S_{yR} & S_{xR} & 0 & \vdots & -J_{xzR} & -J_{xyR} & J_{zR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R \\ V_R \\ W_R \\ P_R \\ Q_R \\ R_R \end{bmatrix} = \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -m_R g \sin \Theta_R + T_R \\ m_R g \cos \Theta_R \sin \Phi_R \\ m_R g \cos \Theta_R \cos \Phi_R \\ 0 \\ -m_R g x_{CR} \cos \Theta_R \cos \Phi_R \\ m_R g x_{CR} \cos \Theta_R \sin \Phi_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_a^R \\ Y_a^R \\ Z_a^R \\ L_a^R \\ M_a^R \\ N_a^R \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} X_a^R &= -\frac{1}{2} \rho S_R V_{0R}^2 (C_{xR} \cos \beta_R \cos \alpha_R + C_{yR} \cos \alpha_R \sin \beta_R - C_{zR} \sin \alpha_R) + \\ &+ X_Q^R Q_R, \\ Y_a^R &= \frac{1}{2} \rho S_R V_{0R}^2 (-C_{zR} \sin \beta_R + C_{yR} \cos \beta_R) + Y_P^R P_R + Y_R^R R_R + Y_{\delta_V}^R \delta_V^R, \\ Z_a^R &= -\frac{1}{2} \rho S_R V_{0R}^2 (C_{xR} \cos \beta_R \sin \alpha_R + C_{yR} \sin \alpha_R \sin \beta_R + C_{zR} \cos \alpha_R) + \\ &+ Z_Q^R Q_R + Z_{\delta_H}^R \delta_H^R, \\ L_a^R &= \frac{1}{2} \rho S_R V_{0R}^2 l_R (-C_{mxR} \cos \beta_R \cos \alpha_R - C_{myR} \cos \alpha_R \sin \beta_R + \\ &+ C_{mzR} \sin \alpha_R) + L_P^R F_R + L_R^R R_R + L_{\delta_L}^R \delta_L^R, \\ M_a^R &= \frac{1}{2} \rho S_R V_{0R}^2 [x_{CR} (C_{xR} \cos \beta_R \sin \alpha_R + C_{yR} \sin \alpha_R \sin \beta_R + C_{zR} \cos \alpha_R) + \\ &+ l_R (C_{mxR} \sin \beta_R + C_{myR} \cos \beta_R)] + M_Q^R Q_R + M_{\delta_H}^R \delta_H^R, \\ N_a^R &= \frac{1}{2} \rho S_R V_{0R}^2 [x_{CR} (C_{xR} \sin \beta_R + C_{yR} \cos \beta_R) - l_R (C_{mxR} \cos \beta_R \sin \alpha_R + \\ &+ C_{myR} \sin \beta_R \sin \alpha_R + C_{mza} \cos \alpha_R)] + N_P^R P_R + N_R^R R_R + N_{\delta_V}^R \delta_V^R, \end{aligned}$$

przy czym:

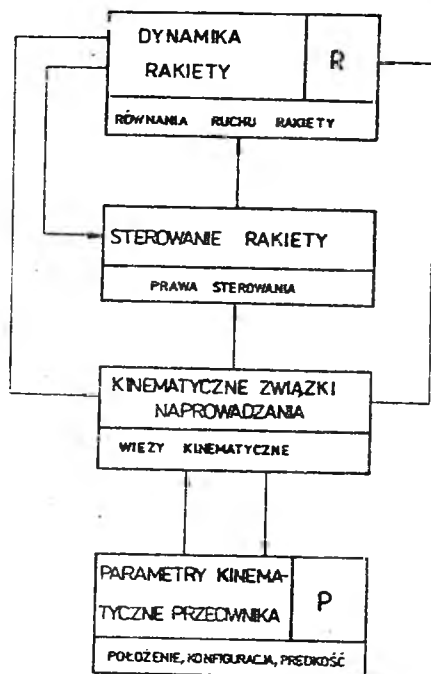
$$\begin{aligned} V_{0R}^2 &= U_R^2 + V_R^2 + W_R^2, \\ \alpha_R &= \arctg \frac{W_R}{U_R}, \\ \beta_R &= \arcsin \frac{V_R}{V_{0R}}. \end{aligned}$$

Rakieta naprowadzana lub samonaprowadzająca się, sterowana pilotem automatycznym zgodnie z przyjętym systemem naprowadzania, podlega związkom dynamiki i kinematyki zgodnie ze schematem blokowym na rys.7.

Prawa sterowania w postaci ogólnej można zapisać

- w kanale przechyłania Φ_R :

$$\begin{aligned} T_3^L \delta_L^R + T_2^L \delta_L^R &= K_\Phi^L (\Phi_R - \Phi_z) + K_P^L (P_R - P_z) + K_W^L (W_R - W_z) + \\ &+ K_y^L (y_1 - y_{1z}) + K_V^L (V_R - V_z) + K_\Psi^L (\Psi_R - \Psi_z) + K_R^L (R_R - R_z) + \delta_{L0}, \end{aligned} \quad (4.2)$$



Rys. 7. Schemat blokowy realizacji automatycznego sterowania rakiety w systemie kinematycznym rakiety R – przeciwnik P

– w kanale pochylania θ_R :

$$T_3^H \delta_H^R + T_2^H \delta_H^R = K_\theta^H (\theta_R - \theta_z) + K_Q^H (Q_R - Q_z) + K_W^H (W_R - W_z) + K_x^H (x_1 - x_{1z}) + K_z^H (z_1 - z_{1z}) + \delta_{H0}^R, \quad (4.3)$$

– w kanale odchylenia ψ_R :

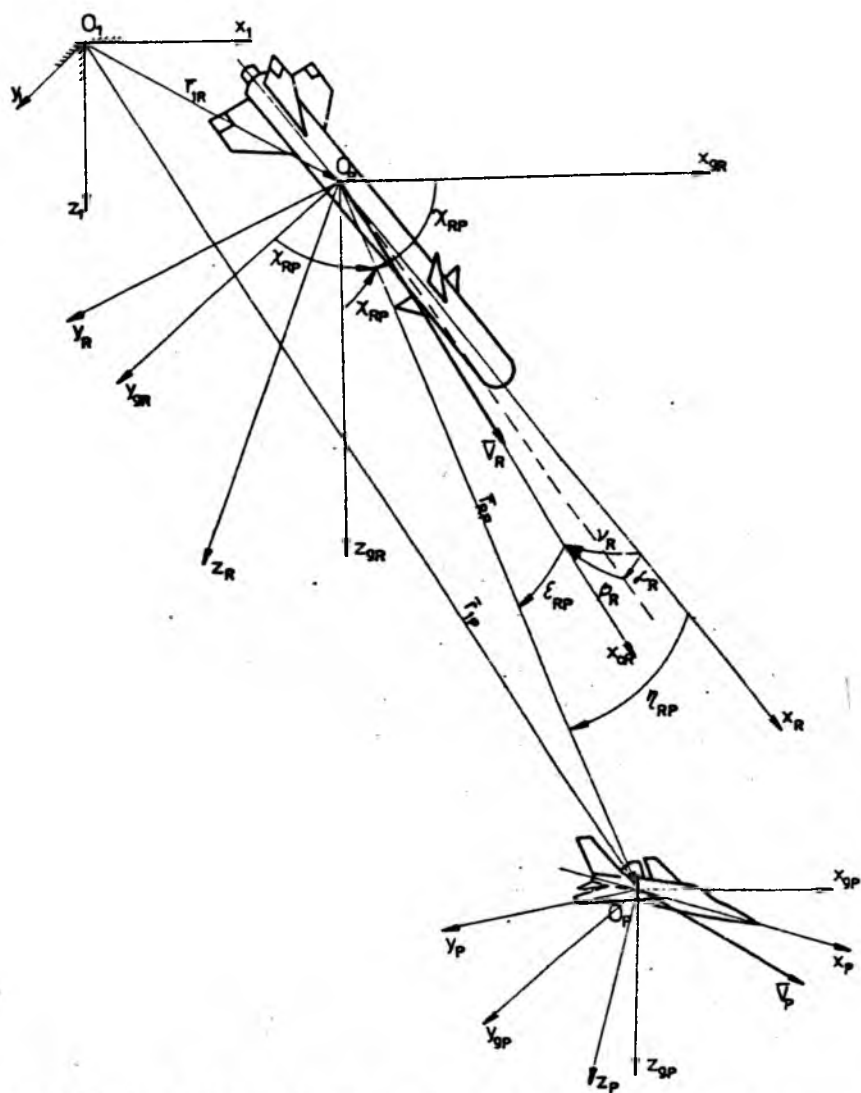
$$T_3^V \delta_V^R + T_2^V \delta_V^R = K_\phi^V (\phi_R - \phi_z) + K_P^V (P_R - P_z) + K_W^V (W_R - W_z) + K_y^V (y_1 - y_{1z}) + K_V^V (V_R - V_z) + K_\psi^V (\psi_R - \psi_z) + K_R^V (R_R - R_z) + \delta_{V0}^R. \quad (4.4)$$

Kinematyczne związki naprowadzania wiążą wzajemne położenia przeciwnika P i rakiety R oraz geometrię ich ruchu – w locie przestrzennym (rys.8), w ruchu płaskim w płaszczyźnie horyzontalnej (rys.9) lub w płaskim ruchu w płaszczyźnie pionowej (rys.10).

