

VR W DYDAKTYCE MECHANIKI: ANALIZA KINEMATYKI MECHANIZMU CZWOROBOCZNEGO

ANNA SIBILSKA-MROZIEWICZ, EDYTA ŁADYŻYŃSKA-KOZDRAŚ,
KRZYSZTOF SIBILSKI, EWELINA DRELICH, JAN TRACZ, KRZYSZTOF KUREC

Politechnika Warszawska

e-mail: anna.mroziewicz@pw.edu.pl

Współczesne metody nauczania inżynierii mechanicznej coraz częściej wykorzystują zaawansowane technologie takie jak wirtualna rzeczywistość, aby przełamać tradycyjne bariery edukacyjne i zwiększyć efektywność nauki. Kluczowa w nauce mechaniki kinematyka bada ruch ciał bez uwzględniania działających sił. Zrozumienie jej zasad, szczególnie w kontekście wektorów prędkości i przyspieszeń liniowych oraz kątowych, jest często utrudnione przez abstrakcyjny charakter i złożoność aparatu matematycznego. Dzięki VR studenci mogą na własne oczy zobaczyć i przetestować wpływ różnych parametrów układów mechanicznych na ruch jego części, co pozwala na intuicyjne i trwałe przyswojenie złożonych koncepcji kinematycznych. Kluczowym aspektem artykułu jest przedstawienie metody wyznaczania zmieniającej się w czasie konfiguracji mechanizmu czteroczołowego. W tym celu wykorzystano pakiet Symbolic Math Toolbox oraz model LLM, trenowany pod kątem wsparcia dydaktycznego w kursie mechaniki. Dzięki tym narzędziom możliwe jest precyzyjne określenie – na potrzeby wizualizacji w VR – położenia, prędkości oraz przyspieszeń w dowolnej chwili czasu charakterystycznych punktów członów mechanizmu. Artykuł ma na celu nie tylko dostarczenie teoretycznych podstaw analizy kinematyki mechanizmu czworobocznego, ale również pokazanie praktycznego zastosowania nowoczesnych narzędzi obliczeniowych w edukacji inżynierskiej.

1. Wstęp

Nauka mechaniki stanowi dla wielu studentów wyzwanie, głównie ze względu na jej abstrakcyjny charakter i skomplikowane matematyczne podstawy [1]. Mechanika, będąca fundamentalną dziedziną inżynierii, opiera się na pojęciach takich jak siły, momenty czy energia, które są niewidoczne i mogą być trudne do zrozumienia bez solidnych matematycznych podstaw. Abstrakcyjność tych pojęć wymaga od studentów nie tylko wyobraźni przestrzennej, ale również umiejętności matematycznych, które pozwalają na precyzyjne opisanie i analizę złożonych zjawisk fizycznych [2].

Dodatkowo mechanika, a szczególnie działy kinematyki i dynamiki, wymagają od studentów zdolności do przestrzennej wizualizacji ruchu elementów układu oraz zachodzących pomiędzy nimi interakcji. Umiejętność ta jest kluczowa, gdyż pozwala na intuicyjne zrozumienie, jak różne siły działają na ciała oraz jak te ciała reagują na te siły. Studenci, którzy mają ograniczone umiejętności wizualizacyjne, mogą napotkać trudności w wyobrażeniu sobie skomplikowanych ruchów oraz powiązanych z tym ruchem wektorów sił, przyspieszeń i prędkości.

W odpowiedzi na te wyzwania nowoczesne technologie edukacyjne, takie jak wirtualna rzeczywistość (ang. Virtual Reality – VR) [3, 4], zyskują na znaczeniu jako narzędzia wspomagające proces nauczania. VR oferuje niezrównane możliwości interaktywnej wizualizacji i eksperymentowania z modelami mechanicznymi, co może znacząco ułatwić studentom zrozumienie abstrakcyjnych koncepcji i złożonych zjawisk mechaniki. Co więcej, nauka poprzez eksperymentowanie, czyli „learning by doing”, jest uznawana za jedną z najbardziej efektywnych metod edukacji,

pozwalającą na głębokie i trwałe zrozumienie i trwałe przyswojenie wiedzy. Powtarzalne eksperymenty w bezpiecznym, wirtualnym i immersyjnym środowisku pomogą studentom nie tylko lepiej zrozumieć materiał, ale także wyrobić intuicję działania mechanizmów kinematycznych, co jest kluczowe w dalszej edukacji i przyszłej praktyce inżynierskiej [5, 6, 7].

Niniejszy artykuł stawia trzy cele. Po pierwsze demonstruje wykorzystanie obliczeń symbolicznych do matematycznej analizy kinematyki łańcucha kinematycznego, z naciskiem na wektory prędkości i przyspieszeń, co pozwala na symulację ruchu ogniw łańcucha w Unity. Wybrane zagadnienia kinematyki łańcucha zostały przeanalizowane z wykorzystaniem modelu LLM (Large Language Model) trenowanego pod kątem zagadnień mechaniki ogólnej, dzięki czemu wprowadzono wzór opisujący położenie chwilowego środka prędkości.

Kolejnym, kluczowym elementem artykułu jest opisanie nowatorskiej aplikacji wirtualnej rzeczywistości (VR), której celem jest wizualizacja i interaktywne przedstawienie ruchu łańcucha kinematycznego. Aplikacja ta została opracowana w celach dydaktycznych, aby pomóc studentom w lepszym zrozumieniu ruchu i właściwości kinematycznych układu. Dzięki technologii wirtualnej rzeczywistości użytkownicy mogą obserwować, jak podczas ruchu zmieniają się wektory prędkości i przyspieszeń poszczególnych członów mechanizmu. Ponadto aplikacja umożliwia wizualizację położenia chwilowego środka obrotu środkowego członu układu, co jest istotnym elementem analizy kinematycznej. Artykuł opisuje również pilotażowe badanie przeprowadzone wśród studentów, mające na celu ocenę wpływu wprowadzenia technologii VR do kursu nauczania mechaniki ogólnej.

Przez zintegrowanie obliczeń symbolicznych z innowacyjnymi technologiami wizualizacyjnymi, w artykule opisano dążenie do zbadania nowych możliwości dla edukacji inżynierskiej, sugerując, że połączenie teoretycznej wiedzy z technologicznymi narzędziami może udoskonalić tradycyjne metody nauczania.

2. Mechanizm czworoboku przegubowego

Łańcuch kinematyczny jako motyw przewodni przedstawionej w artykule aplikacji VR stanowi podstawę do eksploracji i zrozumienia zasad kinematyki przez studentów inżynierii mechanicznej. Wirtualna rzeczywistość oferuje tu unikatową wartość, umożliwiając wizualizację oraz interaktywne manipulowanie elementami układu, co znacząco przyspiesza proces nauki i pomaga w wyobrażeniu sobie skomplikowanych ruchów oraz zależności pomiędzy analizowanymi zmiennymi poszczególnych elementów mechanizmu, np. ich prędkościami i przyspieszeniami.

Szczególnym przypadkiem zamkniętego łańcucha kinematycznego jest mechanizm czworoboczny, znany również jako mechanizm czteroczłonowy lub czworobok przegubowy. Jest on jednym z najbardziej podstawowych i zarazem kluczowych mechanizmów w inżynierii mechanicznej. Czworobok przegubowy składa się z czterech członów połączonych ze sobą w przegubach, tworząc zamkniętą pętlę. Poszczególne człony możemy nazwać jako:

- człón napędowy (korba) – obraca się zazwyczaj wokół stałej osi,
- człón bierny – przemieszcza się w wyniku ruchu członu napędowego,
- łącznik (korbowód) – łączy człón napędowy z członem biernym,
- człón zerowy (rama) – nieruchomy człón, który stanowi podstawę mechanizmu.

Ruch w mechanizmie jest inicjowany przez napęd przyłożony w punkcie zamocowania członu napędowego do podłoża. Ruch obrotowy korby jest przekazywany poprzez korbowód na człón bierny, który również wykonuje ruch obrotowy. Człony napędowy i bierny obracają się wokół swoich osi, które są umiejscowione w przegubach.

