

## WYKORZYSTANIE METOD OPTIMALIZACYJNYCH DO STEROWANIA POCISKIEM RAKIETOWYM WYPOSAŻONYM W ZESTAW SILNIKÓW KOREKCYJNYCH NA STAŁY MATERIAŁ PĘDNY

DARIUSZ MIEDZIŃSKI, ROBERT GŁĘBOCKI, MARIUSZ JACEWICZ

*Politechnika Warszawska, Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa*

*e-mail: [dariusz.miedzinski2.dokt@pw.edu.pl](mailto:dariusz.miedzinski2.dokt@pw.edu.pl); [robert.glebocki@pw.edu.pl](mailto:robert.glebocki@pw.edu.pl); [mariusz.jacewicz@pw.edu.pl](mailto:mariusz.jacewicz@pw.edu.pl)*

W poniższym artykule przedstawiono możliwości wykorzystania metod optymalizacyjnych do sterowania rakieta wyposażoną w zestaw silników korekcyjnych na stały materiał pędny. Optymalizacja jest istotnym procesem wykorzystywanym w procesie projektowania obiektów latających. Pozwala ona na dopracowanie konstrukcji oraz na maksymalizację osiągniętych projektowanego systemu. Istnieje wiele sprawdzonych metod służących do optymalizacji funkcji ciągłych, natomiast w przypadku dużej nieliniowości i dyskretnego zachowywania się systemu złożoność problemu znacząco rośnie. Rakieta będąca przedmiotem badań w niniejszym artykule jest sterowana za pomocą dyskretnych impulsów produkowanych przez silniki korekcyjne, które mogą zostać odpalone tylko raz i generują dużą wartość ciągu przez bardzo krótki okres czasu w kierunku prostopadłym do osi podłużnej rakiety. W celu minimalizacji błędów trafienia oraz minimalizacji zużycia energii w układzie sterowania zaprojektowany został proces optymalizacji, który został podzielony na dwie części. Podzielono go na część związaną z optymalizacją sygnału ciągłego oraz część związaną z dyskretyzacją tego sygnału w celu uzyskania momentów odpaleń silników korekcyjnych. W poniższym artykule opisano pełen nieliniowy model symulacyjny rakiety, opracowany w środowisku MATLAB/Simulink. Przedstawiono założenia upraszczające wymagane w obu częściach przygotowanego procesu optymalizacji. Omówiono przyjętą metodę optymalizacji wraz z funkcją kosztu oraz wyniki analizy wrażliwości wyniku optymalizacji na wagi nałożone na poszczególne jej elementy. Na koniec przedstawiono metodę dyskretyzacji sygnału ciągłego oraz wyniki wstępnych symulacji dla całego procesu.

### 1. Wprowadzenie

Rakiety artyleryjskie są nieodzownym elementem współczesnego pola walki. Aby zwiększyć precyzję rażenia celów naziemnych, wyposaża się je w różne systemy sterowania aerodynamicznego, przednie lub tylne powierzchnie sterowe, lub gazodynamicznego w postaci możliwości wektorowania ciągu, lub użycie silniczków korekcyjnych. Użycie systemów sterowania potrafi zmniejszyć rozrzut takich pocisków z kilkuset metrów do kilkudziesięciu, co pozwala na precyzyjne niszczenie celów mniejszą liczbą pocisków oraz uniknięcie strat pobocznych.

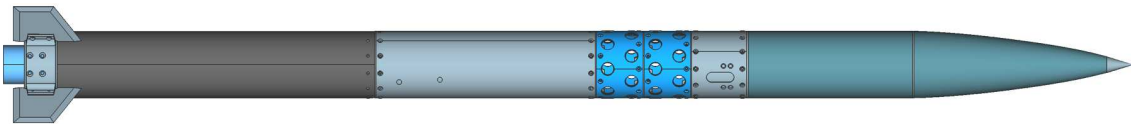
Istnieje wiele metod i algorytmów sterowania wykorzystywanych w celu poprawy precyzji rażenia. Algorytm bazujący na podążaniu za trajektorią referencyjną został pokazany w [1], [2], gdzie zbadano wpływ czasu odpaleń między kolejnymi silnikami, rozmiar okna błędów pozycji względem trajektorii zadanej oraz wpływ szumów czujników pomiarowych na rozrzut. Zmodyfikowana wersja podążania za trajektorią referencyjną została przedstawiona w [3]. Odpowiedni dobór warunków w logice sterującej odpaleniem kolejnych silników korekcyjnych pozwolił na znaczącą redukcję rozrzutu. Wyniki analizy Monte Carlo dla tego algorytmu zostały przedstawione w [4]. Algorytmy bazujące na nawigacji proporcjonalnej zostały opisane w [5], [6], gdzie ich wpływ na redukcję rozrzutu został porównany do metod bazujących na podążaniu za trajektorią zadaną. Metody sterowania optymalnego zostały wykorzystane do sterowania rakieta

w [7], gdzie użyto metod sterowania predykcyjnego, a w [8] przedstawiono optymalizację czasu i kąta fazy i ich wpływ na redukcję rozrzutu.

W tym artykule zostaną przedstawione możliwości wykorzystania metod optymalizacyjnych do sterowania pociskiem raketowym wyposażonym w zestaw silników korekcyjnych na stały materiał pędny. W rozdziale 2 przedstawiona została platforma testowa, na podstawie której powstał model symulacyjny pocisku opisany w rozdziale 3. Dwuczęściowy proces optymalizacji został opisany dokładnie w rozdziale 4, a wyniki wstępnych analiz przedstawiono i omówiono w rozdziale 5. Artykuł zamyka krótkie podsumowanie.