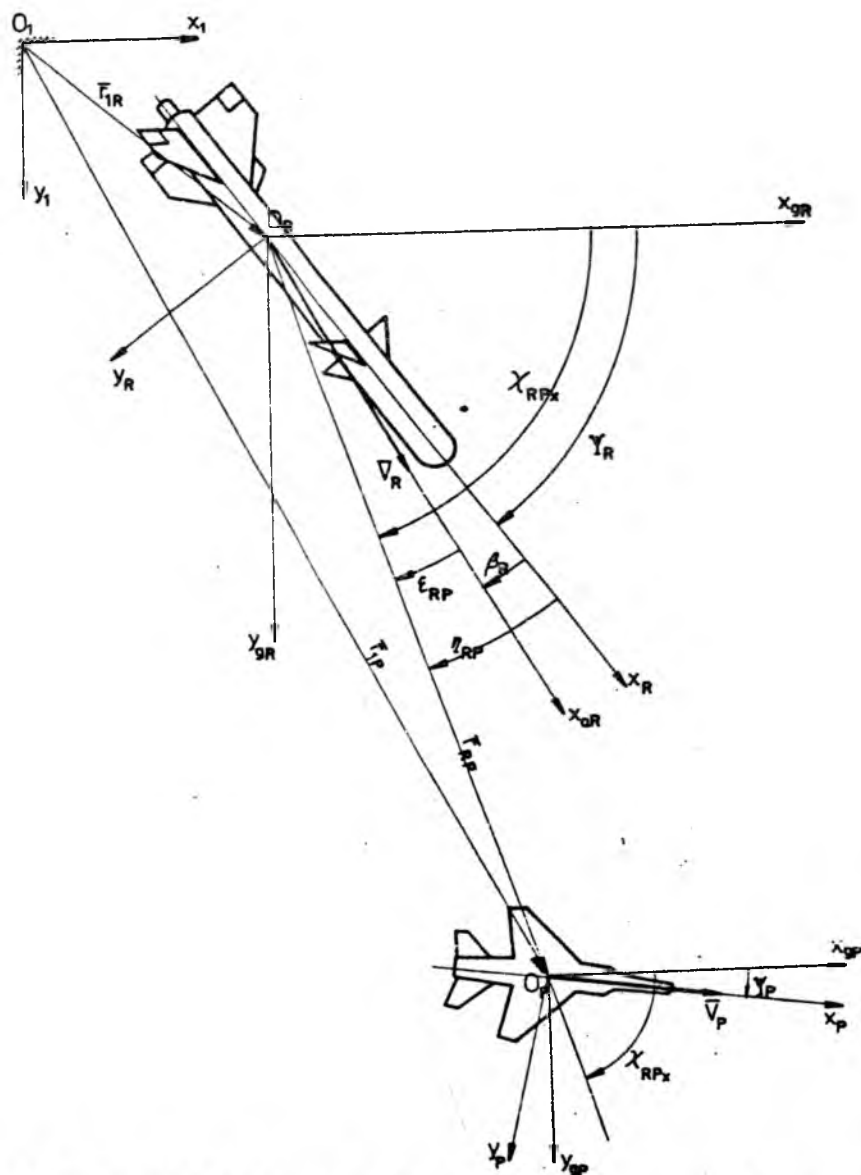
Kinematyczne związki naprowadzania stanowią wektory (rys.8, 9 i 10)

– wektor prędkości bezwzględnej rakiety R :

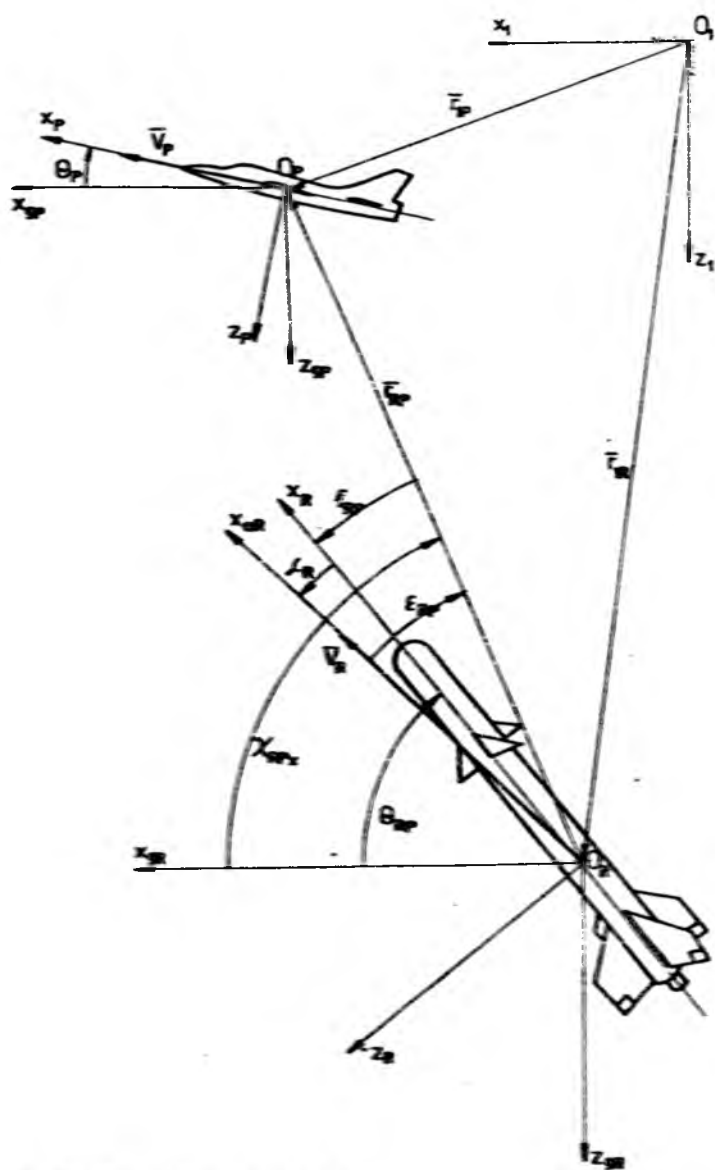
$$\dot{\mathbf{r}}_{1R} = f_3(V_R, V_P, \phi_P, \psi_P, \theta_P, \phi_R, \theta_R, \psi_R), \quad (4.5)$$



Rys. 8. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne i prędkości przy naprowadzaniu rakiety na przeciwnika w ruchu przestrzennym



Rys. 9. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne i prędkości przy naprowadzaniu rakiety na przeciwnika w ruchu płaskim w płaszczyźnie horyzontalnej



Rys. 10. Przyjęte układy odniesienia, współrzędne i prędkości przy naprowadzaniu rakiety na przeciwnika w ruchu płaskim w płaszczyźnie pionowej

– wektor prędkości względnej rakiety R względem przeciwnika P :

$$\dot{r}_{RP} = f_2(V_R, V_P, \varepsilon_{RP}, \nu_{RP}, \Phi_P, \Theta_P, \Psi_P, \Phi_R, \Theta_R, \Psi_R). \quad (4.6)$$

W przypadku lotu rakiety po zadanej trajektorii należy nałożyć na ruch rakiety więzy programowane:

$$r_1 = f_1(x_1, y_1, z_1, \Phi_z, \Theta_z, \Psi_z). \quad (4.7)$$

Wprowadzając do praw sterowania zadane parametry lotu, wynikające z zadanej trajektorii lotu oraz parametry lotu przeciwnika lub laserowej penetracji terenu, uzyskujemy właściwe automatyczne sterowanie rakiety.