Korbowód, łączący człón napędowy z biernym, porusza się ruchem płaskim. Dzięki temu korbowód jest w stanie nie tylko obracać się wokół swojej osi, ale również przesuwac się wzdłuż określonej trajektorii na płaszczyźnie, co jest kluczowe dla skutecznego przekazywania ruchu

między napędem a członem biernym. Środek obrotu łącznika znajduje się na przecięciu prostych prostopadłych do wektorów prędkości liniowych wszystkich punktów ogniwa i zmienia swoje położenie wraz z ruchem układu.

Mechanizm czworoboczny, powszechnie stosowany w inżynierii mechanicznej, odgrywa kluczową rolę w wielu maszynach i urządzeniach. Zrozumienie jego kinematyki jest fundamentalne dla projektowania i analizy takich układów. W niniejszym artykule skupiamy się na szczegółowej analizie kinematycznej mechanizmu czworobocznego, z naciskiem na wizualizację jego ruchu za pomocą interaktywnej aplikacji VR.

2.1. Wykorzystanie w praktyce mechanizmów czteroczłonowych

Mechanizmy czteroczłonowe są kluczowym elementem wielu aplikacji inżynierskich, począwszy od prostych narzędzi, poprzez złożone systemy robotyczne. Akademickie rozważania na temat ruchu mechanizmów wieloczłonowych i mechaniki analitycznej mają głębokie implikacje dla rozwoju technologicznego, szczególnie w dziedzinach takich jak robotyka, protetyka, inżynieria motoryzacyjna i technologia kosmiczna. W robotyce badania te przyczyniają się do projektowania bardziej efektywnych i realistycznych kończyn oraz stawów robotycznych, co poprawia płynność ruchu i zdolność do adaptacji. Postępy w motoryzacji obejmują ulepszone układy zawieszania oraz bardziej efektywne projekty układów napędowych, co podnosi wydajność i bezpieczeństwo pojazdów. W technologii kosmicznej zastosowanie tych zasad prowadzi do opracowania zaawansowanych systemów sterowania dla samolotów i statków kosmicznych, co poprawia ich manewrowość oraz efektywność operacyjną. Ogólnie rzecz biorąc, te akademickie wglądy napędzają innowacje, prowadząc do powstania bardziej zaawansowanych, wydajnych i bezpiecznych rozwiązań technologicznych w różnych branżach.

W artykule [8] opisano badania nad rozwojem robotów kroczących z jednym siłownikiem poprzez łączenie różnych mechanizmów. Omawiono różne koncepcje projektowe, w tym mechanizmy czworoboczne, mechanizmy korbowo-suwnicowe oraz system krzywkowy z mechanizmem pantografowym. W artykule przedstawiono analizę kinematyczną tych mechanizmów i zaproponowano trzy roboty z jednym siłownikiem oparte na tych rozwiązaniach. Symulacje numeryczne potwierdzają skuteczność tych projektów, podkreślając ich potencjał w tworzeniu wydajnych i adaptacyjnych robotów kroczących. Badania wnoszą innowacyjne podejścia do projektowania robotów o jednym stopniu swobody.

Podobne badania w dziedzinie robotyki można znaleźć w pracy oceny wydajności oraz przy budowie prototypu, który demonstruje praktyczne zdolności do chodzenia. Wyniki są istotne dla postępów w robotyce, zwłaszcza w projektowaniu wydajnych i ekonomicznych mechanizmów nóg dla robotów dwunożnych.

W nowoczesnych rozwiązaniach [9], która przedstawia badanie mechanizmu nogi, łączącego czworoboczny mechanizm Chebysheva z pantografem dla dwunożnego robota z jednym stopniem swobody. Badania koncentrują się na opracowaniu i analizie kinematyki tego złożonego mechanizmu, przeprowadzeniu badań parametrycznych. Mechanizmy czteroczłonowe znajdują zastosowanie w precyzyjnych robotach medycznych, gdzie zapewniają stabilne i kontrolowane ruchy narzędzi chirurgicznych [12]. Mechanizm czworoczłonowy jest stosowany w robotach przeznaczonych do operacji wymagających dużej precyzji, takich jak Single Port Access Surgery (SPA). Ten mechanizm pozwala na precyzyjne manipulowanie narzędziami chirurgicznymi w ograniczonej przestrzeni, co jest kluczowe dla minimalnie inwazyjnych procedur.

W artykule [10] przedstawiono projekt i ocenę nowatorskiej protezy ręki. Skupiono się na zwiększeniu odporności na uderzenia palców protezy poprzez zastosowanie elastycznego mechanizmu czworobocznego. Ta konfiguracja zapewnia elastyczność boczną i eliminuje częsty punkt awarii. W artykule wykazano poprawę odporności na uderzenia i absorpcji energii palców prote-

zy, podkreślając ich praktyczne zastosowanie i wytrzymałość. Projekt przyczynia się do rozwoju trwalszych i bardziej funkcjonalnych protez dłoni.

Mechanizmy łącznikowe – stosowane w różnych urządzeniach, takich jak układy kierownicze i hamulcowe w samochodach oraz pompy płynów – odgrywają kluczową rolę również w maszynach rolniczych. W artykule [11] skoncentrowano się na zastosowaniu mechanizmu czworobocznego w traktorach w celu stabilizacji głębokości orki. Przedstawiono w nim rozwiązanie za pomocą MATLAB równanie Freudensteina i wzór Chebysheva do syntezy wymiarowej, a następnie analizę błędów za pomocą oprogramowania Adams. To podejście podkreśla znaczenie precyzyjnego projektowania mechanizmów w poprawie wydajności maszyn rolniczych.

W [13] znajdziemy kolejne wykorzystywane mechanizmów czworoczłonowych w zawieszaniach pojazdów, takich jak systemy wielowahaczowe, które poprawiają stabilność i komfort jazdy. Kolejne publikacje dotyczą wykorzystania mechanizmu w systemach zawiesznień rowerowych, jak opisano w [14], oraz w przemyśle produkcyjnym w maszynach pakujących i montażowych, gdzie precyzja i powtarzalność ruchów są kluczowe dla efektywności produkcji. W przemyśle naftowym mechanizmy czteroczłonowe są kluczowe dla działania pomp olejowych, przekształcając ruch obrotowy silnika w ruch posuwisto-zwrotny potrzebny do pompowania ropy naftowej z ziemi, co zostało opisane w artykule [15].

2.2. Przegląd badań nad mechanizmami czteroczłonowymi

Badania nad mechanizmami wieloczłonowymi sięgają czasów starożytnych, a jednym z ich pionierów był Al-Jazari, wybitny inżynier i wynalazca z XII wieku. Jego prace, szczegółowo opisane w źródłach [16, 17], stanowią ważne źródło informacji na temat wczesnych maszyn i urządzeń. Al-Jazari koncentrował się na praktycznych aspektach inżynierii i na tworzeniu ulepszeń wcześniejszych wynalazków. Jego prace nad mechanizmami wieloczłonowymi, w tym wprowadzenie takich elementów jak wałek rozrządu, wał korbowy i mechanizm korbowo-suwnicowy, były przełomowe. Te wynalazki były kluczowe w przekształcaniu ruchu obrotowego w ruch posuwisto-zwrotny, co jest podstawą działania dzisiejszych maszyn, takich jak silniki parowe i spalinowe. James Watt, wynalazca znanego silnika parowego, zastosował mechanizmy czteroczłonowe w swoich wynalazkach, w tym w mechanizmie równoległoboku przekształcającego ruch obrotowego na liniowy. W XIX wieku Franz Reuleaux wprowadził systematyczne badania nad różnymi konfiguracjami mechanizmów czteroczłonowych [20], co pozwoliło na lepsze zrozumienie zasad działania tych mechanizmów i ich klasyfikacji.

Przegląd historyczny badań nad mechanizmami czteroczłonowymi zawarty jest w pracy [25], która obejmuje ewolucję metod analizy i projektowania tych mechanizmów. Istotnym punktem odniesienia jest również praca [26], gdzie wprowadzono kluczowy warunek Grashofa, określający zdolność ruchową mechanizmów czteroczłonowych. Ważnym wkładem w rozwój teorii mechanizmów czteroczłonowych była także praca [27], skupiająca się na analizie mechanizmów generujących przybliżony ruch liniowy, co stanowiło istotny krok w rozwoju teorii kinematyki. Ruch mechanizmów wieloczłonowych był również badany przez Alfreda Kempe, który w swoim artykule [28] przedstawił innowacyjne podejście do budowy mechanizmów zdolnych do rysowania dowolnych płaskich krzywych algebraicznych, co miało znaczący wpływ na rozwój teorii kinematyki. Ludwig Burmester odegrał kluczową rolę w rozwoju badań nad mechanizmami wieloczłonowymi, przyczyniając się do ewolucji kinematyki jako dziedziny naukowej. Jego praca [29] jest uznawana za przełomową w tej dziedzinie, zawierając kompleksową analizę kinematyki płaskiej i mechanizmów znanych w jego czasach.