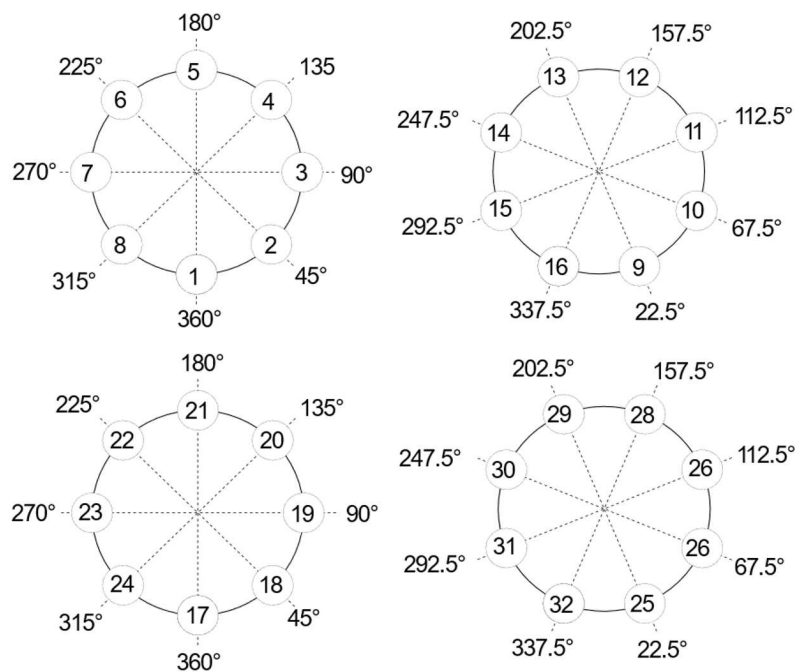
## 2. Platforma testowa

Opracowany model symulacyjny powstał na podstawie raketowej platformy testowej, ORION 1, przedstawionej na rys. 1. Jest to rakietka o długości około 2 m i kalibrze 122 mm. Masa startowa wynosi około 30 kg, z czego niemal 6 kg stanowi materiał pędny silnika głównego. Rakietka podczas około 2,5 s działania silnika rozpędza się do prędkości maksymalnej wynoszącej prawie 1,5 Macha.



Rys. 1. Rakietowa platforma badawcza

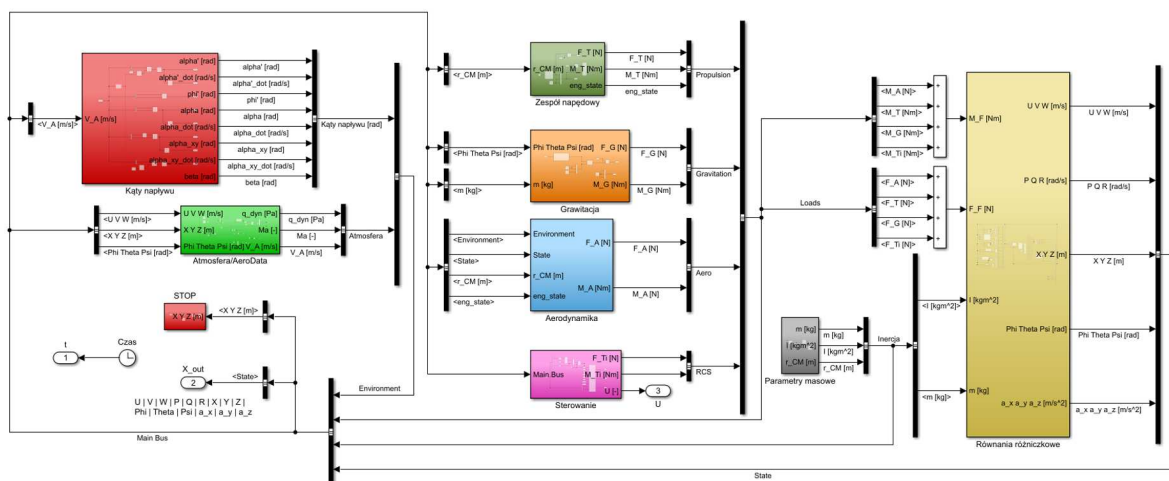
Rakietowa platforma badawcza wyposażona jest w zestaw 32 silników korekcyjnych na stały materiał pędny. Silniki te są równo rozmieszczone w czterech prostopadłych płaszczyznach, po 8 w każdej, jak przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. 2. Położenie silników korekcyjnych w kolejnych płaszczyznach

### 3. Model symulacyjny

Model symulacyjny rakiety został opracowany w środowisku MATLAB/Simulink wersji 2020b. Główną architekturę symulacji przedstawiono na rys. 3. Model składa się z bloków rozwiązujących różniczkowe równania ruchu, wyliczających obciążenia od grawitacji, zespołu napędowego, aerodynamiki, z uwzględnieniem modelu atmosfery standardowej, oraz obciążenia wynikające z działania silników korekcyjnych. Model uwzględnia także zmianę parametrów bezwładnościowych, czyli masy, położenia środka ciężkości oraz momentów bezwładności, wraz z wypalaniem się materiału pędnego silnika głównego.



Rys. 3. Główna architektura modelu symulacyjnego

#### 3.1. Różniczkowe równania ruchu

W przyjętym modelu rakietą jest ciałem sztywnym o sześciu stopniach swobody poruszającym się ruchem dowolnym. Różniczkowe równania ruchu rozwiązywane są w układzie związanym ze środkiem masy obiektu względem układu lokalnego horyzontu i są przedstawione w równaniach [9]

$$m\dot{\mathbf{V}} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M} \quad (3.1)$$

gdzie:  $m$  – masa rakiety,  $\mathbf{V}$  – wektor prędkości liniowej,  $\boldsymbol{\Omega}$  – wektor prędkości kątowej,  $\mathbf{I}$  – macierz momentów bezwładności,  $\mathbf{F}$  – wektor sił zewnętrznych,  $\mathbf{M}$  – wektor momentów sił zewnętrznych. Powyższe równania są uzupełnione o równania kinematyczne opisujące zmianę trajektorii

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{C}_N^F)^T \mathbf{V} \quad (3.2)$$

gdzie:  $\mathbf{R}$  – wektor współrzędnych położenia w układzie lokalnego horyzontu,  $\mathbf{C}_N^F$  – macierz transformacji z układu nawigacyjnego ( $N$ ) do układu związanego z obiektem ( $F$ ) dana zależnością

$$\mathbf{C}_N^F = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

gdzie:  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  $\Psi$  – kąty orientacji przestrzennej odpowiednio przechylenia, pochylenia i odchylenia. Dodatkowo zmiana orientacji przestrzennej w czasie jest obliczana za pomocą kwaternionów zgodnie z równaniem

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -P & -Q & -R \\ P & 0 & R & -Q \\ Q & -R & 0 & P \\ R & Q & -P & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} + (1 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{q} \quad (3.4)$$

gdzie:  $\mathbf{q}$  – czteroelementowy wektor kwaternionu, a druga część równania jest poprawką numeryczną służącą zachowaniu przez kwaternion normy równej jeden.

### 3.2. Grawitacja

Model grawitacji nie uwzględnia zmiany wartości przyspieszenia grawitacyjnego wraz z wysokością i przyjmuje wartość stałą wynoszącą  $g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$ . Siła grawitacji jest dana równaniem

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{C}_N^F [0, 0, g_0]^T \quad (3.5)$$

Moment od siły grawitacji wynosi zero, ze względu na umieszczenie środka układu obiektu w jego środku masy.

### 3.3. Zespół napędowy

Model siły ciągu zakłada, że ciąg rakiety działa wzdłuż osi podłużnej obiektu i opisany jest równaniem

$$\mathbf{F}_T = [T(t), 0, 0]^T \quad (3.6)$$

gdzie:  $T(t)$  – wartość siły ciągu w czasie. Moment od siły ciągu dany jest zależnością

$$\mathbf{M}_T = -\mathbf{r}_{SC} \times \mathbf{F}_T \quad (3.7)$$

gdzie  $\mathbf{r}_{SC}$  jest położeniem środka ciężkości rakiety względem końca rakiety.