Należy również uwzględnić dynamikę systemu wykonawczego sterowania rakietą, opisaną w postaci ogólnej zależności:

– kinematyczne równanie sterowania w kanale steru wysokości δ_H^R :

$$T_1^{HR} \delta_{dH}^R + T_0^{HR} \delta_{dH}^R = - \left(M_{z0}^{HR} + K_z^{\alpha_H^R} \alpha_H^R + K_z^{\delta_H^R} \delta_H^R + b_a^H \dot{\delta}_H^R \right), \quad (4.8)$$

– kinematyczne równanie sterowania w kanale steru kierunku δ_V^R :

$$T_1^{VR} \delta_{dV}^R + T_0^{VR} \delta_{dV}^R = - \left(M_{z0}^{VR} + K_z^{\beta_V^R} \beta_V^R + K_z^{\delta_V^R} \delta_V^R + b_a^V \dot{\delta}_V^R \right), \quad (4.9)$$

– kinematyczne równanie sterowania w kanale wychyleń lotek δ_L^R :

$$T_1^{LR} \delta_{dL}^R + T_0^{LR} \delta_{dL}^R = - \left(M_{z0}^{LR} + K_z^{\alpha_L^R} \alpha_L^R + K_z^{\delta_L^R} \delta_L^R + b_a^L \dot{\delta}_L^R \right). \quad (4.10)$$

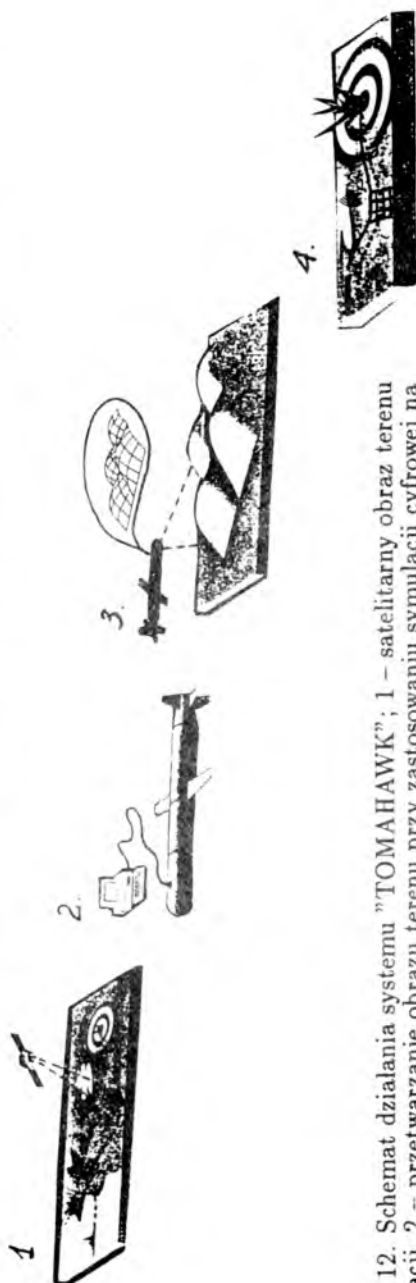
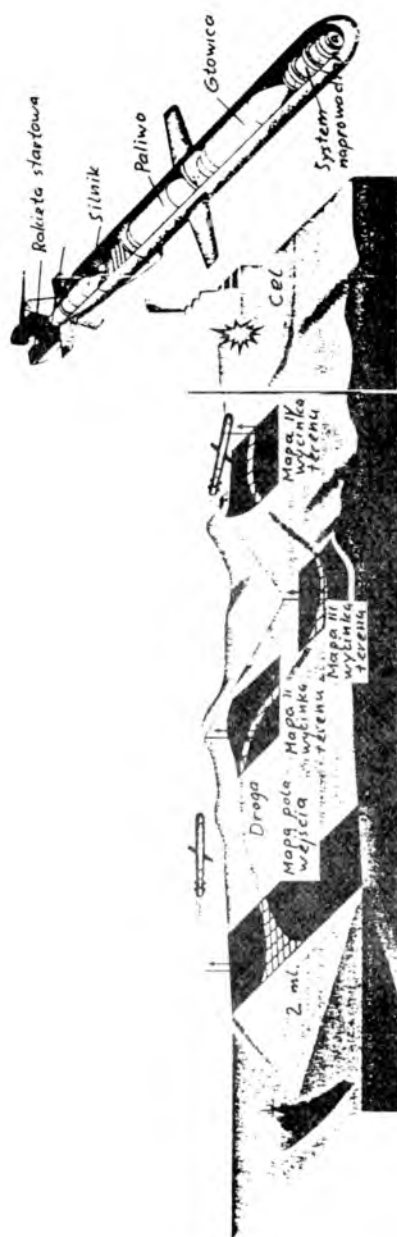
5. Uwagi i wnioski ogólne

Wyprowadzony model matematyczny umożliwia obliczenia i symulację numeryczną lotu samolotu z raketami, odpalania i samodzielnego lotu rakiety sterowanej. Może on mieć zastosowanie do rakiet dowolnej klasy: powietrze–powietrze, ziemia–ziemia lub ziemia–powietrze w różnych systemach naprowadzania.

Na rys.11 i 12 przykładowo przedstawiono systemy przechwytywania i naprowadzania wysoko technicznie rozwiniętych automatycznie sterowanych obiektów latających, działających wg. przedstawionego schematu.

Na rys.11 [3] przedstawiono schemat działania podstawowej jednostki systemu "PATRIOT" [3,11,13,15], natomiast na rys.12 [3] schemat działania systemu "TOMAHAWK" [2,3,11,14]. Te dwa systemy są dobrym przykładem wprowadzenia nowych technik w automatyzację procesu sterowania i nawigacji obiektów latających.

W systemie "PATRIOT" (rys.11) [3] połączono znane klasyczne metody naprowadzania na cel. Połączono metodę sygnałów kierujących (komend) 2, 5 z



Rys. 12. Schemat działania systemu "TOMAHAWK"; 1 – satelitarny obraz terenu operacji, 2 – przetwarzanie obrazu terenu przy zastosowaniu symulacji cyfrowej na "obraz komputerowy" i wczytywanie w pamięć operacyjną rakiety, 3 – lot rakiety nad terenem z równoczesną konfrontacją w pamięcią identyfikującą wczytany wcześniej obraz, 4 – rażenie celu

półaktywnym naprowadzaniem 2, 3. Przy tego rodzaju naprowadzaniu nazwanym "sygnałów kierujących ze śledzeniem celu poprzez pocisk raketowy" 2, 3, 4, 5. W pierwszej fazie naprowadzania pocisk jest kierowany tak jak w typowej metodzie sygnałów kierujących 2, 5. Gdy rakietą zbliży się do celu na tyle, że zacznie odbierać sygnały oświetlające cel 2 przez radar naziemny II, przesyła dane o współrzędnych celu na Ziemię 4. Po odbiorze ich i przetworzeniu w komputerze systemu, przekazuje się sygnały do urządzeń kierujących lotem pocisku na cel 5. Na końcowym odcinku toru rakietą przechodzi całkowicie na system półaktywnego naprowadzania 2, 3, dzięki czemu może skutecznie zwalczać rakiet balistyczne na pasywnym odcinku trajektorii.

Zastosowanie obserwacji i informacji o poruszających się celach poprzez system satelitarny I umożliwiło udoskonalenie systemu "PATRIOT", który rozwijano od 1965 roku.

Działanie systemu "TOMAHAWK", którego koncepcję przedstawiono na rys.12 [3], jest przykładem zastosowania automatyki w sterowaniu i nawigacji. W systemie wykorzystano zarówno ruch o więzach programowych 4, jak i automatyczną identyfikację terenu 3 z mapą operacyjną terenu (uzyskaną wcześniej na drodze zwiadu satelitarnego 1) wczytaną numerycznie 2 w pamięć rakiet.