W XX wieku rozwinięto zaawansowane teorie kinematyczne i dynamiczne dotyczące mechanizmów czteroczłonowych, a wprowadzenie komputerowego wspomaganie projektowania (CAD) umożliwiło dokładniejsze modelowanie i analizę tych mechanizmów [21]. Współczesne badania koncentrują się na projektowaniu i optymalizacji, uwzględniając elastyczność materiałów, oraz

poprawieniu trwałości oraz dokładności ruchu mechanizmu. Rozwój technologii obliczeniowych i algorytmów pozwala na tworzenie bardziej zaawansowanych mechanizmów o lepszych parametrach eksploatacyjnych.

Analiza kinematyczna i dynamiczna mechanizmów czterocłonowych została zrewolucjonizowana przez Hartenberga i Denavita, którzy w artykule [22] wprowadzili systematyczne podejście do analizy kinematycznej z użyciem macierzy. Ich praca upraszcza proces analizy ruchu i pozycjonowania elementów mechanizmów. Wcześniej, Freudenstein w artykule [23] skupił się na metodach analitycznych projektowania i analizy mechanizmów czterocłonowych, wprowadzając techniki, które stały się fundamentem współczesnych badań.

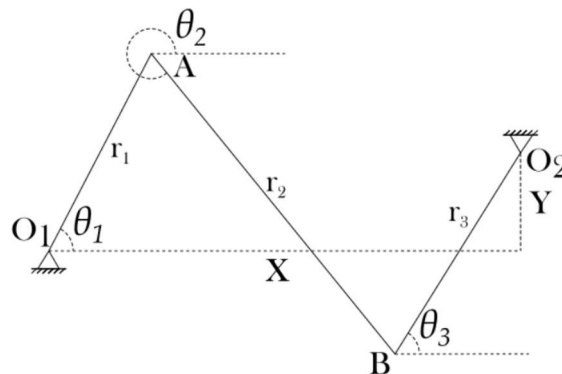
Synteza mechanizmów czterocłonowych została szczegółowo opisana przez Nortona w książce [24], która zawiera metodologie pozwalające na projektowanie mechanizmów do osiągnięcia określonych profili ruchu. Optymalizacja projektowania mechanizmów czterocłonowych została szeroko opisana w [30], która obejmuje rozdziały dotyczące optymalizacji połączeń mechanicznych, oferując praktyczne zastosowania tych metod.

3. Model matematyczny mechanizmu czworocłonowego

W poniższym rozdziale przedstawiono analizę oraz proces wyprowadzenia równań kinematycznych umożliwiających symulację ruchu ogniów łańcucha kinematycznego. Analiza ruchu mechanizmu czterocłonowego obejmuje trzy kluczowe etapy, które są niezbędne do zrozumienia jego działania. Pierwszym krokiem jest analiza położenia, podczas której ustala się pozycje wszystkich ogniów mechanizmu na podstawie jego geometrii. Do tego celu używa się równań trygonometrycznych, które opisują zależności między kątami obrotu poszczególnych ogniów. Następnie przeprowadza się analizę prędkości, określając prędkości liniowe i kątowe każdego z ogniów. Proces ten wymaga różniczkowania równań położenia względem czasu. Ostatnim etapem jest analiza przyspieszeń, gdzie po wyznaczeniu prędkości, oblicza się przyspieszenia kątowe oraz składowe styczne i normalne przyspieszenia liniowego.

3.1. Analiza geometryczna mechanizmu

W poniższych rozważaniach założono, że człon napędowy jest zamocowany do podłoża w punkcie O_1 o współrzędnych $(0,0)$, a punkt zamocowania wyjścia O_2 znajduje się w punkcie (X,Y) (rys. 1). Długości poszczególnych przegubów opisane są przez r_1 , r_2 , r_3 , a kąty θ_1 ,



Rys. 1. Analizowany czworobok przegubowy

θ_2 , θ_3 określają orientację przegubów względem poziomemu. Kąt θ_1 jest zmienny w czasie i dla ruchu jednostajnego opisany jest równaniem

$$\theta_1(t) = \theta_1(t=0) + \omega_1 t \quad (3.1)$$

a dla ruchu jednostajnie zmiennego przez

$$\theta_1 = \theta_1(t=0) + \omega_1 t + \varepsilon t^2 \quad (3.2)$$

Znając długości poszczególnych elementów mechanizmu r_1, r_2, r_3 oraz kąt obrotu członu napędowego θ_1 , możliwe jest wyznaczenie nieznanych kątów obrotu członu biernego oraz korbowodu. W pracy wykorzystano do tego celu przekształcenia symboliczne pakietu Symbolic Math Toolbox. Serię poleceń liveScript MATLAB wykorzystanych do wyznaczenia wyrażenia symbolicznego opisującego θ_2 i θ_3 opisano poniżej.

W dowolnym położeniu rozważanego mechanizmu spełnione jest równanie wektorowe, które wiąże zależności między wymiarami i konfiguracją poszczególnych jego członów

$$\mathbf{O}_1 \mathbf{A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BO}_2 = \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 \quad (3.3)$$

Jest to równanie więzów geometrycznych, któremu w nieruchomym układzie współrzędnych kartezjańskich odpowiadają dwa równania geometryczne opisujące zależności między kątami obrotu i przemieszczeniami poszczególnych członów. W równaniach tych zakładamy stałe wartości długości członów

$$\begin{aligned} r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 &= X \\ r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 &= Y \end{aligned} \quad (3.4)$$

Do rozwiązania układu równań (3.4) wykorzystano symboliczną matematykę w przedstawionym poniżej skrypcie MATLAB-a

```
syms t;
syms r1 r2 r3;
syms omega1;

theta1=omega1*t;

eq1 = (X==r1*cos(theta1)+r2*cos(theta2)+r3*cos(theta3));
eq2 = (Y==r1*sin(theta1)+r2*sin(theta2)+r3*sin(theta3));

sol=solve([eq1,eq2],[theta2,theta3],"Real",true);
```

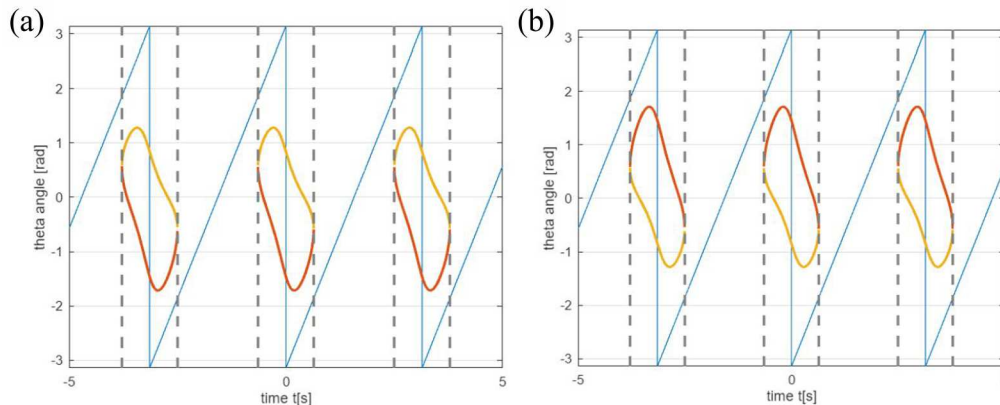
Celem opisywanych rozważań jest wyznaczenie kątów θ_2 i θ_3 przy zadanym θ_1 , które spełniają równania (3.4) pozycji mechanizmu. Ze względu na cykliczność funkcji trygonometrycznych, program MATLAB zwraca dwa rozwiązania odpowiadające górnemu i dolnemu położeniu punktu B mechanizmu. Ze względu na złożoność otrzymanych rozwiązań, dla przykładu poniżej przytoczono zależność dla kąta θ_2 w położeniu górnym mechanizmu