### 3.4. Aerodynamika

Obciążenia aerodynamiczne w postaci sił i momentów są obliczane na podstawie równań

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= \frac{1}{2} \rho(h) V_A^2 S [C_X, C_Y, C_Z]^T \\ \mathbf{M}_A &= \frac{1}{2} (h) V_A^2 S d [C_l, C_m, C_n]^T + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{SC}) \times \mathbf{F}_A \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie:  $\rho(h)$  – gęstość powietrza w funkcji wysokości otrzymywana wykorzystując model atmosfery standardowej,  $V_A$  – wartość prędkości obiektu względem powietrza,  $S$  – powierzchnia największego przekroju poprzecznego rakiety,  $d$  – średnica rakiety,  $\mathbf{r}_A$  – wektor położenia punktu referencyjnego dla momentów aerodynamicznych względem końca rakiety,  $C_X, C_Y, C_Z, C_l, C_m, C_n$  – współczynniki odpowiednio sił ( $X, Y, Z$ ) oraz momentów aerodynamicznych ( $l, m, n$ ). Współczynniki sił aerodynamicznych dane są zależnościami

$$\begin{aligned} C_X &= C_{X_0}(\text{Ma}, T) + C_{X_{\alpha^2}}(\text{Ma}, T) \sin^2 \alpha + C_{X_{\beta^2}}(\text{Ma}, T) \sin^2 \beta \\ C_Y &= -C_{Y_\beta}(\text{Ma}) \sin \beta \quad C_Z = -C_{Z_\alpha}(\text{Ma}) \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie:  $\alpha$  – kąt natarcia,  $\beta$  – kąt ślizgu,  $\text{Ma}$  – liczba Macha, dane zależnościami

$$\alpha = a \tan \frac{2V_{Az}}{V_{Ax}} \quad \beta = a \sin \frac{V_{Ay}}{V_A} \quad \text{Ma} = \frac{V_A}{\alpha} \quad (3.10)$$

gdzie:  $a$  – prędkość dźwięku wyliczana z modelu atmosfery standardowej. Współczynniki momentów aerodynamicznych dane są zależnościami

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l_0}(\text{Ma}) + \frac{\Omega_x d}{2V_A} C_{l_p}(\text{Ma}) \\ C_m &= C_{m_\alpha}(\text{Ma}) \sin \alpha + \frac{\Omega_y d}{2V_A} C_{m_q}(\text{Ma}) \\ C_n &= -C_{n_\beta}(\text{Ma}) \sin \beta + \frac{\Omega_z d}{2V_A} C_{n_r}(\text{Ma}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie: współczynniki postaci  $C_{ij}$  są pochodnymi aerodynamicznymi zależnymi od liczby Macha i w przypadku współczynnika  $C_X$  również od pracy silnika  $C_X = C_X(\text{Ma}, T)$ .

### 3.5. Charakterystyki bezwładnościowe

Model uwzględnia zmienne w czasie, wynikające ze spalania materiału pędnego silnika głównego, charakterystyki bezwładnościowe. Masa rakiety dana jest zależnością

$$m(t) = m_0 - \frac{m_p}{I_c} \int_{t_0}^t T(t) dt \quad (3.12)$$

gdzie:  $m_0$  – masa rakiety w momencie startu,  $m_p$  – masa materiału pędnego,  $I_c$  – impuls całkowity silnika głównego. Położenie środka ciężkości względem końca rakiety dane jest wzorem

$$\mathbf{r}_{SC} = \mathbf{r}_{SC_0} - \frac{\mathbf{r}_{SC_0} - \mathbf{r}_{SC_k}}{I_c} \int_{t_0}^t T(t) dt \quad (3.13)$$

gdzie:  $\mathbf{r}_{SC_0}$ ,  $\mathbf{r}_{SC_k}$  – położenie środka ciężkości rakiety odpowiednio w momencie startu i po wypaleniu materiału pędnego. Macierz momentów bezwładności można obliczyć z zależności

$$I_{ij}(t) = I_{ij_0} - \frac{I_{ij_0} - I_{ij_k}}{I_c} \int_{t_0}^t T(t) dt \quad (3.14)$$

gdzie:  $I_{ij}$  – moment bezwładności względem osi  $i$ , gdy ciało jest obracane względem osi  $j$ .

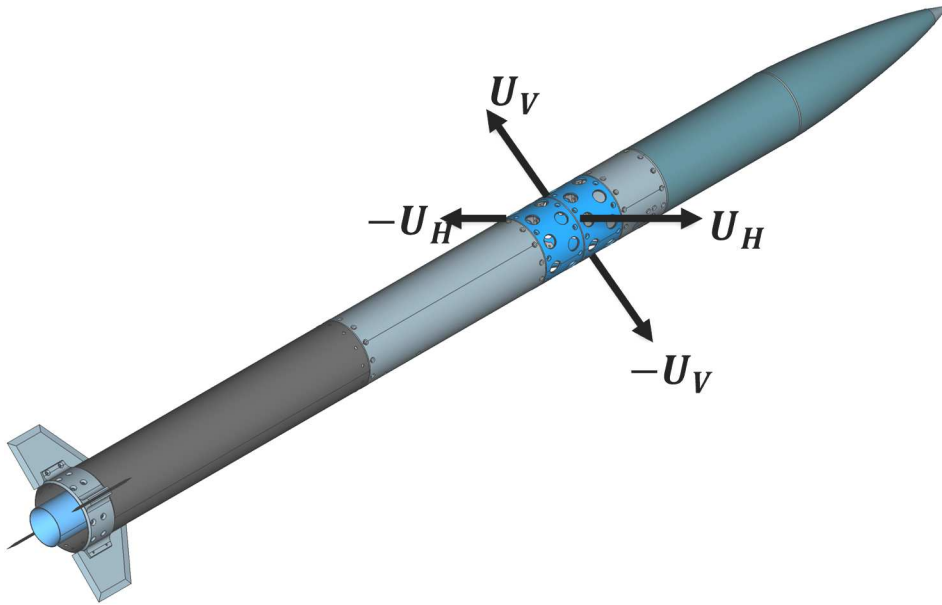
## 4. Optymalizacja

Opracowany model symulacyjny został użyty w procesie optymalizacji. Głównym celem optymalizacji było wyznaczenie momentów, w których należałoby odpalić kolejne silniki korekcyjne, aby zminimalizować błąd punktu trafienia rakiety w zadany cel. Dodatkowo optymalizacja miała na celu także ograniczyć do minimum liczbę wykorzystanych w tym celu silników korekcyjnych. Cały proces optymalizacji został podzielony na dwie części: optymalizację sygnału ciągłego oraz jego dyskretyzację w celu wyznaczenia momentów odpaleń kolejnych silników. Obie części zostaną opisane poniżej.