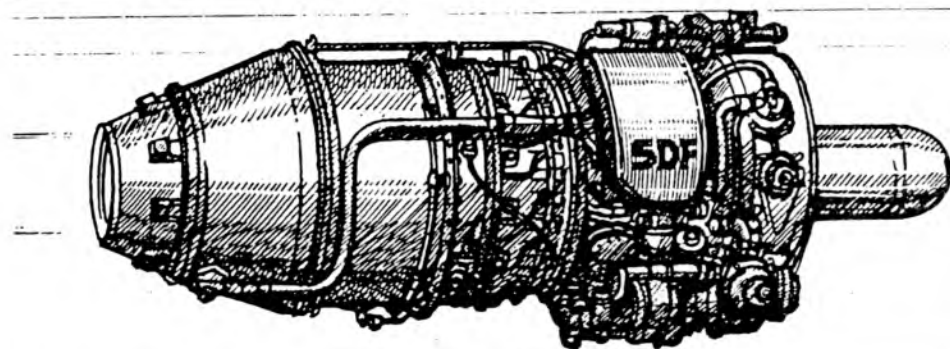
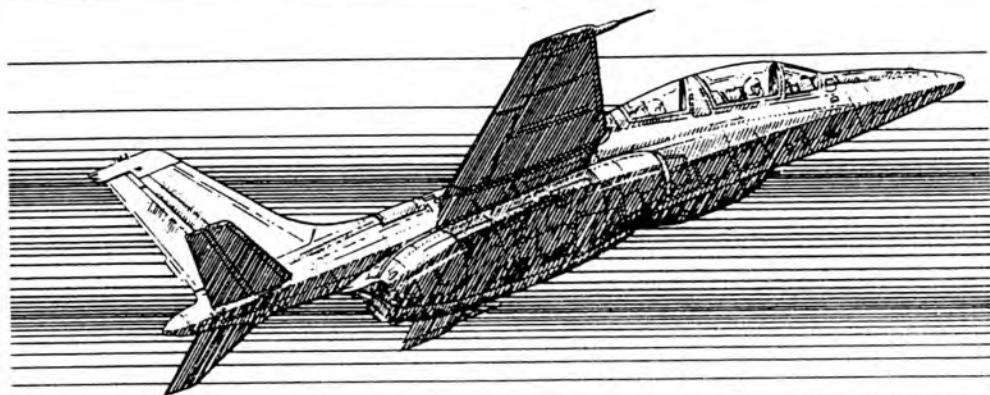
Literatura

1. DŻYGADŁO W., MARYNIAK J., 1990, *Dynamika samolotu po symetrycznym zrzućie podwieszę z zastosowaniem symulacji numerycznej*, MTiS, 28, 3-4
2. ELMER D.P., 1991, *Inside the High-Tech Arsenal*, Time, 4
3. MARYNIAK J., 1991, *Modelowanie matematyczne sterowanych obiektów ruchomych*, Materiały III Krajowej Konferencji Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia
4. MARYNIAK J., 1992, *Ogólny model matematyczny sterowanego samolotu*, Materiały IV Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w lotnictwie", PTMTS Oddział Warszawa
5. MARYNIAK J., 1975, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, 32
6. MARYNIAK J., 1987, *System symulacji trenazera lotu, naprowadzania walki i dowodzenia*, MTiS, 25, 1-2
7. MARYNIAK J., 1987, *modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, Referat plenarny, Zbiór referatów XXVI Sympozjonu "Modelowanie w mechanice", Gliwice-Kudowa
8. MARYNIAK J., 1987, *Prawa sterowania jako więzy nieholonomiczne automatycznego sterowania śmigłowcem*, MTiS, 25, 1-2
9. MARYNIAK J., 1989, *Modelowanie i symulacja w nawigacji i sterowaniu obiektów ruchomych*, Referat plenarny, II Krajowa Konferencja Automatyzacja Nawigacji i Systemów Sterowania, Gdynia

10. MARYNIAK J., 1990, *Zagadnienia symulacji lotu na symulatorach lotniczych-samolot, człowiek, symulator*, MTiS, 28, 3-4
11. MARYNIAK J., 1991, *Technika wojskowa nad Zatoką Perską*, Zebranie naukowe Oddziału Warszawskiego PTMTS
12. MARYNIAK J., 1985, *Ogólny model matematyczny własności dynamicznych obiektu latającego w ruchu przestrzennym*, ITLiMS Politechnika Warszawska, Sprawozdanie nr 140/85 (nie opublikowane)
13. 1980, *PATRIOT Air Defence for the 1980's and beyond*, Raytheon
14. SCHNEIDMAN J., 1991, *The Mind of Missile*, Newsweek, February 18
15. *A Patriot surface - to air missile*, *Air Defence Systems and Weapons*, Raytheon MIM-104

K-15

NOWY POLSKI SILNIK
JEDNOPRZEPŁYWOWY



INSTITUTE OF AVIATION

BRACHISTOCHRONA WYDŁUŻONA I SKRÓCONA JAKO TORY NAJSZYBSZEGO PRZECHWYTYWANIA¹

STANISŁAW DUBIEL

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Zajęto się poszukiwaniem optymalnych torów lotu samolotu przechwytyjącego cele powietrzne znajdujące się w przedniej i tylnej strefie w najkrótszym czasie. Wyjściowe warunki rozpoczęcia manewru przechwycenia z lotu poziomego dają dwa rozwiązania: cykloidę skróconą dla przechwytywania celu znajdującego się w przedniej strefie i cykloidę wydłużoną dla przechwytywania celu znajdującego się w tylnej strefie. Zwrócono również uwagę na możliwości wykorzystania rozwiązania w postaci cykloidy skróconej do profilowania zjazdowych torów narciarskich i saneczkowych.

Stosowane oznaczenia

x, z	- współrzędne w układzie Oxz ;
$-a, -b$	- współrzędne ostrza cykloidy;
c, d	- współrzędne punktu końcowego;
V	- prędkość lotu (ruchu);
t	- czas;
g	- przyspieszenie grawitacyjne;
$s = \omega(t - t_0)$	- parametr;
$\omega = ds/dt$	- prędkość kątowna koła wyznaczającego cykloidę;
α	- kąt natarcia;
γ	- kąt pochylenia stycznej do toru lotu (cykloidy);
P_x	- opór aerodynamiczny;
P_z	- siła nośna;
F	- ciąg silnika;
H	- funkcja Hamiltona;
λ_i	- zmienne sprzężone;

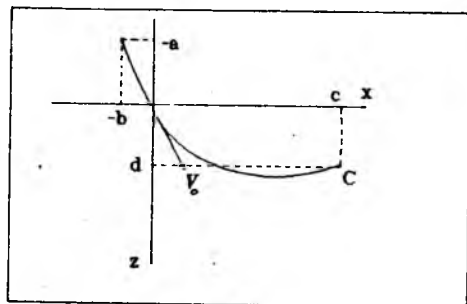
¹Referat wygłoszony na V Ogólnopolskiej Konferencji "Mechanika w Lotnictwie"

- λ - parametr cykloidy skróconej i wydłużonej;
- r - promień koła wyznaczającego cykloidę;
- h - odległość środka koła wyznaczającego cykloidę od osi $0x$;
- n_x - jednostkowe przyspieszenie styczne (przeciążenie styczne);
- n_z - jednostkowe przyspieszenie normalne (przeciążenie normalne).

1. Wprowadzenie

Sformułowane w 1696 roku przez Jana Bernoulliego zadanie o linii najszybszego spadku, nazwanej brachistochroną, i dość szybko rozwiązane, nabrało szczególnego znaczenia jako klasyczny przykład zadania z rachunku wariacyjnego. Omówienie tego rozwiązania w pracach z mechaniki, czy rachunku wariacyjnego ogranicza się zazwyczaj do formy reprezentującej cykloidę zwykłą. W większości przypadków dyskusję rozwiązania zadania ogranicza się dla zerowych warunków początkowych a więc $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ i $V_0 = 0$, [5,6,7].

Szerszą analizę problemu brachistochrony, zarówno pod względem badania funkcji tworzącej problem¹ jak i rozwiązania z niezerowymi warunkami początkowymi i zadanymi warunkami końcowym, ograniczającym się do położenia punktów: początkowego i końcowego, znaleźć można w "Rachunku wariacyjnym" K.Tatarkiewicza [9]. Jakolwiek rozważania dotyczą nadal cykloidy zwykłej, to jednakże wskazują na możliwość wykorzystania dowolnego odcinka tej cykloidy jak to pokazano na rys.1.



Rys. 1.