$$\theta_2 = 2 \operatorname{atan} \left(\frac{[\cos(\omega_1 t) + 1] \sigma_5}{2(X^2 - \sigma_4 + 2Xr_2 + Y^2 - \sigma_3 + r_1^2 - 2 \cos(\omega_1 t)r_1 r_2 + r_2^2 - r_3^2)} \right) \quad (3.5)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tan \frac{\omega_1 t}{2} \\ \sigma_2 &= \sqrt{\frac{(-X^2 + \sigma_4 - Y^2 + \sigma_3 - r_1^2 + r_2^2 + 2r_2 r_3 + r_3^2)(X^2 - \sigma_4 + Y^2 - \sigma_3 + r_1^2 - r_2^2 + 2r_2 r_3 - r_3^2)}{(X^2 - \sigma_4 + 2Xr_3 + Y^2 - \sigma_3 + r_1^2 - 2 \cos(\omega_1 t)r_1 r_3 - r_2^2 + r_3^2)^2}} \\ \sigma_3 &= 2 \sin(\omega_1 t) Y r_1 \quad \sigma_4 = 2 \cos(\omega_1 t) X r_1 \\ \sigma_5 &= r_1^2 \sigma_2 - r_2^2 \sigma_2 + r_3^2 \sigma_2 + 2Y r_2 + X^2 \sigma_2 + Y^2 \sigma_2 - 2r_1 r_3 \sigma_2 + \dots \\ &\quad + r_1^2 \sigma_1^2 \sigma_2 - r_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2 + r_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2 + 2Y r_2 \sigma_1^2 - 2X r_1 \sigma_2 + \dots \\ &\quad + 2X r_3 \sigma_2 - 4r_1 r_2 \sigma_1 + X^2 \sigma_1^2 \sigma_2 + Y^2 \sigma_1^2 \sigma_2 + \dots \\ &\quad + 2X r_1 \sigma_1^2 \sigma_2 + 2X r_3 \sigma_1^2 \sigma_2 + 2r_1 r_3 \sigma_1^2 \sigma_2 - 4Y r_1 \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Uzyskane w ten sposób wartości kątów θ_2 oraz θ_3 dla obydwu rozwiązań równania (3.4), gdy punkt B znajduje się w pozycji górnej i dolnej przedstawione zostały na rysunku 2.



Rys. 2. Wartości kątów θ_2 i θ_3 w funkcji czasu

3.2. Zamknięcie geometryczne łańcucha kinematycznego

Znajdujący się w mianowniku równania (3.5) wyraz stanowi równanie zamknięcia łańcucha kinematycznego, gdzie każdy z elementów ma określoną długość, a ich końce muszą się spotkać w punkcie B , co zapewnia mechaniczne połączenie układu.

$$X^2 + Y^2 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - 2 \cos(\omega_1 t)(Xr_1 + r_1 r_2) - 2 \sin(\omega_1 t)Yr_1 + 2Xr_2 \neq 0 \quad (3.7)$$

Zamknięcie geometryczne łańcucha kinematycznego odnosi się do stanu, w którym wszystkie przeguby i łączniki w mechanizmie tworzą zamknięty układ, bez żadnych przerw ani luk między elementami. Oznacza to, że każdy element mechanizmu jest połączony z innym w sposób ciągły, co umożliwi realizację określonego ruchu zgodnie z nałożonym równaniem więzów geometrycznych (3.3). W praktyce oznacza to, że suma wektorów przemieszczeń wzdłuż całego łańcucha wynosi zero, co jest warunkiem koniecznym do prawidłowego działania mechanizmu.

3.3. Prędkości i przyspieszenia kątowe członów mechanizmu czworocłonowego

Do wyznaczenia zależności symbolicznych opisujących prędkości i przyspieszenia kątowe poszczególnych członów mechanizmu wykorzystano poniższy kod, zawierający odpowiedzialną za różniczkowanie funkcję diff

```
omega2=diff(sol.theta2,t);
omega3=diff(sol.theta3,t);

epsilon2=diff(omega2,t);
epsilon3=diff(omega3,t);
```

W celu wyznaczenia wartości numerycznych oraz przebiegów czasowych opisujących prędkości i przyspieszenia kątowe członów mechanizmu wykorzystano poniższy kod zawierający komendę subs służącą podstawieniu w miejscu zmiennych symbolicznych wartości liczbowych parametrów

```
r1_val = 4;
r2_val = 3;
r3_val = 4;
```

```

X_val = 7;
Y_val = 0;

omega1_val = 2;
index = 1;

theta1_val=simplify(subs(theta1,[r1,r2,r3,X,Y,omega1],...
[r1_val,r2_val,r3_val,X_val,Y_val,omega1_val]));
theta2_val=simplify(subs(theta2s(index),...
[r1,r2,r3,X,Y,omega1],[r1_val,r2_val,r3_val,X_val,Y_val,omega1_val]));
theta3_val=simplify(subs(theta3s(index),...
[r1,r2,r3,X,Y,omega1],[r1_val,r2_val,r3_val,X_val,Y_val,omega1_val]));

omega2_val=(subs(omega2(index),[r1,r2,r3,omega1,X,Y],...
[r1_val,r2_val,r3_val,omega1_val,X_val,Y_val]));
omega3_val=(subs(omega3(index),[r1,r2,r3,omega1,X,Y],...
[r1_val,r2_val,r3_val,omega1_val,X_val,Y_val]));

epsilon2_val = (subs(epsilon2(index),[r1,r2,r3,omega1,X,Y],...
[r1_val,r2_val,r3_val,omega1_val,X_val,Y_val]));
epsilon3_val = (subs(epsilon3(index),[r1,r2,r3,omega1,X,Y],...
[r1_val,r2_val,r3_val,omega1_val,X_val,Y_val]));

```

3.4. Prędkości i przyspieszenia liniowe przegubów mechanizmu czworobocznego

W kolejnym kroku analizy wyprowadzono zależności umożliwiające wyznaczenie kierunków oraz wartości wektorów prędkości liniowej oraz wektorów składowych przyspieszeń stycznej i normalnej jako funkcji prędkości i przyspieszeń kątowych. W poniższym kodzie wykorzystano iloczyn wektorowy oraz 3-elementowy zapis tablicowy wektorów położenia, prędkości i przyspieszeń

```

vectorXComponent = @(vec) vec(1);
vectorYComponent = @(vec) vec(2);

omega1_vec = @(t_val) [0, 0, omega1_val];
omega2_vec = @(t_val) [0, 0, subs(omega2_val,t,t_val)];
omega3_vec = @(t_val) [0, 0, subs(omega3_val,t,t_val)];

epsilon1_vec = @(t_val) [0, 0, epsilon1_val];
epsilon2_vec = @(t_val) [0, 0, subs(epsilon2_val, t, t_val)];
epsilon3_vec = @(t_val) [0, 0, subs(epsilon3_val, t, t_val)];

```

Zakładając położenie początku układu współrzędnych w punkcie O_1 , wektor wodzący punktów A , B i O_2 opisany jest parametrami: r_A (positionA_vec), r_B (position0_vec), r_{O_2} (positionA_vec)

```

positionA_vec = @(t_val) [r1_val*cos(omega1_val*t_val), ...
r1_val*sin(omega1_val*t_val), 0];
positionB_vec = @(t_val) positionA_vec(t_val) + ...
real(double([r2_val*cos(subs(theta2_val,t,t_val)), ...
r2_val*sin(subs(theta2_val,t,t_val)), 0]));
position0_vec = @(t_val) [X_val, Y_val, 0];

```


Prędkość liniowa punktu A (końca członu napędowego) w nieruchomym układzie odniesienia ma postać

$$v_A = \omega_1 \times r_A \quad (3.8)$$

Prędkość punktu B w ruchu względnym, względem bieguna A , wynika z ruchu łącznika AB z prędkością kątową ω_2

$$v_{B/A} = \omega_2 \times (r_B - r_A) \quad (3.9)$$

Natomiast prędkość punktu B w nieruchomym układzie odniesienia wynika z ruchu członu biernego O_2B z prędkością kątową ω_3

$$v_B = \omega_3 \times (r_B - r_{O_2}) \quad (3.10)$$

Powyższe związki kinematyczne zapisano w postaci formuł w skrypcie MATLAB

```
velocity1_vec = @(t_val) cross(omega1_vec(t_val),...
positionA_vec(t_val));
velocity2_vec = @(t_val) cross(omega2_vec(t_val),...
positionB_vec(t_val)-positionA_vec(t_val));
velocity3_vec = @(t_val) cross(omega3_vec(t_val),...
positionB_vec(t_val)-position0_vec(t_val));
```