### 4.1. Optymalizacja sygnału ciągłego

W wyniku procesu optymalizacji powinny zostać wyznaczone punkty w czasie lotu, w których należałoby odpalić kolejne silniki korekcyjne. Bardzo szybko okazało się przy wstępnych obliczeniach, że czasy odpaleń nie mogą być bezpośrednio zmiennymi optymalizacyjnymi. Wynika

to z faktu, że przy stosowaniu tradycyjnych metod optymalizacji gradientowej, zmiana wartości funkcji kosztu w kolejnych iteracjach przy liczeniu gradientów były zbyt mała i optymalizacja bardzo szybko się kończyła. Z tego względu należało zastosować inne podejście. Przyjęto założenia upraszczające. Założono, że rakieta jest wyposażona tylko w dwa silniki korekcyjne o stałym dostępie do ciągu, które umieszczone są w dwóch prostopadłych płaszczyznach, jak przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Uproszczony model działania silników korekcyjnych

Silniki te są w stanie generować ciąg w obu kierunkach przez cały okres lotu rakiety. Dodatkowo założono, że proces sterowania będzie miał miejsce dopiero po osiągnięciu przez raketę apogeum, czyli punktu maksymalnej wysokości lotu.

Znormalizowany przebieg ciągu silników korekcyjnych w czasie lotu przedstawiono na rys. 5. Założono, że wartość ciągu silników korekcyjnych może ulec zmianie tylko w pewnych dyskretnych chwilach czasu, pozostając stała pomiędzy kolejnymi zmianami. Jako zmienne optymalizacyjne, oznaczone jako  $u$ , przyjęto właśnie kolejne poziomy zmiany wartości ciągu, których może być  $2N$ , gdzie  $N$  jest liczbą możliwych zmian definiowanych przez użytkownika, a 2 wynika z użycia dwóch silników korekcyjnych.

Na zmienne optymalizacyjne nałożono więzy w postaci ograniczenia przedziału ich wartości do zakresu  $\langle -1, 1 \rangle$ , co powoduje konieczność wykorzystania metod optymalizacyjnych z więzami. Wartości ciągu silników korekcyjnych w kolejnych przedziałach są uzyskiwane poprzez przemnożenie wartości zmiennych optymalizacyjnych  $u$  przez maksymalną wartość ciągu silnika korekcyjnego definiowaną przez użytkownika.

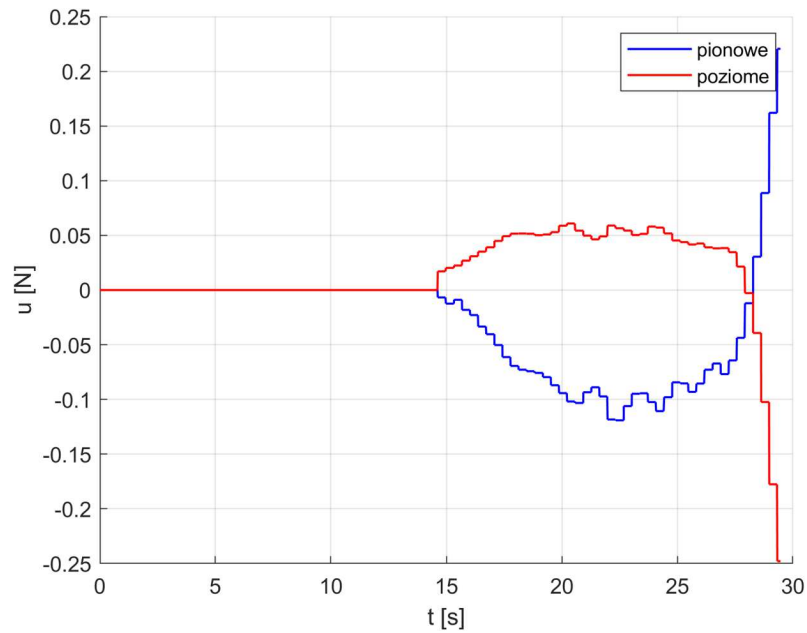
Przyjęto w procesie optymalizacji funkcja kosztu składała się z trzech części i dana jest zależnością

$$J(u) = J_1 + J_2 + J_3 \quad (4.1)$$

Kolejne składniki oznaczają kolejno koszt wynikający z błędu punktu trafienia dany równaniem

$$J_1 = Q \sqrt{(X_{end} - X_{ref})^2 + (Y_{end} - Y_{ref})^2} \quad (4.2)$$

gdzie:  $X_{end}$ ,  $Y_{end}$  – końcowe współrzędne położenia rakiety,  $X_{ref}$ ,  $Y_{ref}$  – współrzędne celu,  $Q$  – parametr wagowy błędu punktu trafienia. Kolejna część funkcji kosztu odpowiadała za minimalizację wartości ciągu silników korekcyjnych i dana była zależnością



Rys. 5. Wykres znormalizowanej wartości ciągu silników korekcyjnych w funkcji czasu

$$J_2 = \sum u^T R u \quad (4.3)$$

gdzie:  $R$  – parametr wagowy wartości sterowania. Ostatni składnik funkcji kosztu odpowiadał za minimalizację zmian wartości kolejnych poziomów ciągu silników korekcyjnych i dany jest wzorem

$$J_3 = \sum (u_i - u_{i-1})^T S (u_i - u_{i-1}) \quad (4.4)$$

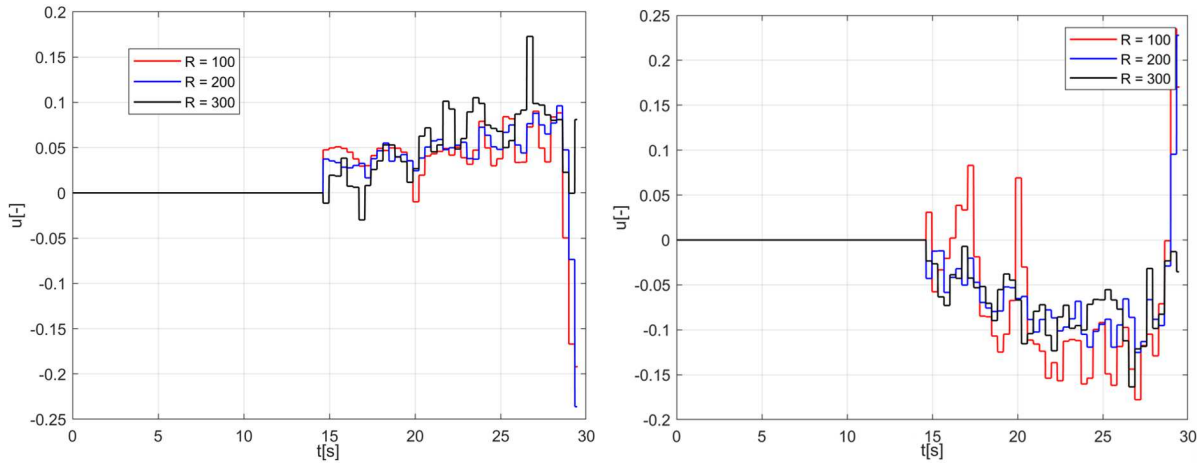
gdzie:  $S$  – parametr wagowy zmiany wartości ciągu w kolejnych poziomach.