Zadanie takie nabrało ostatnio szczególnego znaczenia w problemie minimalno-

¹Przy okazji warto podkreślić ważną dla literatury w języku polskim propozycję prof.K.Tatarkiewicza, aby funkcję pod całką, definiującą funkcjonal badany, nazwać "funkcją tworzącą", jako że ta właśnie funkcja tworzy problem [9]

czasowego przechwytywania obiektów latających [4]. Autor rozprawy doktorskiej Andrzej Homziuk wykazał mianowicie, że zadanie o brachistochronie jest zadaniem wylaniającym się przy poszukiwaniu rozwiązania osobliwego w problemie minimalno-czasowym, potraktowanym zasadą maksimum Pontriagina [4]. Stawia to zadanie o brachistochronie w zupełnie nowym świetle jako ważny problem w mechanice lotu.

Ponowne zainteresowanie zadaniem o brachistochronie jest więc zrozumiałe i to jako zadanie sterowania optymalnego [1,2,3]. W pracach cytowanych nie rozszerza się zainteresowań brachistochroną poza cykloidę zwykłą, ale rozważa się ją w znaczeniu zupełnie odmiennym od dotychczasowego. Należy podkreślić, że w większości zagadnień z optymalizacji lotów obiektów latających, brachistochrona jako rozwiązanie osobliwe w ogóle nie występuje [8,11,12].

Dotychczasowe zainteresowanie brachistochroną – cykloidą zwykłą, w mechanice sprowadzały się do dwóch jej znaczeń. Jedno to krzywa najszybszego spadku zgodnie z definicją podaną przez Jana Bernoulliego. Drugie to wykorzystanie cykloidy do konstrukcji wahadła ze stałym okresem niezależnym od amplitudy wahań. To drugie znaczenie wyłoniło się z faktu, że cykloida jest tautochroną tj. krzywą, dla której czas "zsuwania" się punktu materialnego bez tarcia z dowolnego położenia do punktu najniższego jest stały. Wykorzystuje się tu odcinek cykloidy symetryczny, a więc taki którego punkty początkowe i końcowe mają te same rzędne.

Nowego znaczenia nabiera brachistochrona jako tor najszybszego przechwytywania w lotnictwie, lub jako tor najszybszego zjazdu narciarskiego. Znaczeniu temu poświęcone będą poniższe rozważania.

2. Brachistochrona w formie parametrycznej jako rozwiązanie zasadą maksimum

Wykorzystanie cykloidy zwykłej, jako częściowego toru w problemie przechwytywania minimalno-czasowego z niezerowymi warunkami początkowymi, sprowadza się do wyznaczenia tej krzywej dla $V_0 \neq 0$ ale kierunek tej prędkości jest określony kierunkiem stycznej do cykloidy w punkcie początkowym. Wówczas jest łatwo wyznaczyć ostrze cykloidy, której odcinek chce się wykorzystać. Obiekt latający (samolot lub rakieta) musi być na ten kierunek naprowadzony. Do tego celu nadaje się doskonale rozwiązanie we współrzędnych kartezjańskich jako wynik zasady maksimum [1].

Nieco odmiennego potraktowania wymaga zadanie z prędkością początkową o kierunku z góry ustalonym. Wyjściowymi warunkami przechwytywania samolotem są warunki lotu poziomego, a zatem $V_0 = dx/dt \neq 0$ przy $dz/dt = 0$ [10]. Cykloida zwykła ma tylko jeden punkt z niezerową prędkością poziomą i

zerową prędkością wznoszenia. Jest nią najniższy punkt cykloidy, z którego przechwycenie celu jest możliwe tylko wówczas kiedy cel znajduje się wyżej od obiektu przechwytywanego. Ogranicza to poważnie możliwości jej wykorzystania. Poniżej rozważa się możliwości wykorzystania równań i rozwiązań krzywej najszybszego spadku dla dowolnych warunków początkowych i końcowych.

Równania lotu samolotu (czy rakiety) rozważa się we współrzędnych przepływu i ogranicza do równań ruchu środka masy, zgodnie z ujęciem lotu sterowanego jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi. Sterowany idealnie lot traktuje się jako ruch nieswobodny z więzami klasycznymi, której równaniem będzie krzywa najszybszego przechwycenia. Równania takie przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -g \sin \gamma + \frac{F}{m} - \frac{P_x}{m}, \\ V \frac{d\gamma}{dt} &= -g \cos \gamma + \left(\frac{F}{m} + \frac{P_z^\alpha}{m} \right) \alpha, \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \gamma, \\ \frac{dz}{dt} &= V \sin \gamma.\end{aligned}\tag{2.1}$$

oraz:

$$I = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt.\tag{2.2}$$

Funkcjonał jakości (2.2) oraz drugie równanie układu (2.1) spełniają równanie więzów, a ściślej programu sterowania, realizującego lot po krzywej najszybszego przechwycenia. Wprowadza się jednostkowe przyspieszenia styczne i normalne w formie:

$$\begin{aligned}n_x g &= \frac{F - P_x}{m}, \\ n_z g &= \frac{F + P_z^\alpha}{m} \alpha.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Rozważa się głównie przypadek, dla którego zmiana prędkości zachodzi tylko na skutek działania przyspieszenia grawitacyjnego, a zatem:

$$n_x g = \frac{F - P_x}{m} = 0,\tag{2.3'}$$

oraz:

$$n_z g = \frac{P_z - P_z^\alpha}{m} \alpha.\tag{2.3''}$$

Przypadek ten nie odbiega od warunku lotu samolotu, ponieważ lot ustalony realizowany jest z warunkiem $F = P_x$, zaś do zmiany prędkości wykorzystuje

się chętnie energię potencjalną, a więc zapas wysokości. Wyznacza się zatem tor najszybszego przechwytywania przy założeniu $n_x = 0$. Potrzebne do sterowania lotem po krzywej najszybszego przechwytywania przyspieszenie normalne, realizowane jest zmianą kąta natarcia α w wyrażeniu (2.3''). Zależne ono jest od prędkości i krzywizny toru, nie decyduje zatem o kształcie krzywej. Pełny układ równań określający poszukiwany tor lotu przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -g \sin u, \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos u, \\ \frac{dz}{dt} &= V \sin u, \\ I &= \int_{t_0}^{t_1} dt,\end{aligned}\tag{2.4}$$

gdzie kąt pochylenia stycznej do toru traktuje się jako poszukiwanie sterowania $\gamma = u$. Wykorzystuje się w dalszym ciągu zaproponowane rozwiązanie zadania zasadą maksimum [3] z tym, że w myśl warunku (2.3') opór aerodynamiczny nie występuje.

Funkcja Hamiltona przyjmuje postać:

$$H(\lambda, V, x, z, u) = \lambda_0 + \lambda_1 g \sin u + \lambda_2 V \cos u + \lambda_3 V \sin u,\tag{2.5}$$

zaś po zgrupowaniu:

$$H(\lambda, V, x, z, u) = \lambda_0 + (\lambda_1 g + \lambda_3 V) \sin u + \lambda_2 V \cos u.\tag{2.5'}$$

W myśl związku:

$$A \sin u + B \cos u = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(u - \arctg \frac{A}{B}\right),$$

sterowanie optymalne otrzymuje się z warunku:

$$H_{max} = \lambda_0 + \sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2} \cos\left(u - \arctg \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_2 V}\right).\tag{2.6}$$

Ponieważ nie wprowadzono ograniczenia na sterowanie u zatem poszukuje się sterowania osobiwego z wnętrza obszaru, czyli dla warunku:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,\tag{2.7}$$

co daje związek:

$$\sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2} \sin\left(u^* - \arctg \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_2 V}\right) = 0,$$

a więc:

$$u^* - \arctg \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_2 V} = 0. \quad (2.7')$$

Wstępna analiza zmiennych sprzężonych daje:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t),$$

$$\lambda_2 = \text{const},$$

$$\lambda_3 = \text{const}.$$

Warunek minimalno-czasowego przechwycenia (2.7') można przedstawić w formie:

$$\text{tg} u^* = \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{\lambda_2 V}, \quad (2.7'')$$

co prowadzi do wyrażenia:

$$\sin u^* = \frac{\lambda_1 g + \lambda_3 V}{|\lambda_0|}, \quad \cos u^* = \frac{\lambda_2 V}{|\lambda_0|}, \quad (2.8)$$

przy czym:

$$|\lambda_0| = \sqrt{(\lambda_1 g + \lambda_3 V)^2 + \lambda_2^2 V^2} = \text{const}. \quad (2.8')$$

Przejście na V jako zmienną niezależną zezwala równanie (2.4) przedstawić w formie:

$$\frac{dx}{dV} = \frac{V}{g} \text{ctg} u, \quad \frac{dz}{dV} = \frac{V}{g}. \quad (2.9)$$