Zasada superpozycji mówi, że dowolny ruch płaski ciała sztywnego (w analizowanym przypadku członu AB mechanizmu czworobocznego) można rozpatrywać jako ruch złożony z dwu ruchów: postępowego i obrotowego. Twierdzenie to jest słuszne w dowolnym układzie odniesienia. Dlatego też, zgodnie ze wzorem (3.11) prędkość punktu B analizowanego mechanizmu jest równa sumie geometrycznej prędkości punktu A (dowolnego innego punktu przyjętego jako biegun) oraz prędkości punktu B w ruchu obrotowym wokół bieguna A

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (3.11)$$

Zgodnie z zasadą superpozycji przyspieszenie jakiegokolwiek punktu ciała sztywnego w ruchu płaskim możemy przedstawić tak jak prędkość, czyli jako sumę geometryczną dwóch przyspieszeń wynikających z rozkładu ruchu tego ciała na ruch postępowy i obrotowy. Dlatego też, zgodnie ze wzorem (3.12) przyspieszenie punktu B członu AB analizowanego mechanizmu jest równe sumie geometrycznej przyspieszenia bieguna A oraz przyspieszenia punktu B w ruchu obrotowym wokół bieguna A

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad (3.12)$$

Wszystkie analizowane ruchy są ruchami obrotowymi, dlatego wektory przyspieszeń w ogólnym przypadku mają dwie składowe, tj. przyspieszenie styczne a^T i normalne a^N (dośrodkowe, zwrócone do bieguna, względem którego następuje obrót), wynikające z tego, że prędkość kątowa ω jest w ogólnym przypadku ruchem wielkością zmienną, przy czym przyspieszenie kątowe ε może mieć zwrot zgodny z prędkością ω lub przeciwny do niej

$$a^T = \varepsilon \times r \quad a^N = \omega \times v \quad (3.13)$$

Tak więc zgodnie z zasadą superpozycji zachodzi następująca równość

$$\vec{a}_B^N + \vec{a}_B^T = \vec{a}_A^N + \vec{a}_A^T + \vec{a}_{B/A}^N + \vec{a}_{B/A}^T \quad (3.14)$$

Składowe wektorów przyspieszeń zapisane w postaci formuł w MATLAB mają postać

```

    acceleration1T_vec = @(t_val) cross(epsilon1_vec(t_val),...
positionA_vec(t_val));
    acceleration2T_vec = @(t_val) cross(epsilon2_vec(t_val),...
positionA_vec(t_val)-positionB_vec(t_val));
    acceleration3T_vec = @(t_val) cross(epsilon3_vec(t_val),...
positionB_vec(t_val)-position0_vec(t_val));

    acceleration1N_vec = @(t_val) cross(omega1_vec(t_val),...
velocity1_vec(t_val));
    acceleration2N_vec = @(t_val) cross(omega2_vec(t_val),...
velocity2_vec(t_val));
    acceleration3N_vec = @(t_val) cross(omega3_vec(t_val),...
velocity3_vec(t_val));

```

4. Wyznaczenie położenia chwilowego środka obrotu korbowodu – model Zosia

W ramach kursu mechaniki ogólnej udowadnia się twierdzenie, iż w ruchu płaskim ciała sztywnego przemieszczenie w dowolnie małym przedziale czasu $\Delta t \rightarrow 0$ można wykonać jako obrót dookoła jednego punktu, zwanego chwilowym środkiem obrotu (ang. instantaneous center of rotation, IC). Chwilowy środek obrotu jest ważnym pojęciem w analizie kinematycznej ruchu płaskiego, szczególnie w kontekście analizy prędkości. Jest to punkt, wokół którego w danej chwili czasu odbywa się chwilowy ruch obrotowy z pewną chwilową prędkością kątową ω . Jeśli znamy położenie chwilowego środka obrotu, to również znamy chwilowe rozkłady prędkości.

Pamiętać należy, że jeżeli ciało porusza się ruchem płaskim, to jego ruchowi towarzyszy przemieszczanie się chwilowego środka obrotu. W analizowanym mechanizmie czworobocznym chwilowy środek obrotu korbowodu zmienia swoje położenie w zależności od położenia kąowego członu napędowego i biernego, jednak zawsze leży on w punkcie przecięcia tych członów. Wynika to z faktu, że chwilowy środek obrotu jest punktem przecięcia prostych prostopadłych do odpowiednich wektorów prędkości lub ich kierunków.

Aby precyzyjnie określić położenie chwilowego środka obrotu, można zastosować metody analityczne, geometryczne lub numeryczne. W artykule w tym celu zastosowano alternatywne podejście wykorzystujące model LLM (Large Language Model) sprofilowany specjalnie do rozwiązywania problemów mechanicznych. Model ten, o nazwie Zosia, dostępny jest na platformie OpenAI pod adresem <https://chatgpt.com/g/g-weAS8OyIC-zosia>.

Model Zosia jest zaawansowanym narzędziem, które potrafi przetwarzać zapytania związane z analizą kinematyczną mechanizmów. Przeprowadzane obecnie testy wykazują, że dostarcza on w większości poprawnych i precyzyjnych wyników dotyczących chwilowego położenia środka obrotu oraz innych istotnych parametrów. Aktualnie występujące błędy w rozumowaniu modelu wynikają głównie z nieprawidłowej analizy geometrii płaskiej i trygonometrii. Kluczowym elementem rozwoju modelu Zosia był proces fine tuningu, oparty na rozwiązywaniu rzeczywistych zadań z kursu mechaniki. Zadania te, obejmujące szeroki zakres zagadnień mechanicznych, były rozwiązywane przez model w sposób iteracyjny, a generowane odpowiedzi były na bieżąco weryfikowane i korygowane przez autorów artykułu.

Jednym z istotnych aspektów procesu dostrajania modelu było rozkładanie złożonych problemów na mniejsze, bardziej zarządzalne zadania. Model Zosia został dostosowany do rozwiązywania problemów „krok po kroku”, co zapewnia większą precyzję i klarowność w generowanych rozwiązaniach. Dzięki temu podejściu model może skutecznie radzić sobie ze skomplikowanymi zagadnieniami kinematycznymi.

W celu wyznaczenia zmiennych w czasie współrzędnych chwilowego środka obrotu zadano modelowi poniższe dwa zapytania, w których $((x_1, y_1))$, $((x_2, y_2))$ są współrzędnymi punktów A i B korbowodu, natomiast $((vx_1, vy_1))$, $((vx_2, vy_2))$ są długościami wektorów prędkości tych punktów.

4.1. Zapytanie 1

Podaj mi równanie prostej przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) i prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i $(x_1 + vx_1, y_1 + vy_1)$.

Wygenerowana odpowiedź

Aby znaleźć równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt, najpierw musimy znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i $(x_1 + vx_1, y_1 + vy_1)$, a następnie wykorzystać ten wynik do znalezienia równania prostej prostopadłej

Krok 1: Znalezienie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty

Mając punkty (x_1, y_1) i $(x_1 + vx_1, y_1 + vy_1)$, możemy znaleźć nachylenie m prostej przechodzącej przez te punkty jako

$$m = \frac{(y_1 + vy_1) - y_1}{(x_1 + vx_1) - x_1} = \frac{vy_1}{vx_1} \quad (4.1)$$

Równanie prostej można wyrazić jako $y - y_1 = m(x - x_1)$, więc dla naszego pierwszego równania mamy

$$y - y_1 = \frac{vy_1}{vx_1}(x - x_1) \quad (4.2)$$

Krok 2: Znalezienie równania prostej prostopadłej

Prosta prostopadła do danej prostej ma nachylenie, które jest odwrotnością i przeciwnym znakiem nachylenia prostej wyjściowej. Oznacza to, że jeśli nasza prosta ma nachylenie m , to prosta do niej prostopadła będzie miała nachylenie $m' = -1/m$. Dla naszego przypadku nachylenie prostej prostopadłej wynosi

$$m' = -\frac{vx_1}{vy_1} \quad (4.3)$$

Stosując to nachylenie, równanie prostej prostopadłej przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) można zapisać jako

$$y - y_1 = -\frac{vx_1}{vy_1}(x - x_1) \quad (4.4)$$

Możemy to uprościć i przekształcić do postaci funkcjonalnej $y = mx + b$, gdzie m to nachylenie, a b to wyraz wolny.