Na wstępnym etapie obliczeń przygotowana funkcja kosztu była minimalizowana wbudowaną w środowisko MATLAB funkcją *fmincon* [10], która pozwala rozwiązywać nieliniowe problemy optymalizacyjne z więzami. Wykorzystuje ona algorytm quasi-Newton, który w sposób iteracyjny oblicza gradient oraz przybliżenie Hessianu funkcji celu, a więzy uwzględniane są wykorzystując metodę *Interior Point*. W celu znaczącego przyspieszenia obliczeń wykorzystano także bibliotekę *Parallel Computing Toolbox* dostępna w środowisku MATLAB, co pozwoliło skrócić czas obliczeń pojedynczego przypadku z kilku dni do maksymalnie kilku godzin.

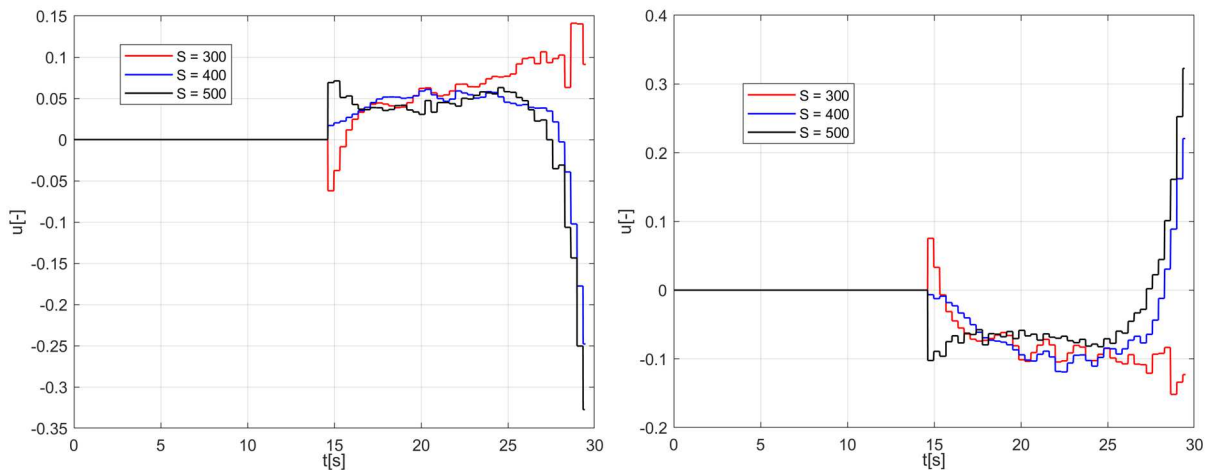
#### 4.1.1. Analiza wrażliwości

Przed przystąpieniem do drugiej części procesu optymalizacji przeprowadzono analizę wrażliwość zmiany wartości parametrów wagowych  $R$  i  $S$ , odpowiadających za wartość ciągu silników korekcyjnych i jej zmianę między kolejnymi poziomami. W tym celu wygenerowano trajektorie referencyjną rakiety, poprzez ustawienie kątów strzału azymutu i elewacji, a jej punkt końcowy przyjęto jako współrzędne celu. Optymalizację przeprowadzono następnie dla kątów strzału zmienionych o pojedyncze stopnie, w celu wygenerowania potrzeby użycia silników korekcyjnych, aby trafić w cel. Analizę przeprowadzono osobno dla każdej z wag  $R$  i  $S$ , przy ustalonych wartościach pozostałych dwóch wag. Wyniki dla zmiany wartości wagi  $R$  przedstawiono na rys. 6.

Z przedstawionych wyników można zauważyć, że zmiana wartości parametru  $R$  nie ma znaczącego wpływu na zachowanie się wyniku optymalizacji w danym przedziale jego wartości. Na prawym wykresie widać nieznaczne zmniejszenie się wartości sygnału  $u$  przy zwiększaniu wartości wagi  $R$ . Podobną analizę przeprowadzono również dla parametru wagowego  $S$  wpływającego



Rys. 6. Wyniki analizy wrażliwości na zmianę wartości parametru wagowego  $R$ : (lewo) w kanale poziomym, (pravo) w kanale pionowym



Rys. 7. Wyniki analizy wrażliwości na zmianę wartości parametru wagowego  $S$ : (lewo) w kanale poziomym, (pravo) w kanale pionowym

na zmianę wartości sygnału  $u$  w kolejnych poziomach. Wyniki przedstawiono na rys. 7. Analizując wykresy, można dostrzec, że poziom oscylacji wraz ze wzrostem wartości parametru  $S$  maleje, ponownie nie są to jednak duże zmiany. Nieznacznie maleje także sama wartość sygnału  $u$ . Po przeprowadzeniu analizy zdecydowano ustalić wartości parametrów wagowych na  $R = 300$ ,  $S = 500$  i takie wartości wykorzystywano do dalszych obliczeń.

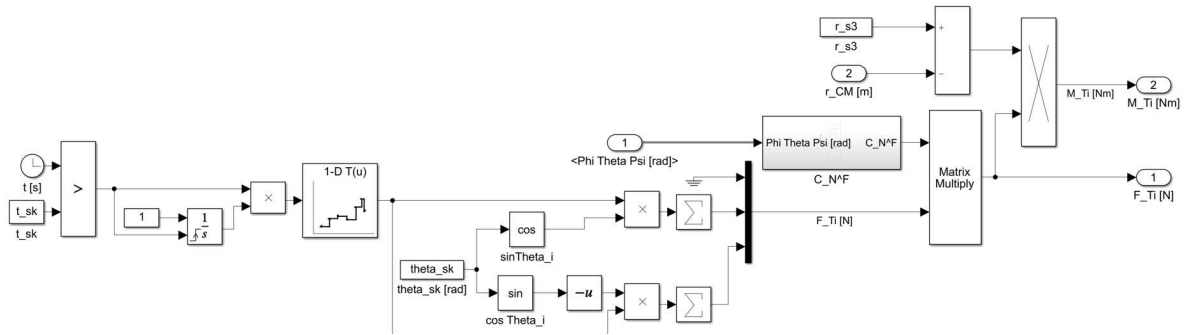
#### 4.2. Dyskretyzacja

Mając uzyskany wynik pierwszej części procesu optymalizacji w postaci przebiegu czasowego ciągu silników korekcyjnych w obu płaszczyznach, w części drugiej sygnał ten został zamieniony na dyskretne chwile odpaleń kolejnych silników i kierunki działania ciągu.