Wykorzystanie związków (2.7'') i (2.8) prowadzi do postaci:

$$\frac{dx}{dV} = \frac{V}{g} \frac{V}{\sqrt{A^2 - V^2}}, \quad \frac{dz}{dV} = \frac{V}{g}, \quad (2.9')$$

gdzie:

$$A = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \text{const}.$$

Podstawienie:

$$V = A \sin \omega'(t - t_0),$$

$$dV = A \omega' \cos \omega'(t - t_0),$$

daje równania:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dV} &= \frac{A^2}{g} \omega' \sin^2 \omega'(t - t_0), \\ \frac{dz}{dV} &= \frac{V}{2g} \omega' \sin \omega'(t - t_0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wyodrębnienie równań różniczkowych (2.10) jest niezbędne ze względu na konieczność wprowadzenia prędkości początkowej o dowolnym kierunku. Scałkowanie równań (2.10) daje równania cykloidy zwykłej dla $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ o postaci:

$$x(t) = \frac{A^2}{4g} [2\omega'(t - t_0) - \sin 2\omega'(t - t_0)] , \quad (2.10')$$

$$z(t) = \frac{A^2}{4g} [1 - \cos 2\omega'(t - t_0)] .$$

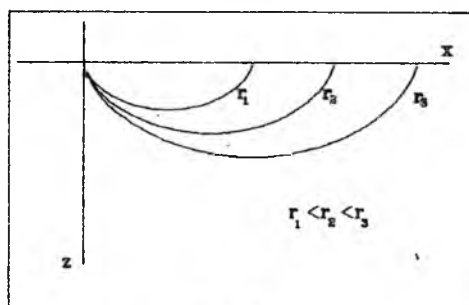
Wprowadzenie oznaczeń:

$$C = \frac{A^2}{4g} = \frac{\lambda_0^2}{4g\lambda_2^2} = 2r , \quad 2\omega'(t - t_0) = s ,$$

daje znane równania parametryczne cykloidy:

$$x(s) = r(s - \sin s) , \quad z(s) = r(1 - \cos s) . \quad (2.10'')$$

Zależne od wartości stałej C (promienia r) rozwiązania w formie graficznej przedstawia rysunek 2.



Rys. 2.

W przypadku, dla którego przyjmuje się $V_0 \neq 0$, punkt początkowy poszczególnych cykloid przesuwają się o:

$$z_0 = \sqrt{\frac{V^2}{2g}} .$$

Wybranie odpowiedniej wartości r wyznacza się z warunków punktu końcowego $x_1 = c$, $z_1 = d$. Współrzędne punktu początkowego wyznacza się:

$$a = x_0 , \quad b = \frac{V}{\sqrt{2g}} .$$

Punkty początkowe i końcowe wycinają interesujący odcinek cykloidy jeśli istnieje rozwiązanie układu równań:

$$r(s_0 - \sin s_0) + a = 0, \quad r(s_1 - \sin s_1) + a = c, \quad (2.11)$$

$$r(1 - \sin s_0) + b = 0, \quad r(1 - \sin s_1) + b = d.$$

Inną formę wycinania poszukiwanego odcinka cykloidy daje rozwiązanie we współrzędnych kartezjańskich, gdzie cykloidę przesuwa się odpowiednio dla warunków $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ i $V_0 = 0$ zgodnie z zasadą pokazaną w pracy [1]. Z punktów końcowych wyznacza się odpowiednią gałąź i ustala odpowiedni promień r .

3. Cykloida skrócona jako tor najszybszego przechwytywania celu w przedniej strefie

Zadanie przechwycenia celu w przedniej strefie ustalają następujące warunki początkowe dla $t = t_0$, $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ i $V_0 = (dz/dt)_0 \neq 0$, $(dx/dt)_0 = 0$. Celem uzyskania odpowiedniego rozwiązania proponuje się wykorzystanie równań różniczkowych (2.10). Początkowe wartości składowych prędkości wprowadza się do równań różniczkowych:

$$\frac{dz}{dt} = h(1 - \cos s) \frac{ds}{dt} + \left(\frac{dz}{dt}\right)_0, \quad (3.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = h \sin s \frac{ds}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0,$$

gdzie $ds/dt = \omega$ – prędkość kątowna koła toczącego się po prostej.

Ponieważ najczęstszym przypadkiem rozpoczęcia przechwytywania przez samolot jest lot poziomy zatem $(dz/dt)_0 = 0$. Scałkowaniu podlegają więc równania:

$$\frac{dz}{dt} = h\omega(1 - \cos s) + V_0, \quad \frac{dx}{dt} = h\omega \sin s. \quad (3.1')$$

Rozwiązanie tych równań daje równanie cykloidy skróconej o postaci:

$$x(s) = r(s - \lambda \sin s), \quad (3.2)$$

$$z(s) = r(1 - \lambda \sin s) - \frac{V_0}{\omega}.$$

gdzie:

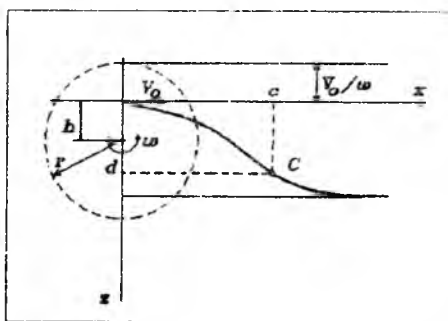
$$r = h + \frac{V_0}{\omega}, \quad \lambda = \frac{h}{r}, \quad s = \omega(t - t_0),$$

przy czym $\lambda < 1$.

Niewiadome $r, \omega, \lambda, s_0, s_1$ wyznacza się z następujących związków dla $x_0 = 0, z_0 = 0, V_0 \neq 0, x_1 = c$ i $z_1 = d$:

$$\begin{aligned} r(s_0 - \lambda \sin s_0) &= 0, & r(s_1 - \lambda \sin s_1) &= c, \\ r(1 - \lambda \sin s_0) - \frac{V_0}{\omega} &= 0, & r(1 - \sin s_1) - \frac{V_0}{\omega} &= d. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Krzywą najszybszego przechwytywania uzyskuje się jako krzywą wykreśloną przez punkt P znajdujący się na promieniu r koła toczącego się po prostej przesuniętej do góry równolegle do osi Ox o odległość $V_0/\omega = -Z_p$. Odległość punktu P od środka koła wynosi $OP = h$, zatem $\lambda < 1$. Obraz graficzny toru najszybszego przechwycenia celu z przedniej strefy przedstawia rys.3.



Rys. 3.

Dodatkowy warunek dla wyznaczenia piątej niewiadomej, do warunków (3.3) otrzymuje się ze związku uzyskanego dla $s = \Pi$. Wówczas $Z_{max} = 2h$ zaś prędkość w najniższym punkcie cykloidy skróconej określa się:

$$V_{max} = \sqrt{V_0^2 + 4gh},$$

stąd uzyskamy prędkość kątową toczącego się koła:

$$\omega = \frac{V_{max}}{r + h} = \frac{V_{max}}{r(1 + \lambda)} \quad (3.4)$$

4. Cykloida wydłużona jako tor najszybszego przechwytywania celu w tylnej strefie

Analogiczne rozwiązanie uzyskuje się dla celu znajdującego się w tyle za

lącym samolotem. Wówczas prędkość początkowa równa prędkości lotu poziomego samolotu:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -V_0,$$

zaś równania wyjściowe:

$$\frac{dx}{dt} = h\omega(1 - \cos s) - V_0, \quad (4.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = h\omega \sin s.$$

Rozwiązania równań (4.1) mają postać identyczną do rozwiązania równań (3.1') z tą różnicą, że $\lambda > 1$.

$$x(s) = r(s - \lambda \sin s), \quad (4.2)$$

$$z(s) = r(1 - \lambda \sin s) + \frac{V_0}{\omega}.$$

gdzie:

$$r = h - \frac{V_0}{\omega}, \quad \lambda = \frac{h}{r}, \quad s = \omega(t - t_0),$$

przy czym tym razem $\lambda > 1$, zaś h jest odległością środka koła tocącego się od osi Ox po prostej przesuniętej tym razem w dół równolegle do osi Ox o wielkość V_0/ω . Analogiczne niewiadome $r, \omega, \lambda, s_0, s_1$ wyznacza się z warunków początkowych czyli dla $x_0 = 0, z_0 = 0, x_1 = c, z_1 = d$ i $(dx/dt)_0 = -V_0$:

$$r(s_0 - \lambda \sin s_0) = 0, \quad r(s_1 - \lambda \sin s_1) = c, \quad (4.3)$$

$$r(1 - \lambda \sin s_0) + \frac{V_0}{\omega} = 0, \quad r(1 - \sin s_1) + \frac{V_0}{\omega} = d.$$