Podsumowanie

Równanie prostej prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i $(x_1 + vx_1, y_1 + vy_1)$ i przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) ma postać

$$y - y_1 = -\frac{vx_1}{vy_1}(x - x_1) \quad (4.5)$$

To równanie umożliwia znalezienie każdego punktu na prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez określony punkt.

4.2. Zapytanie 2

Założmy że mamy takie dwie proste $y-y_1=-(v_{y1}/v_{x1})(x-x_1)$ i $y-y_2=-(v_{y2}/v_{x2})(x-x_2)$. Znajdź poproszę współrzędne punktu przecięcia tychże prostych.

Wygenerowana odpowiedź

Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych opisanych równaniami

$$y - y_1 = -\frac{v_{y1}}{v_{x1}}(x - x_1) \quad y - y_2 = -\frac{v_{y2}}{v_{x2}}(x - x_2) \quad (4.6)$$

Nusimy je najpierw przekształcić do postaci ogólnej równań liniowych, a następnie rozwiązać układ równań. Przekształćmy oba równania do postaci $y = mx + b$. Dla pierwszej prostej

$$y = -\frac{v_{y1}}{v_{x1}}x + \left(-\frac{v_{y1}}{v_{x1}}(-x_1) + y_1\right) \quad (4.7)$$

Dla drugiej prostej

$$y = -\frac{v_{y2}}{v_{x2}}x + \left(-\frac{v_{y2}}{v_{x2}}(-x_2) + y_2\right) \quad (4.8)$$

Mamy zatem układ dwóch równań. Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia (x, y) , musimy go rozwiązać. Równania są już w postaci, którą łatwo jest rozwiązać metodą podstawiania lub równaniem. Możemy ustawić prawe strony równań równe sobie, aby znaleźć x , a następnie użyć znalezionej x do wyliczenia y

$$-\frac{v_{y1}}{v_{x1}}x + \left(-\frac{v_{y1}}{v_{x1}}(-x_1) + y_1\right) = -\frac{v_{y2}}{v_{x2}}x + \left(-\frac{v_{y2}}{v_{x2}}(-x_2) + y_2\right) \quad (4.9)$$

Rozwiązując to równanie względem x , a następnie podstawiając x do jednego z równań liniowych, otrzymamy y . Zajmijmy się teraz konkretnym rozwiązaniem tego układu równań. Współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych dane są jako

$$\begin{aligned} x &= \frac{-v_{x1}v_{x2}y_1 + v_{x1}v_{x2}y_2 + v_{x1}v_{y2}x_2 - v_{x2}v_{y1}x_1}{v_{x1}v_{y2} - v_{x2}v_{y1}} \\ y &= \frac{v_{x1}v_{y2}y_1 - v_{x2}v_{y1}y_2 + v_{y1}v_{y2}x_1 - v_{y1}v_{y2}x_2}{v_{x1}v_{y2} - v_{x2}v_{y1}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Te wzory pozwalają na obliczenie współrzędnych x i y punktu przecięcia, biorąc pod uwagę parametry v_{x1} , v_{y1} , x_1 , y_1 dla pierwszej prostej i v_{x2} , v_{y2} , x_2 , y_2 dla drugiej prostej.

5. Wizualizacja VR ruchu układu

Wizualizacja wyników analizy kinematycznej jest kluczowa dla zrozumienia dynamiki mechanizmu czworobocznego. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie interaktywnej aplikacji VR opracowanej w celach dydaktycznych. Aplikacja umożliwi studentom śledzenie ruchu członów mechanizmu w czasie rzeczywistym, z wyraźnym zobrazowaniem wektorów prędkości i przyspieszeń.

Aplikacja została opracowana przy użyciu platformy Unity oraz Meta XR All-in-One SDK. Użytkownicy po założeniu gogli VR zanurzają się w wirtualnym świecie, gdzie rozwiązują sekwencję zadań poprzez interakcję z mechanizmem. Przepływ zadań w aplikacji został zaimplementowany wykorzystując narzędzie VR Builder. Wirtualna scena została zbudowana przy użyciu darmowych zasobów z Unity Asset Store, co uatrakcyjniła proces nauki.



Rys. 3. Widok z aplikacji VR - przemieszczenie punktu zaczepienia członu biernego mechanizmu

Podczas ćwiczeń studenci dotykają wirtualną dłoń wektorów odpowiadających symbolom w aplikacji. Mogą również zmieniać ustawienia łańcucha poprzez przesunięcie punktu zaczepienia członu biernego O_2 , jak pokazano na rysunku 3. W przypadku naruszenia więzów geometrycznych łańcuch przestaje być widoczny.

Następnie w aplikacji prezentowane są wektory prędkości kątowych (rys. 4). Przedstawienie wektorów prędkości kątowych w przestrzeni trójwymiarowej w formie strzał ułatwia studentom zrozumienie konwencji oznaczeń - wektor skierowany w stronę obserwatora widoczny jest jako punkt (grot strzały), natomiast patrząc „od obserwatora” widzimy krzyżyk, symbolizujący widok piór strzały z tyłu.

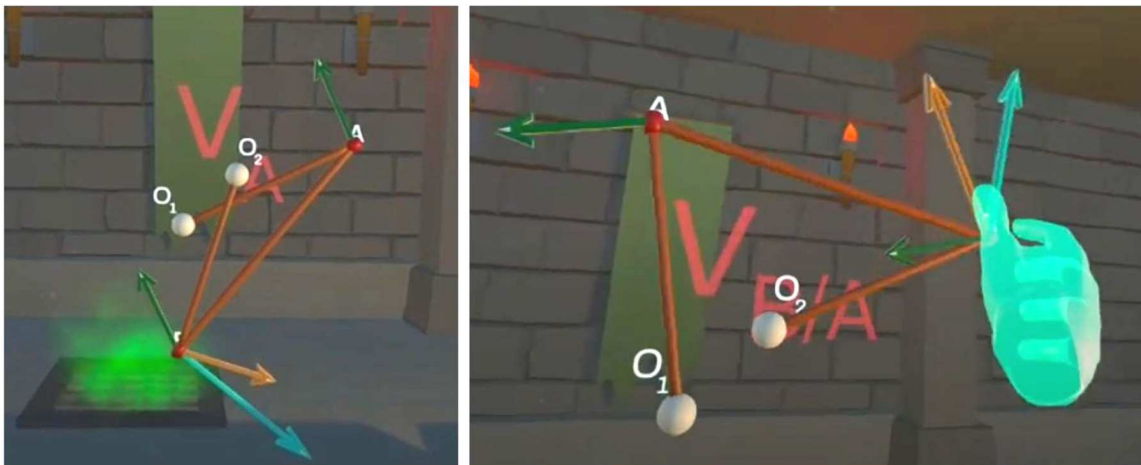


Rys. 4. Widok z aplikacji VR – wektory prędkości kątowych

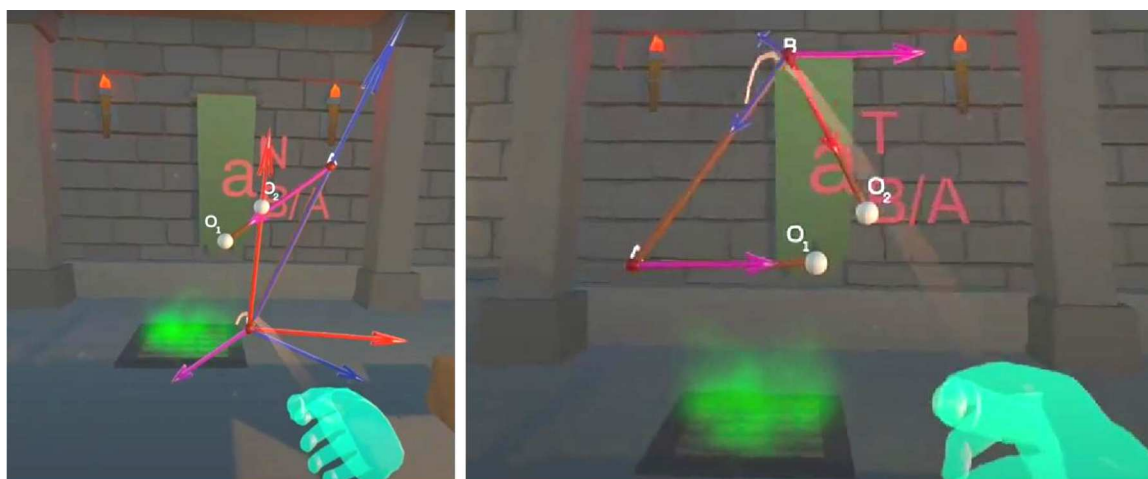
Kolejny etap symulacji ukazuje wektory prędkości liniowych, gdzie kluczowym zadaniem jest potwierdzenie zasady superpozycji poprzez dodawanie wektorów zgodnie z zasadą równoległoboku (rys. 5).