Na tym etapie przyjęto kolejne założenia upraszczające. Założono, że rakieta dysponuje dowolną liczbą silników korekcyjnych, które są dowolnie rozłożone w jednej płaszczyźnie na obwodzie rakiety. Schemat uproszczonego modelu działania silników przedstawiono na rys. 8.

Model ten sprawdza, w którym czasie oraz w jakim kierunku dany silnik powinien zadziałać, a następnie go uruchamia. Po niezbędnych transformacjach siła oraz moment generowane przez silnik korekcyjny dodawane są do reszty obciążeń działających na raketę.





Rys. 8. Uproszczony model działania silników korekcyjnych

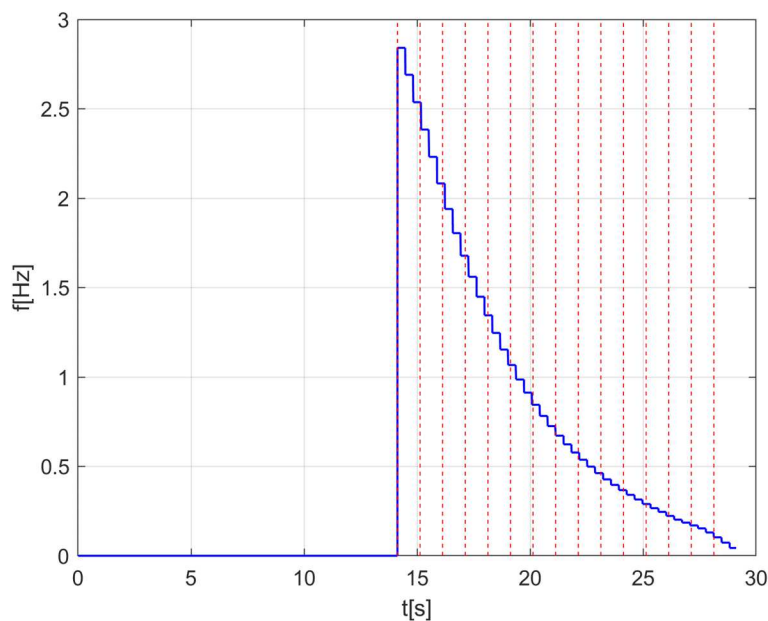
Transformację sygnału w postaci przebiegu ciągu silników korekcyjnych na czas i kierunek odpalenia odpowiedniego silnika podzielono na kilka części. Na początku, licząc pierwiastek z sumy kwadratów z odpowiednimi wagami z sygnałów z obu płaszczyzn działania, otrzymano częstotliwość, z jaką powinny się uruchamiać kolejne silniki korekcyjne. Zależność na częstotliwość przedstawia równanie

$$f = T_{sk} \sqrt{(KV \cdot u_V)^2 + (KH \cdot u_H)^2} \quad (4.5)$$

gdzie:  $T_{sk}$  – maksymalna wartość ciągu silnika korekcyjnego,  $KV$ ,  $KH$  – wagi na sygnały w kanale odpowiednio pionowym i poziomym. Za pośrednictwem wag  $KV$ ,  $KH$  można zmieniać wpływ poszczególnego kanału na zmianę trajektorii rakiety. Kierunek działania ciągu można obliczyć z zależności

$$\theta_u = a \tan 2(u_V, u_H) \quad (4.6)$$

Otrzymany z równania (4.5) przebieg częstotliwość odpaleń silników korekcyjnych przedstawiono na rys. 9. Przebieg taki następnie uśredniano w kolejnych przedziałach o długości około 1 s, zaznaczonych na wykresie przerywanymi liniami. Znając częstotliwość odpalenia silników w danym przedziale czasowym, zamieniano ją na kolejne czasy odpaleń.



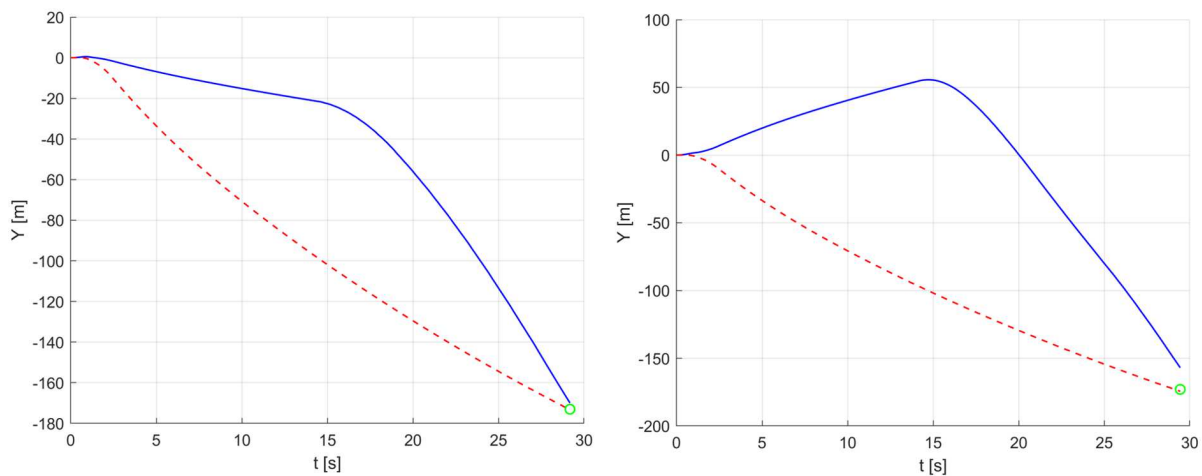
Rys. 9. Wyznaczenie przedziałów uśredniania częstotliwości

Po wykonaniu tych operacji czasy odpaleń i kierunki działania silników korekcyjnych wczytywano do modelu symulacyjnego w celu wygenerowania wyników.

## 5. Wyniki

Opisany w powyższych rozdziałach dwuczęściowy proces optymalizacji został zastosowany do wstępnych obliczeń. Na początku wygenerowana została trajektoria referencyjna rakiety dla kątów strzału wynoszących: azymut  $0^\circ$ , elewacja  $25^\circ$ , a jej ostatni punkt został przyjęty jako współrzędne położenia celu. Następnie dla kolejnych odchyłek kątów strzału wynoszących  $1^\circ$  lub  $2^\circ$  przeprowadzany był cały proces optymalizacji, czyli wyliczany był ciągły przebieg ciągu silników korekcyjnych oraz na jego podstawie wyznaczane były dyskretne chwile odpaleń i kierunki działania kolejnych silników korekcyjnych. Na kolejnych rysunkach linią ciągłą niebieską przedstawiony jest przebieg w czasie odpowiedniej współrzędnej położenia rakiety, dla błędu kąta azymutu współrzędnej  $Y$ , a dla błędu kąta elewacji współrzędnej  $X$ . Linią czerwoną przerywaną jest zaznaczony przebieg odpowiedniej współrzędnej dla trajektorii referencyjnej. Ze względu na to, że czas lotu rakiety dla odchyłek kątów strzału nie pokrywał się z czasem lotu po trajektorii referencyjnej, współrzędne celu dodatkowo zostały zaznaczone zielonym markerem.