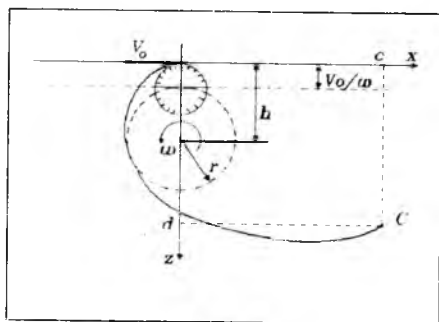
oraz:

$$\omega = \frac{V_{max}}{r + h} = \frac{V_{max}}{r(1 + \lambda)}, \quad V_{max} = \sqrt{V_0^2 + 4gh}. \quad (4.3')$$

Graficzny obraz toru najszybszego przechwytywania celu w tylnej półsferze przedstawia rysunek 4. Praktyczna realizacja lotu po takim torze wymaga zastosowania znanego w lotnictwie manewru zwanego przewrotem bojowym.

5. Podsumowanie

Przytoczone tory najszybszego przechwytywania w postaci cykloidy skróconej i wydłużonej nie wyczerpują całkowicie problemu minimalno-czasowego co najmniej z dwóch powodów.



Rys. 4.

Pierwszy to przyjęcie $n_x = 0$ co nie jest zasadą w czasie lotu samolotu. W locie poziomym samolot dysponuje z zasady pewnym nadmiarem ciągu i zazwyczaj dyspozycyjna wartość $n_{xd} > 0$. Jeśli nawet dla prędkości maksymalnej $n_{xd} = 0$ to istotnie w fazie początkowej $n_x = 0$, zaś ze wzrostem prędkości n_x będzie mniejsze od zera. Zatem przypadek taki musi być rozpatrywany z oporem aerodynamicznym jak to pokazano w pracy [3].

Drugi powód to fakt, że rozwiązania osobliwe nie są rozwiązaniami granicznymi. Możliwości manewrowe samolotu są znacznie wyższe od wymaganych dla lotu po brachistochronie, ponieważ zależności określone wzorem (2.3'') muszą spełniać warunek:

$$(n_z g)^2 - (n_{zd} g)^2 \leq 0.$$

Rozwiązaniami granicznymi będą więc rozwiązania z dopuszczalnymi przyspieszeniami granicznymi czyli dla:

$$n_z = \pm n_{zd} \quad \text{lub} \quad V \frac{d\gamma}{dt} + \cos \gamma = \pm n_{zd} g,$$

a to daje dodatkowe możliwości skrócenia czasu przechwycenia.

Przechwytywanie torami wyznaczonymi w niniejszej pracy jest możliwe dla takich warunków końcowych, a więc $x_1 = c$ i $z_1 = d$, dla których istnieją rozwiązania równań trygonometrycznych (3.3) i (3.3') dla przedniej strefy oraz (4.3) i (4.3') dla tylnej strefy lub wyznaczenia strefy nieosiągalnej co jest znacznie łatwiejsze.

Określenie obszarów możliwego przechwytywania wymaga ztem rozwiązania problemu minimalno-czasowego i oddzielnego opracowania łącznie z rozwiązaniami granicznymi oraz wyznaczania brachistochrony z nadmiarem ciągu lub z oporem aerodynamicznym. Problemem dodatkowym jest wykazanie czy korzystniej będzie posługiwać się cykloidą zwykłą, czy wszystkimi jej odmianami.

Na zakończenie warto podkreślić możliwość wykorzystania brachistochrony skróconej do profilowania narciarskich torów zjazdowych, czy torów saneczkowych.

Uzyskanie jednakże wyników miarodajnych wymaga rozwiązania zadania z oporem tarcia i oporem aerodynamicznym zgodnie z zamierzeniem podanym w pracy [3] dla obiektów latających. Wyniki takie zezwolą ustalić na ile bliskim były tory, które zalecano profilować na krzywej zwanej "*Lokiem Agnesi'ego*" do torów najszybszego "zjazdu". Wymaga to również oddzielnego potraktowania.

Literatura

1. DUBIEL S., HOMZIUK A., 1991, *Rozwiązanie zadania o brachistochronie metodą maksimum Pontriagina*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 29, 1
2. DUBIEL S., 1991, *Optymalne sterowanie w układach mechanicznych*, Materiały III Konferencji Naukowo Technicznej Akademii Marynarki Wojennej "Automatyzacja nawigacji i systemów sterowania", Gdynia
3. HOMZIUK A., 1992, *Rozwiązanie zadania o brachistochronie z oporem aerodynamicznym*, Materiały V Konferencji "Mechanika w Lotnictwie", Warszawa
4. HOMZIUK A., 1989, *Minimalno-czasowe strefy sterowalności rakiet przeciwlotniczych*, Rozprawa doktorska, promotor prof. dr hab. inż. Dubiel S., WAT, Warszawa
5. ELSGOLC L.E., 1960, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa
6. HUBER M.T., 1956, *Mechanika ogólna i techniczna*, PWN, Warszawa
7. GELFAND J.M., FOMIN S.W., 1972, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa
8. LEITMAN G., (redaktor), 1965, *Metody optyimizacji z prilożeniami k mechanike kosmiczkiego polęta*, Izd. "Nauka", Moskwa
9. TATARKIEWICZ K., 1969, *Rachunek wariacyjny cz.1*, WNT, Warszawa
10. THEODORSEN T., 1959, *Optimum patth to climb*, JA/S.S. Nr.10
11. *Issledovanie optimalnych režimov dviżenija raket*, Izd. J.L., Moskwa 1959
12. *Problemy dviżenija golownoj časti raket dalnogo dejstvija*, Izd. J.L., Moskwa 1959

SPIS TREŚCI

- Narkiewicz J., Syrczyński J. — Obliczanie niestacjonarnych obciążeń aerodynamicznych profilu w funkcji zmiennych stanu 3
- JesioneK K.J. — Obliczanie strat całkowitych turbulentnego przepływu w dyfuzorach pierścieniowych 19
- Wysocki Z. — Badania możliwości znacznej redukcji wybranej pochodnej współczynnika momentu zawiasowego steru wysokości na drodze modyfikacji jego geometrii 27
- Złocka M.A. — O pewnej metodzie upraszczania modelu ruchu samolotu 39
- Koczorowski Z., Manerowski J., Zgrzywa F. — Model dynamiki lotu samolotów do imitatorów nawigacyjnych 53
- Bęczkowski G., Manerowski J., Rymaszewski S., Zgrzywa F. — Numeryczna analiza parametrów ruchu modelu samolotu bojowego w nawigacyjnych układach współrzędnych 61
- Borowski J., Sobieraj W. — Wpływ stopnia uproszczenia modelu na symulację dynamiki samolotu jako obiektu sterowania 71
- Ortyl A. — Model procesu wstępnej orientacji bezkardanowego systemu nawigacji inercyjnej 85
- Ciężki G., Sobieraj W. — Ocena możliwości wykonywania lotów ze śledzeniem rzeźby terenu na podstawie analizy właściwości dynamicznych samolotu 97
- Rahman M., Maryniak J. — Symulacja numeryczna lotu samolotu pasażerskiego w oparciu o zapis parametrów dla samolotu IL-62M 109
- Flouti R., Maryniak J. — Wpływ awarii silników w dowolnej konfiguracji na lot samolotu pasażerskiego "klasy" IL-62M 123
- Jeż M., Świder A. — Badanie drgań skrętnych lotniczego silnika tłokowego ze śmigłem 137