Ostatni etap symulacji pokazuje wektory przyspieszeń liniowych układu, z wyróżnieniem składowych stycznych, prostopadłych do długości członu, oraz normalnych, skierowanych w stronę osi obrotu (rys. 7).

Aplikacja oferuje studentom unikalną możliwość interaktywnego doświadczania kinematyki mechanizmów, co znacznie ułatwia zrozumienie abstrakcyjnych pojęć, takich jak wektory prędkości kątowych, liniowych oraz przyspieszeń. Wizualizacja w trójwymiarowej przestrzeni, w szczególności poprzez intuicyjne oznaczenia wektorów jako strzałek, pozwala na lepsze przyswojenie konwencji oznaczeń oraz zasad dodawania wektorów. Dodatkową zaletą jest możliwość modyfikacji parametrów łańcucha kinematycznego w czasie rzeczywistym, co rozwija umiejętności analizy i rozwiązywania problemów związanych z mechaniką. Aplikacja pomaga studentom



Rys. 5. Widok z aplikacji VR – wektory prędkości liniowych z widoczną zasadą superpozycji



Rys. 6. Widok z aplikacji VR - wektory przyspieszeń liniowych

nie tylko w lepszym zrozumieniu teoretycznych zagadnień, ale także w wizualnym potwierdzeniu zasad fizycznych, takich jak superpozycja wektorów.

5.1. Pierwsze badania z udziałem studentów

Podczas kursu mechaniki ogólnej dla studentów pierwszego roku studiów inżynierskich na Wydziale Mechatroniki PW wprowadzono pilotażowe zajęcia z wykorzystaniem aplikacji VR jako narzędzia edukacyjnego. W trakcie zajęć jeden ze studentów korzystał z headsetu VR, a obraz był transmitowany na ekran, co umożliwiło całej grupie śledzenie symulacji (rys. 7). Studenci analizowali położenie wektorów, lokalizowali je oraz prowadzili grupową dyskusję na temat ruchu mechanizmów. Po zakończeniu prezentacji każdy z uczestników miał okazję samodzielnie przetestować aplikację VR, co dla wielu było pierwszym zetknięciem z tą technologią. Uczestnicy wyrażali pozytywne opinie i chęć korzystania z podobnych narzędzi w przyszłości, co przyczyniło się do wzrostu ich zaangażowania oraz lepszego zrozumienia omawianych zagadnień.

Wprowadzenie VR do zajęć przyczyniło się do bardziej interaktywnej i angażującej formy nauki, pozwalając studentom na głębsze zrozumienie złożonych koncepcji kinematycznych poprzez bezpośrednie doświadczenie. Dzięki temu wzrosła nie tylko motywacja do nauki, ale również efektywność przyswajania wiedzy, co potwierdziły wyniki ankiety przeprowadzonej po



Rys. 7. Pilotażowe zajęcia z wykorzystaniem aplikacji VR na kursie mechaniki ogólnej

zajęciach. Technologia VR okazała się cennym narzędziem dydaktycznym, które może znacząco ułatwić zrozumienie trudnych koncepcji inżynierskich.

5.2. Plany na przyszłość

W ramach dalszego rozwoju aplikacja zostanie wzbogacona o moduły poświęcone bardziej zaawansowanym zagadnieniom z dziedziny mechaniki. W szczególności planujemy zaimplementować moduł dotyczący ruchu względnego oraz przyspieszenia Coriolisa, które są kluczowe dla zrozumienia zjawisk zachodzących w układach wirujących. Dzięki technologii VR te zjawiska, często trudne do zobrazowania podczas wykładów, będą mogły być przedstawione w sposób bardziej intuicyjny i przystępny.

Kolejnym krokiem rozwoju będzie wprowadzenie modułu poświęconego macierzom bezwładności, co pozwoli studentom zrozumieć, jak ten kluczowy tensor wpływa na dynamikę ciał sztywnych w ruchu obrotowym. Wizualizacja macierzy bezwładności i jej wpływu na ruch obrotowy w przestrzeni trójwymiarowej pomoże w lepszym przyswojeniu tych skomplikowanych koncepcji.

Ostatnim planowanym rozszerzeniem będzie moduł do nauki różnych sposobów reprezentacji orientacji w przestrzeni, takich jak kwaterniony, macierze obrotu i kąty Eulera. Każda z tych metod ma swoje unikalne zastosowania i ograniczenia, których zrozumienie jest niezbędne dla przyszłych inżynierów i projektantów mechanizmów. Prezentowanie tych metod w interaktywnym środowisku VR pozwoli na głębsze zrozumienie i bardziej praktyczne podejście do nauki.

Rozwijając tę aplikację, naszym celem jest nie tylko dostarczenie narzędzia edukacyjnego, ale także stworzenie platformy, która inspirowa studentów do dalszego badania i zrozumienia złożonych koncepcji mechanicznych, zachęcając ich do kreatywnego myślenia i innowacji w dziedzinie inżynierii mechanicznej.

6. Podsumowanie

W artykule przedstawiono opracowanie i wdrożenie aplikacji VR, której celem jest ułatwienie studentom nauki kinematyki mechanizmów czworobocznych poprzez interaktywną wizualizację ich ruchu. Aplikacja została zbudowana na platformie Unity z użyciem Meta XR SDK, co umożliwia użytkownikom zanurzenie się w wirtualnym środowisku i manipulowanie mechanizmami za

pomocą gogli VR. Dzięki temu studenci mogą dotykać wirtualnych wektorów, modyfikować ustawienia łańcucha kinematycznego, a także obserwować skutki naruszenia więzów geometrycznych, co wzbogaca proces edukacyjny o dynamiczne, praktyczne elementy.

Akademickie rozważania dotyczące ruchu mechanizmów wieloczłonowych oraz mechaniki analitycznej odgrywają kluczową rolę w rozwoju technologii, szczególnie w dziedzinach takich jak robotyka, protetyka, inżynieria motoryzacyjna i technologia kosmiczna. W robotyce badania te prowadzą do projektowania bardziej zaawansowanych, realistycznych kończyn oraz stawów robotycznych, co umożliwi zwiększenie płynności ruchu, zdolności adaptacyjnych oraz interakcji z otoczeniem. W inżynierii motoryzacyjnej zastosowanie tej wiedzy przekłada się na projektowanie bardziej wydajnych i bezpiecznych układów napędowych oraz systemów zawieszenia, co bezpośrednio wpływa na poprawę komfortu, bezpieczeństwa i osiągnięć pojazdów. W technologii kosmicznej zasady mechaniki wieloczłonowej i analitycznej wspomagają rozwój systemów sterowania w statkach kosmicznych, które wymagają wysokiej precyzji i niezawodności w trudnych warunkach operacyjnych. Zastosowanie tych koncepcji napędza innowacje, umożliwiając tworzenie nowoczesnych, bardziej zaawansowanych, efektywnych i bezpiecznych rozwiązań technologicznych w różnych sektorach przemysłu.