Na rys. 10 przedstawiono wyniki dla błędu kąta azymutu wynoszącego  $1^\circ$  oraz  $2^\circ$ . W czasie lotu rakieta użyła 16 silników korekcyjnych, uzyskując błąd trafienia wynoszący 7,15 m dla błędu wynoszącego  $1^\circ$ , a dla błędu wynoszącego  $2^\circ$  błąd trafienia wyniósł 33,76 m przy użyciu 33 silników korekcyjnych.



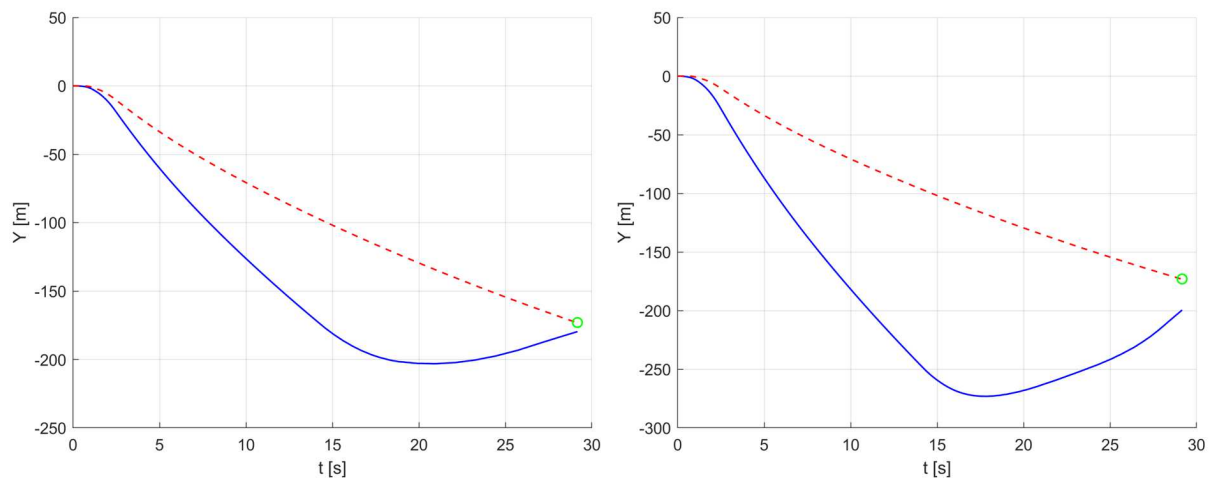
Rys. 10. Trajektoria rakiety (niebieski), trajektoria referencyjna (czerwony), położenie celu (zielony) dla początkowego błędu kąta azymutu wynoszącego (lewo)  $1^\circ$ , (prawo)  $2^\circ$

Na rys. 11 przedstawiono wyniki dla błędu kąta azymutu wynoszącego odpowiednio  $-1^\circ$  oraz  $-2^\circ$ . W czasie lotu rakieta użyła odpowiednio 15 oraz 34 silników korekcyjnych, uzyskując przy tym błąd trafienia wynoszący odpowiednio 11,18 m oraz 34,34 m.

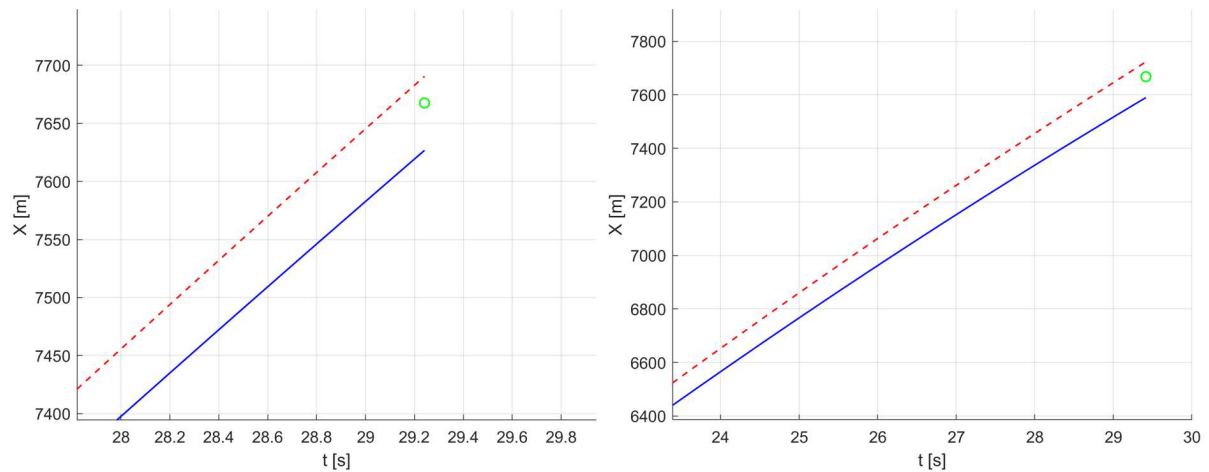
Na rys. 12 przedstawiono wyniki dla błędu kąta elewacji wynoszącego  $1^\circ$  i  $2^\circ$ . Błąd trafienia dla obu przypadków wyniósł odpowiednio 40,98 m przy użyciu 24 silników korekcyjnych oraz 83,38 m przy użyciu 66 silników korekcyjnych.

Na rys. 13 pokazano wyniki dla błędu kąta elewacji wynoszącego  $-1^\circ$  oraz  $-2^\circ$ . Dla tych przypadków liczba użytych silników wynosiła odpowiednio 28 oraz 27, przy błędach trafienia wynoszących 35,81 m i 66,03 m.