- **Dul F.A.** — Metody symulacyjne badania stateczności aeroelastycznej 161
- **Dul F.A.** — Analiza flutterowa skrzydła opisanego modelem całkowo-
różniczkowym za pomocą metody symulacyjnej 181
- **Niepokólczycki A.** — Próba odwzorowania obciążeń akustycznych w ba-
daniach trwałości przekładkowego steru wysokości samolotu I-22 w hamowni
za silnikiem K-15 199
- **Gacek J.** — Identyfikacja właściwości dynamicznych imitatora celu powie-
trznego 207
- **Niczyporuk J.** — Dziedziny funkcjonowania obiektu powietrze-powietrze
w sytuacji celu manewrującego w płaszczyźnie pionowej 219
- **Homziuk A.** — Rozwiązanie zadania o brachistochronie z oporem aerody-
namicznym metodą maksimum Pontriagina 243
- **Dubiel S., Kamola J.** — Minimalizacja bliższej granicy strefy przechwy-
cenia celu w polu grawitacyjnym 251
- **Gacek J., Machowski B., Sienicki K.** — Modelowanie i analiza
właściwości dynamicznych rakiet przeciwpancernych 271
- **Gacek J., Machowski B., Sienicki K.** — Koncepcja symulatora procesu
naprowadzania PPK 285
- **Dubiel S., Machowski B., Sienicki K.** — Analiza dynamiki rakiety
metodą komputerowej linearyzacji równań ruchu 291
- **Skomra A.** — Ocena dokładności naprowadzenia rakiety samonaprowadza-
jącej się na cel 303
- **Niczyporuk J.** — Charakterystyki bazowe systemu procesów spadku za-
sobnika lotniczego 311
- **Goetzendorf-Grabowski T.** — Zastosowanie metody "pudełek Macha"
do wyznaczania obciążeń i pochodnych aerodynamicznych samolotu w za-
kresie naddźwiękowym 337
- **Łucjanek W., Szumański K.** — Analiza metod sterowania kierunkowego
śmigłowców jednowirnikowych 351
- **Szabelski K., Kamiński C.** — Rezonans naziemny śmigłowca jako układu
nieliniowego z dwoma rodzajami wymuszenia parametrycznego 367

- **Rochała Z.** — Problematyka diagnozowania wyposażenia pokładowego statków powietrznych **379**
- **Kończak J.** — Analiza koncepcji modułowego samolotu pola walki i wielozadaniowego **391**
- **Pyzik L., Sobieraj W.** — Symulacja numeryczna pracy lotniczego, tłokowego zespołu napędowego, oraz ocena jego pracy na podstawie analizy harmonicznej poziomu drgań **403**
- **Dźygadło Z., Kowaleczko G.** — Analiza wpływu autopilota na ruchy własne śmigłowca jednowirnikowego **427**
- **Dźygadło Z., Nowotarski I., Olejnik A., Zalewski P., Mrozek B.** — Zastosowanie dyskretnego modelu dynamicznego do analizy drgań i prędkości krytycznych podwójnego wirnika lotniczego silnika turbinowego **439**
- **Maryniak J., Pedro J.** — Wpływ uskoku wiatru typu "microburst" na lot startującego samolotu **451**
- **Dźygadło Z., Sibilski K.** — Modelowanie dynamiki przestrzennego ruchu samolotu po uszkodzeniu usterzenia wysokości **467**
- **Szczepański C.** — Metoda analizy i syntezy układu automatycznego sterowania lotem samolotu **479**
- **Szczepański C., Gajda J., Zagdański Z.** — System symulatora walki powietrznej **489**
- **Żółtak J., Kania W., Godlewski J.** — Wpływ zmiennego wzdłuż rozpiętości rozkładu względnej grubości skrzydła na jego własności aerodynamiczne w zakresie prędkości transonicznych **497**
- **Kacprzyk J.** — Eksperymentalne badania wpływu płatowca na współczynniki aerodynamiczne podwieszeń **511**
- **Maryniak J., Małecki J.** — Dynamiczne równania ruchu platformy uniwersalnego symulatora lotu o sześciu stopniach swobody **519**
- **Małecki J.** — Kinematyka platformy uniwersalnego symulatora lotu o sześciu stopniach swobody **535**
- **Dźygadło W., Maryniak J.** — Model dynamiki ruchu samolotu po niesymetrycznym zrzuć podwieszeń w trakcie wykonywania manewrów przestrzennych **543**

- Michalski W.J.J., Złocka M.A. — Wprowadzanie czynne samolotu w korkociąg 561
- Maryniak J. — Ogólny model matematyczny sterowanego samolotu 575
- Maryniak J. — Modelowanie odpalania i lotu rakiety klasy powietrze-powietrze 593
- Dubiel S. — Brachistochrona wydłużona i skrócona jako tory najszybszego przechwytywania 615



THE PZL-130 ORLIK TRAINING AIRCRAFT



A fully acrobatic turboprop tandem two-seat military trainer which, as a result of specific design, comprises jet like handling qualities, maintaining low training costs, characteristic for turboprop power. Due to these features, a wide training syllabus is possible, containing also the phases normally executed on costly jets only. The jet-pilot cues on a propeller driven plane are the result of the following:

- aircraft general geometry - low aspect ratio wing and high surface loading, maintaining low draw and power loading;

- cockpit interior design, general arrangement and instrumentation, similar to typical jet-plane cockpit.

A combined effect of the minimal overall dimensions, low weight and high power, result in:

- excellent performance - both, level speed and jet-like climb;

possibility to take significant underwing stores, giving a wide spectrum of training tasks.

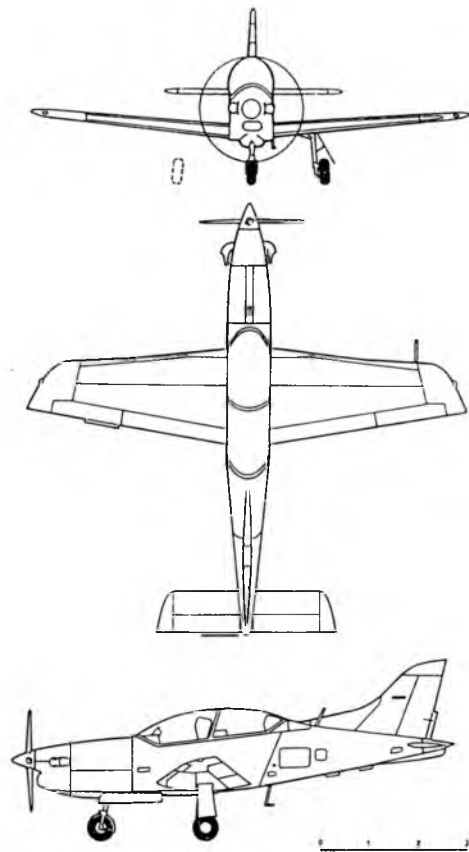
The aircraft consists of a semimonocoque all metal low wing structure with retractable tricycle-type landing gear and is powered by the Czechoslovak Walter M.601T

engine rated 560 kW (i.e. 750 HP) or by 3 other kinds of Pratt & Whitney Canada engines of the PT6A family, rated from 405 to 700 kW (550 to 950 HP).

It comprises systems like the electric, hydraulic, pneumatic, air conditioning, oxygen supply and the escape (ejection seats) systems.

An audio integrating system controls the audio services from all the communication, navigation and interphone systems. On customer demand, single or dual VHF, UHF and/or HF systems may be installed. Both cockpits are to be fully instrumented and furnished according to customer's specification. The optional equipment pattern includes various avionic and flight instrumentation systems from simple ones, up to very sophisticated with GPS, LORAN, ILS, MLS, FMS, EFIS and HUD included. Also systems like the de-icing, emergency locator, anti-g etc. may be installed.

Any other requirement of the customer, will be investigated with great care. The manufacturer is ready to start talks concerning details of equipment any time. The deliveries can start in about one year after contract signing.



Technical data

Seating tandem

Length 9.0m

Span 9.0 m

Wing area 13.0 m²

Internal fuel 560 l

Performances

Engine rating 950 HP 750 HP

Maximum level speed 560 km/h 500 km/h

Stalling speed 112 km/h 112 km/h

Initial climb 20.6 m/s 13.3 m/s

Ceiling 10000m 10000 m

Take-off run 172 m 220 m

Landing run 184 m 184 m

Range (without stores) 930 km 1000 km

Masses:

Empty with M.601T 1600 kg

Empty with PT6A-62 1450 kg

Maximum take-off 2700 kg

Maximum underwing stores 800 kg



Producer:
PAŃSTWOWE ZAKŁADY LOTNICZE "WARSZAWA AL.
Krakowska 110/114.
Phone: 022/460903;
Fax: 022/462701; Tlx: 817735



Exporter:
PEZETEL
Przedsiębiorstwo Handlu Zagranicznego
Spółka z o.o.
Aleja Stanów Zjednoczonych 61
04-028 Warszawa 50
Telefon: (0 22) 10-80-01
Teleks: 81 4651, 81 2815
telefaks: (0 22) 13-23-56