Mechanizmy czteroczłonowe, ze względu na swoją prostotę, wszechstronność i szerokie zastosowanie, stanowią fundament wielu nowoczesnych układów mechanicznych. Historia ich badania i rozwoju odzwierciedla postęp w metodach analizy i syntezy mechanizmów, prowadząc do współczesnych narzędzi i technik stosowanych w inżynierii mechanicznej. Nauczanie tych zagadnień studentów inżynierii jest kluczowe nie tylko dla rozwijania ich umiejętności analitycznych, ale także dla inspirowania ich do zgłębiania i rozwiązywania złożonych problemów mechanicznych. Praktyczne podejście do nauki mechanizmów oraz zaawansowane technologie, takie jak VR, wspomagają rozwój umiejętności kognitywnych studentów, które są coraz bardziej istotne w świecie zdominowanym przez narzędzia wykorzystujące sztuczną inteligencję i automatyzację.

Przekazanie tej wiedzy studentom, z jednoczesnym zachęceniem ich do angażowania się w rozwiązywanie problemów inżynierskich, stymuluje kreatywność oraz rozwija umiejętności krytycznego myślenia. W dobie dynamicznego rozwoju nowych technologii zrozumienie podstawowych zasad mechaniki oraz ich zastosowań stanowi fundament innowacyjnych rozwiązań technologicznych, które kształtują przyszłość branż takich jak robotyka, motoryzacja i technologia kosmiczna.

Bibliografia

1. BOYLE J.T., Teaching Mechanics, [W:] Altenbach H., Öchsner A. (Eds.), *State of the Art and Future Trends in Material Modeling, Advanced Structured Materials*, vol. 100, Springer, Cham, 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-030-30355-6_2
2. GEREN N., UZAY Ç, BAYRAMOĞLU M., A proposal to improve the competence of students within the unnecessarily complex mechanical engineering design environment, *Int J Technol Des Educ*, **31**, 741770, 2021, <https://doi.org/10.1007/s10798-020-09571-4>
3. AL-SAID K., AMARIN N., KRASNOVA L., Comparative effectiveness of teaching physics in the classroom and through VR: Perspectives for expanding the possibilities of using VR technology in education, *Educ Inf Technol*, **29**, 1430914324, 2024, <https://doi.org/10.1007/s10639-023-12438-5>
4. GEORGIU Y., TSIVITANIDOU O., IOANNOU A., Learning experience design with immersive virtual reality in physics education, *Education Tech Research Dev*, **69**, 30513080, 2021, <https://doi.org/10.1007/s11423-021-10055-y>
5. MAROUGKAS A., TROUSSAS C., KROUSKA A. *et al.*, How personalized and effective is immersive virtual reality in education? A systematic literature review for the last decade, *Multimed Tools Appl*, **83**, 1818518233, 2024, <https://doi.org/10.1007/s11042-023-15986-7>

6. MAROUGKAS A., TROUSSAS C., KROUSKA A., SGOUROPOULOU C., Virtual reality in education: a review of learning theories, approaches and methodologies for the last decade, *Electronics*, **12**, 2832, 2023, <https://doi.org/10.3390/electronics12132832>
7. HAMILTON D., MCKECHNIE J., EDGERTON E. *et al.*, Immersive virtual reality as a pedagogical tool in education: a systematic literature review of quantitative learning outcomes and experimental design, *J. Comput. Educ.*, **8**, 132, 2021, <https://doi.org/10.1007/s40692-020-00169-2>
8. ZHANG Y., ARAKELIAN V., Design and synthesis of single-actuator walking robots via coupling of linkages, *Frontiers in Mechanical Engineering*, **6**, 609340, 2021
9. LIANG C., CECCARELLI M., TAKEDA Y., Operation analysis of a Chebyshev-Pantograph leg mechanism for a single DOF biped robot, *Front. Mech. Eng.*, **7**, 357370, 2012, <https://doi.org/10.1007/s11465-012-0340-5>
10. CHOI K.Y., AKHTAR A., BRETL T., A compliant four-bar linkage mechanism that makes the fingers of a prosthetic hand more impact resistant, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 66946699, 2017, <https://doi.org/10.1109/ICRA.2017.7989791>
11. KUMAR R., MOHANTY A., Design, synthesis and simulation of four bar mechanism for eliminate the plowing depth fluctuations in tractors, *International Journal of Engineering Research and Applications*, **3**, 3, 953-956, 2013
12. PUSCA A. *et al.*, On the development of an innovative surgical parallel robotic system, [W:] Costin HN., Magjarević R., Petroiu G.G. (Eds.), *Advances in Digital Health and Medical Bioengineering*, EHB 2023, IFMBE Proceedings, vol 109. 2024, Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-031-62502-2_20
13. JAZAR R.N., Suspension mechanisms, [W:] *Vehicle Dynamics*, Springer, New York, NY, 2014, https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8544-5_8
14. CHAUDHARY N., GUPTA A., Multi-body analysis for a four-bar mechanism using recurDyn and MATLAB, [W:] Kumar R., Chauhan V.S., Talha M., Pathak H. (Eds.), *Machines, Mechanism and Robotics. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, Springer, Singapore, 2022, https://doi.org/10.1007/978-981-16-0550-5_174
15. FENG Z.M., TAN J.J., LI Q. *et al.*, A review of beam pumping energy-saving technologies, *J Petrol Explor Prod Technol*, **8**, 299311, 2018, <https://doi.org/10.1007/s13202-017-0383-6>
16. AL-JAZARI, *The Book of Knowledge of Ingenious Mechanical Devices: Kitb f ma'rifat al-hiyal al-handasiyya*. D.R. Hill (Trans.), Dordrecht: Springer Netherlands, 1974, <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2573-7>
17. <https://muslimheritage.com/islamic-automation-al-jazaris-book-of-knowledge-of-ingenious-mechanical-devices>
18. CHEBYSHEV P.L., *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, Imprimerie de l'Académie impériale des sciences, 1853
19. KEMPE A.B., On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **1**, 1, 213-216, 1875
20. KELLER A.G., Review of the book the machines of Leonardo da Vinci and Franz Reuleaux: Kinematics of machines from the Renaissance to the 20th century, *Technology and Culture*, **50**, 2, 454-456, 2009, <https://dx.doi.org/10.1353/tech.0.0247>
21. YUE C., SU H.J., GE Q.J., A hybrid computer-aided linkage design system for tracing open and closed planar curves, *Computer-Aided Design*, **44**, 11, 1141-1150, 2012
22. DENAVIT J., HARTENBERG R.S., *A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices*, 1955
23. FREUDENSTEIN F., An analytical approach to the design of four-link mechanisms, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **76**, 3, 483-489, 1954
24. NORTON R.L., HAN J., *Design of Machinery*, vol. 2, New York: McGraw-Hill, 1999

25. ERDMAN A.G., SANDOR G.N., *Mechanism Design Analysis and Synthesis*, vol. 1, Prentice-Hall, Inc., 1997
26. GRASHOF F., *Theoretische Maschinenlehre: Theorie der Getriebe und der mechanischen Meßinstrumente*, vol. 2, Voss., 1883
27. CHEBYSHEV P.L., *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, Imprimerie de l'Académie impériale des sciences, 1953
28. KEMPE A.B., On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **1**, 1, 213-216, 1875
29. BURMESTER L., *Lehrbuch der kinematik*, Felix, A, Leipzig, 1888
30. RAO S.S., *Engineering Optimization: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 2019

VR in mechanics education: analysis of kinematics of the quadrangular mechanism

Contemporary methods of teaching mechanical engineering increasingly utilize advanced technologies such as Virtual Reality to break traditional educational barriers and enhance learning effectiveness. The key area in the study of mechanics, which is kinematics, examines motion of bodies without considering forces acting on them. Understanding its principles, particularly in the context of velocity and linear and angular acceleration vectors, is often challenging due to the abstract nature and complexity of the mathematical apparatus. With VR, students can see and test the impact of different mechanical system parameters on the movement of its components, allowing for an intuitive and long lasting understanding of complex kinematic concepts. The crucial aspect of this article is the presentation of a method for determining the time-varying configuration of a four-bar mechanism. For this purpose, the Symbolic Math Toolbox package and a Large Language Model (LLM) trained for educational support in mechanics courses were used. These tools allow for precise determination – essential for VR visualization – of the position, velocity, and acceleration of key points of the mechanism at any given moment of time. The article does not aim at providing theoretical foundations kinematical analysis of the four-bar mechanism only but also at demonstrating the practical application of modern computational tools in engineering education.