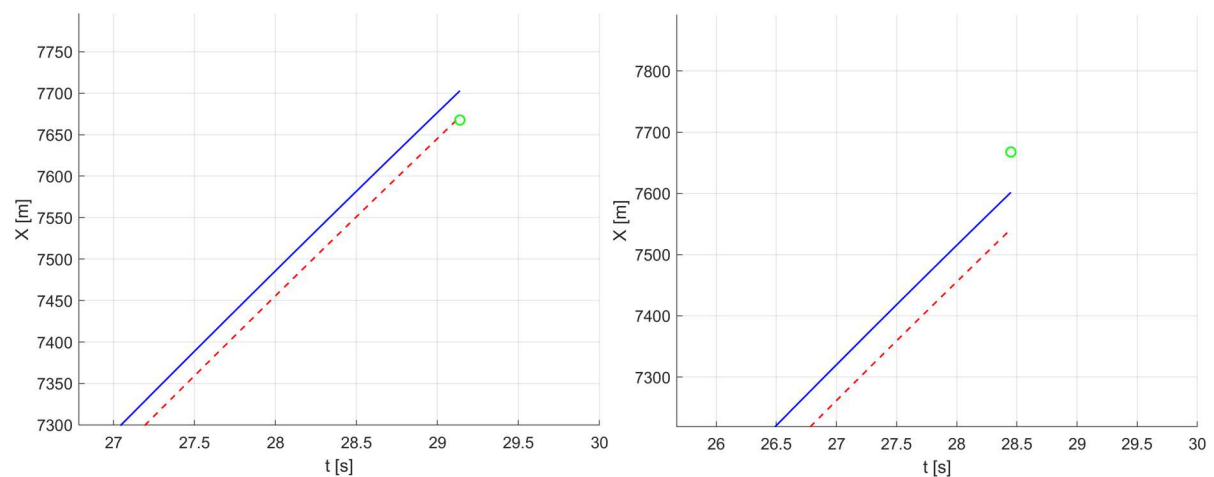
Analizując uzyskane wyniki, można zauważyć, że wraz ze wzrostem początkowego błędu kąta strzału rośnie niezbędna liczba silników korekcyjnych, które należy uruchomić. Tylko dla



Rys. 11. Trajektoria rakiety (niebieski), trajektoria referencyjna (czerwony), położenie celu (zielony) dla początkowego błędu kąta azymutu wynoszącego (lewo)  $-1^\circ$ , (prawo)  $-2^\circ$



Rys. 12. Trajektoria rakiety (niebieski), trajektoria referencyjna (czerwony), położenie celu (zielony) dla początkowego błędu kąta elewacji wynoszącego (lewo)  $1^\circ$ , (prawo)  $2^\circ$



Rys. 13. Trajektoria rakiety (niebieski), trajektoria referencyjna (czerwony), położenie celu (zielony) dla początkowego błędu kąta elewacji wynoszącego (lewo)  $-1^\circ$ , (prawo)  $-2^\circ$

ostatniego przypadku błędu kąta elewacji liczba silników wyszła zbliżona dla dwóch wartości błędu. Dużo lepiej algorytm sobie radzi w przypadku błędów kąta azymutu niż elewacji, osiągając mniejsze wartości odległości miejsca uderzenia rakiety od współrzędnych położenia celu.

## 6. Podsumowanie

W ramach przygotowania artykułu przeprowadzono analizę zastosowania metod optymalizacji do sterowania pociskiem raketowym wyposażonym w zestaw silników korekcyjnych na stały materiał pędny. Proces optymalizacji był podzielony na dwie części, najpierw optymalizowano wartość ciągu silników korekcyjnych w dwóch płaszczyznach rakiety, a następnie zamieniano go na dyskretny sygnał odpaleń silników korekcyjnych. Sprawdzono wrażliwość algorytmu optymalizacji na zmianę wartości macierzy wagowych występujących w funkcji kosztu, a także przedstawiono wyniki wstępnych symulacji zastosowania opisanego procedury do sterowania rakieta. Plany na przyszłość obejmują dostosowanie metody optymalizacji gradientowej do założonego problemu, a także modyfikację algorytmu dyskretyzacji, aby poprawić działanie algorytmu dla błędu kąta elewacji.

## Bibliografia

1. GUPTA S., SAXENA S., SINGHAL A., GHOSH A., Trajectory correction flight control system using pulsejet on an artillery rocket, *Defence Science Journal*, **58**, 1, 15-33, 2008
2. JITPRAPHAI T., COSTELLO M., Dispersion reduction of a direct fire rocket using lateral pulse jets, *Journal of Spacecraft and Rockets*, **38**, 6, 929-936, 2001
3. OŻÓG R., JACEWICZ M., GŁĘBOCKI R., Modified trajectory tracking guidance for artillery rocket, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **58**, 3, 611-622, 2020
4. GŁĘBOCKI R., JACEWICZ M., Parametric study of guidance of a 160 mm projectile steered with lateral thrusters, *Aerospace*, **7**, 61, 1-27, 2020
5. JITPRAPHAI T., BURCHETT B., COSTELLO M., Mechanism, a comparison of different guidance schemes for a direct fire rocket with a pulse jet control, *Army Research Laboratory*, Corvallis, OR, 2002
6. JACEWICZ M., LICHOTA P., MIEDZIŃSKI D., GŁĘBOCKI R., Study of model uncertainties influence on the impact point dispersion for a gasdynamically controlled projectile, *Sensors*, **22**, 9, 1-20, 2022
7. BURCHETT B., COSTELLO M., Model predictive lateral pulse jet control of an atmospheric rocket, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **25**, 5, 860-867, 2002
8. GAO M., ZHANG Y., YANG S., Firing control optimization of impulse thrusters for trajectory correction projectiles, *International Journal of Aerospace Engineering*, **2015**, 1-12, 2015
9. STEVENS B., LEWIS F., JOHNSON E., *Aircraft Control and Simulation*, 3rd Ed., Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems, Hoboken, New Jersey: Wiley, 2016
10. Mathworks, „MATLAB Documentation”, Mathworks, [Online]. Available: <https://uk.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html> [Data uzyskania dostępu: 5.12.2022]

### **An approach to optimal control using pulse jet thrusters for a gasdynamically controlled missile**

In this article, an approach to optimize the use of correction thrusters for a gasdynamically controlled missile is presented. Optimization is an important aspect of the design process of flight vehicles. It allows one to tailor the design of an object and to maximize its performance and efficiency during flight. There exist

many well-known and established methods to optimize continuous functions, but the complexity of the problem intensifies when dealing with discrete and highly nonlinear systems. The missile examined in this article is controlled by a discrete impulse control signals in a form of pulse correction thrusters which can be fired only once and give a high value of thrust for a very short time in the direction perpendicular to the missile longitudinal axis. In order to minimize its hit error and energy consumption in the control system, a two part optimization process was developed. It was divided into optimization of the continuous control signal and its discretization in order to obtain discrete values of the times when the control thrusters should fire. In the article, a full nonlinear simulation model of the missile created in MATLAB/Simulink environment is presented. All necessary simplifications of the model needed for continuous control signal optimization and discretization are discussed detail. The optimization method and the cost function used for calculations are described. The results of analysis of the sensitivity of optimization output to the weights of different components of the cost function are presented. The approach to discretization of the continuous control signal along with the preliminary results of performed simulations are presented.